

5 Kertausosa

1. $\alpha = \beta + 25^\circ$

a)

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\beta + 25^\circ + \beta = 90^\circ$$

$$2\beta = 65^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 32,5^\circ$$

$$\alpha = \beta + 25^\circ = 32,5^\circ + 25^\circ = 57,5^\circ$$

b)

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$2\beta + 25^\circ = 180^\circ$$

$$2\beta = 165^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 82,5^\circ$$

$$\alpha = \beta + 25^\circ = 82,5^\circ + 25^\circ = 107,5^\circ$$

c)

$$\alpha + \beta = 360^\circ$$

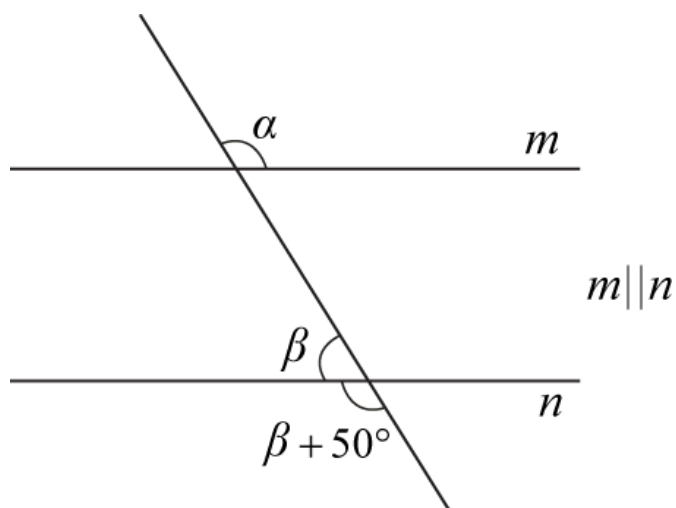
$$2\beta + 25^\circ = 360^\circ$$

$$2\beta = 335^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 167,5^\circ$$

$$\alpha = \beta + 25^\circ = 167,5^\circ + 25^\circ = 192,5^\circ$$

2.



$$\beta + \beta + 50^\circ = 180^\circ$$

$$2\beta = 130^\circ \quad | :2$$

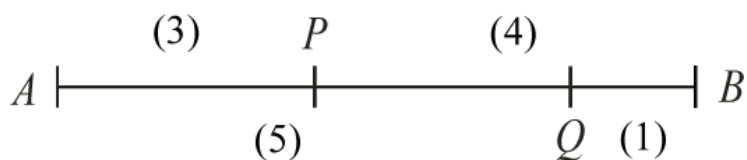
$$\beta = 65^\circ$$

$$\alpha = \beta + 50^\circ \quad (\text{samankohtaisina kulmina})$$

$$\alpha = 65^\circ + 50^\circ$$

$$\alpha = 115^\circ$$

3.



$$|PQ| = {}^7) \frac{5}{6} |AB| - {}^6) \frac{3}{7} |AB|$$

$$= \frac{35-18}{42} |AB|$$

$$= \frac{17}{42} |AB|$$

$$\text{Vastaus: } \frac{17}{42}$$

4. Kulmat α (suurin), β ja γ (pienin)

$$\alpha = 2 \cdot \gamma$$

$$\beta = \gamma + 10^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$2\gamma + \gamma + 10^\circ + \gamma = 180^\circ$$

$$4\gamma = 170^\circ \quad | :4$$

$$\gamma = 42,5^\circ$$

$$\alpha = 2\gamma = 2 \cdot 42,5^\circ = 85^\circ$$

$$\beta = \gamma + 10^\circ = 42,5^\circ + 10^\circ = 52,5^\circ$$

Vastaus: kulmat ovat 85° , $52,5^\circ$ ja $42,5^\circ$

5. Kulmien astelukujen suhde $1 : 2 : 3 : 4$
Kulmat x , $2x$, $3x$ ja $4x$.

Nelikulmion kulmien summa $= 360^\circ$

$$x + 2x + 3x + 4x = 360^\circ$$

$$10x = 360^\circ \quad | :10$$

$$x = 36^\circ$$

$$2x = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$$

$$3x = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$$

$$4x = 4 \cdot 36^\circ = 144^\circ$$

Vastaus: 36° , 72° , 108° ja 144°

6. 7-kulmion kulmien summa

$$(7 - 2) \cdot 180^\circ = 900^\circ$$

$$\beta = \frac{900^\circ}{7}$$

Tasakylkinen puolisuunnikas:

$$2\gamma + 2\beta = 360^\circ$$

$$2\gamma = 360^\circ - \frac{2 \cdot 900^\circ}{7}$$

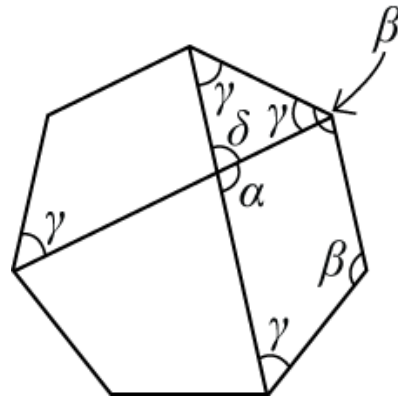
$$2\gamma = \frac{720^\circ}{7}$$

Tasakylkinen kolmio:

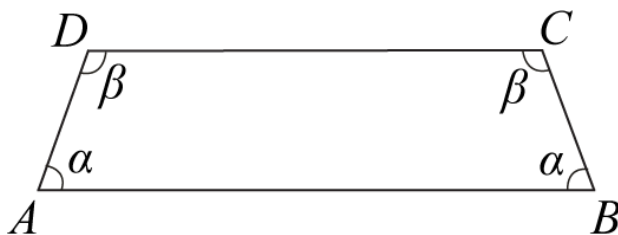
$$\delta = 180^\circ - 2\gamma$$

$$\delta = 180^\circ - \frac{720^\circ}{7} = \frac{540^\circ}{7}$$

$$\alpha = 180^\circ - \delta = \frac{720^\circ}{7} \approx 102,9^\circ$$



7.



$$\alpha = \beta - 65^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$

$$2(\beta - 65^\circ) + 2\beta = 360^\circ$$

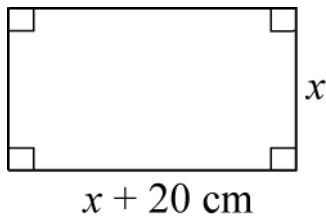
$$4\beta - 130^\circ = 360^\circ$$

$$4\beta = 490^\circ$$

$$\beta = 122,5^\circ$$

$$\alpha = \beta - 65^\circ = 57,5^\circ$$

8.



$$\text{Piiri } p = 2x + 2(x + 20) = 4x + 40 \text{ (cm)}$$

$$p = 4,5x$$

$$4x + 40 = 4,5x$$

$$0,5x = 40 \quad | :0,5$$

$$x = 80 \text{ (cm)}$$

$$x + 20 \text{ cm} = 100 \text{ cm}$$

Vastaus: kanta 100 cm, korkeus 80 cm

$$9. \quad \frac{\text{pituus kartalla}}{\text{pituus luonnossa}} = \frac{1}{34\,000}$$

$$\frac{32 \text{ cm}}{x} = \frac{1}{34\,000}$$

$$x = 34\,000 \cdot 32 \text{ cm} = 1\,088\,000 \text{ cm} = 10,88 \text{ km}$$

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{10,88 \text{ km}}{12 \text{ km/h}} = 0,9066... \text{ h}$$

$$0,9066... \text{ h} = 0,9066 \cdot 60 \text{ min} = 54,4 \text{ min} \approx 54 \text{ min}$$

10. a) $\triangle ECD \sim \triangle ABD$ (kk)

$$\frac{x}{20} = \frac{2,5}{2,5 + 2x - 2,5}$$

$$\frac{x}{20} = \frac{2,5}{2x} \quad \left| \text{kerrotaan ristiin} \right.$$

$$2x^2 = 50 \quad \left| :2 \right.$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \text{ ja } 2x - 2,5 > 0 \\ 2x > 2,5 \\ x > 1,25 \end{array} \right\} \text{joten } x = 5 \text{ kelpaa}$$

b) $\triangle ABD \sim \triangle CED$ (kk)

$$\frac{x}{x+4} = \frac{x+1}{x+8} \quad \left| x > 0 \text{ kerrotaan ristiin} \right.$$

$$x(x+8) = (x+1)(x+4)$$

$$\cancel{x^2} + 8x = \cancel{x^2} + 4x + x + 4$$

$$3x = 4 \quad \left| :3 \right.$$

$$x = \frac{4}{3}$$

11.

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \text{ (kk)}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\cancel{x}}{4\cancel{x}}$$

$$a = \frac{c}{4}$$

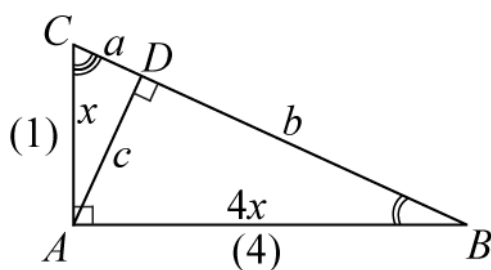
$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \text{ (kk)}$$

$$\frac{b}{4x} = \frac{c}{x}$$

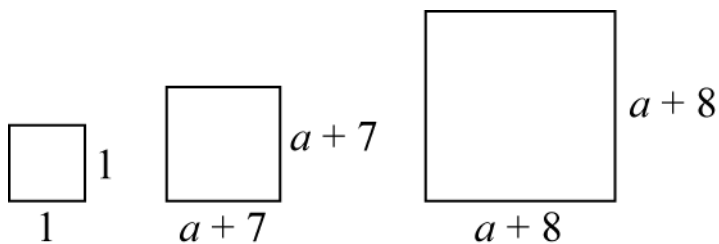
$$b = \frac{4xc}{x} = 4c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{c}{4}}{4c} = \frac{\cancel{c}}{16\cancel{c}} = \frac{1}{16}$$

Vastaus: 1:16



12.



$$\frac{1}{a+8} = \frac{2}{5}$$

$$2(a+8) = 5$$

$$2a+16=5$$

$$a = -\frac{11}{2}$$

Kahden suurimman sivut

$$a + 7 = -\frac{11}{2} + 7 = \frac{3}{2}$$

$$a + 8 = -\frac{11}{2} + 8 = \frac{5}{2}$$

Suhde

$$\frac{a+7}{a+8} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} = \frac{3}{5}$$

Vastaus: $a = -\frac{11}{2}$, suhde on 3 : 5.

13. Särmä alussa a

Särmä lopussa $1,2a$

$$\text{a) } \frac{A_{\text{lopus}}}{A_{\text{al}}}} = \left(\frac{1,2\cancel{a}}{\cancel{a}} \right)^2 = 1,44 \text{ eli kasvaa } 44 \%$$

$$\text{b) } \frac{V_{\text{lopus}}}{V_{\text{al}}}} = \left(\frac{1,2\cancel{a}}{\cancel{a}} \right)^3 = 1,728 \text{ eli kasvaa } 72,8 \%$$

14.

$$\frac{\text{Ala kartalla}}{\text{Ala luonnossa}} = \left(\frac{1}{300\,000} \right)^2$$

$$\frac{48 \text{ cm}^2}{x} = \frac{1}{9 \cdot 10^{10}} \quad \left| \text{kerrotaan ristiin} \right.$$

$$x = 9 \cdot 10^{10} \cdot 48 \text{ cm}^2$$

$$x = 4,32 \cdot 10^{12} \text{ cm}^2$$

$$x = 432 \text{ km}^2 \approx 430 \text{ km}^2$$

$$15. \quad \frac{|AE|}{|ED|} = \frac{2}{3} \quad |AE| = \frac{2}{3}|ED|$$

$$|AD| = |AE| + |ED| = \frac{2}{3}|ED| + |ED| = \frac{5}{3}|ED|$$

$$\triangle ECD \sim \triangle ABD \text{ (kk)}$$

$$\frac{A_{ECD}}{A_{ABD}} = \left(\frac{|ED|}{|AD|} \right)^2 = \left(\frac{\cancel{|ED|}}{\frac{5}{3}\cancel{|ED|}} \right)^2 = \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{9}{25} = 0,36$$

Vastaus: 36 %

16. x = pienemmän kolmion korkeus
 $x + 5$ = suuremman kolmion korkeus

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{9}{16}$$

$$\left(\frac{x}{x+5} \right)^2 = \frac{9}{16} \quad | \sqrt{\quad} \quad (x > 0)$$

$$\frac{x}{x+5} = \frac{3}{4}$$

$$4x = 3x + 15$$

$$x = 15 \text{ (cm)}$$

$$x + 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

Vastaus: 15 cm ja 20 cm

17. a)

$$x^2 + \left(\frac{2,4}{2}\right)^2 = 3,0^2$$

$$x^2 + 1,44 = 9$$

$$x^2 = 7,56$$

$$x = \pm\sqrt{7,56} \quad | \quad x > 0$$

$$x = \sqrt{7,56} = 2,749... \approx 2,7 \text{ (cm)}$$

b)

$$x^2 + x^2 = 114^2$$

$$2x^2 = 12996 \quad | :2$$

$$x^2 = 6498$$

$$x = \pm\sqrt{6498} \quad | \quad x > 0$$

$$x = \sqrt{6498} = 80,610... \approx 80,6 \text{ (mm)}$$

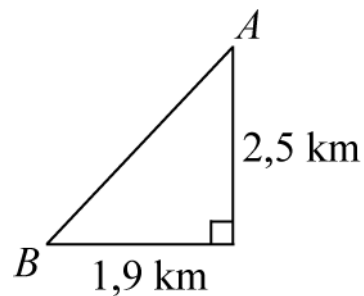
18. a)

$$|AB|^2 = 1,9^2 + 2,5^2$$

$$|AB|^2 = 9,86 \quad | \quad \sqrt{}$$

$$|AB| = 3,1400...$$

$$\approx 3,1 \text{ (km)}$$



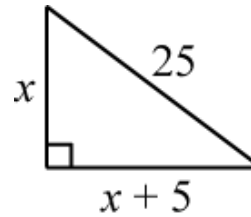
b) Matka $s = 1,9 \text{ km} + 2,5 \text{ km} = 4,4 \text{ km}$

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{4,4 \text{ km}}{7,0 \text{ km/h}}$$

$$t = 0,628... \text{ h} = 0,628... \cdot 60 \text{ min} \approx 38 \text{ min}$$

19.

$$\begin{aligned}x^2 + (x+5)^2 &= 25^2 \\x^2 + x^2 + 10x + 25 &= 625 \\2x^2 + 10x - 600 &= 0 \quad | :2 \\x^2 + 5x - 300 &= 0\end{aligned}$$



$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-300)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-5 \pm 35}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 35}{2} = 15 \quad x_2 = \frac{-5 - 35}{2} = -20 \text{ ei kelpaa}$$

$$x = 15$$

$$x + 5 = 20$$

Vastaus: Kateettien pituudet 15 ja 20

20. $\frac{\text{kanta}}{\text{kylki}} = \stackrel{2x)}{=} \frac{1}{3} = \frac{2x}{6x}$

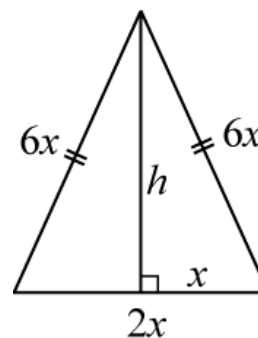
$$h^2 + x^2 = (6x)^2$$

$$h^2 + x^2 = 36x^2$$

$$h^2 = 35x^2$$

$$h = \pm \sqrt{35x^2} \quad | x > 0$$

$$h = \sqrt{35} |x| = \sqrt{35}x$$



$$\frac{\text{kanta}}{\text{korkeus}} = \frac{2x}{\sqrt{35}x} = \stackrel{\sqrt{35})}{=} \frac{2}{\sqrt{35}} = \frac{2\sqrt{35}}{35}$$

Vastaus: $2\sqrt{35} : 35$

21. a)

$$\sin 55^\circ = \frac{3,4 \text{ cm}}{x}$$

$$x \cdot \sin 55^\circ = 3,4 \text{ cm}$$

$$x = \frac{3,4 \text{ cm}}{\sin 55^\circ} = 4,150... \text{ cm}$$

$$x \approx 4,2 \text{ cm}$$

b) $\alpha = \frac{118^\circ}{2} = 59^\circ$

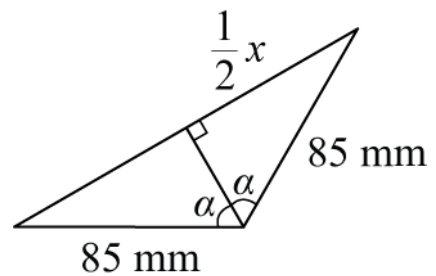
$$\sin 59^\circ = \frac{\frac{1}{2}x}{85 \text{ mm}} \quad | \cdot 85 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{2}x = \sin 59^\circ \cdot 85 \text{ mm} \quad | \cdot 2$$

$$x = 2 \cdot \sin 59^\circ \cdot 85 \text{ mm}$$

$$x = 145,718... \text{ mm}$$

$$x \approx 150 \text{ mm}$$



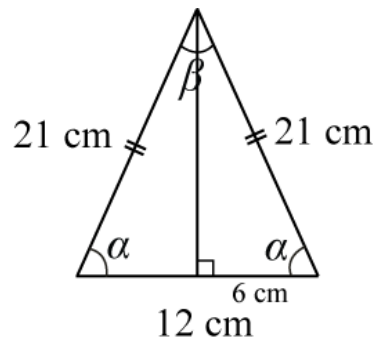
22.

$$\cos \alpha = \frac{6}{21}$$

$$\alpha = 73,398...^\circ \approx 73,4^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 2\alpha = 33,20...^\circ \approx 33,2^\circ$$

Vastaus: $73,4^\circ$, $73,4^\circ$ ja $33,2^\circ$



23.

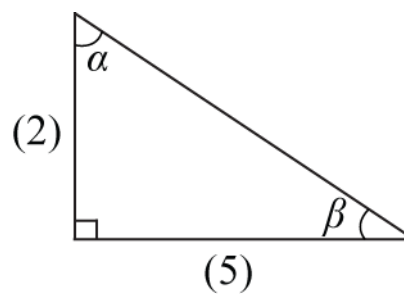
$$\tan \alpha = \frac{5}{2}$$

$$\alpha = 68,198\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 68^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$$

Vastaus: 90° , 68° ja 22°



24. $x = b - a$

$$\tan 20^\circ = \frac{b}{35 \text{ m}}$$

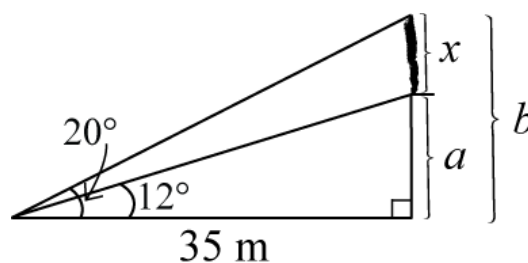
$$b = \tan 20^\circ \cdot 35 \text{ m}$$

$$\tan 12^\circ = \frac{a}{35 \text{ m}}$$

$$a = \tan 12^\circ \cdot 35 \text{ m}$$

$$x = \tan 20^\circ \cdot 35 \text{ m} - \tan 12^\circ \cdot 35 \text{ m} = 5,299\dots \text{ m} \approx 5,3 \text{ m}$$

Vastaus: 5,3 m

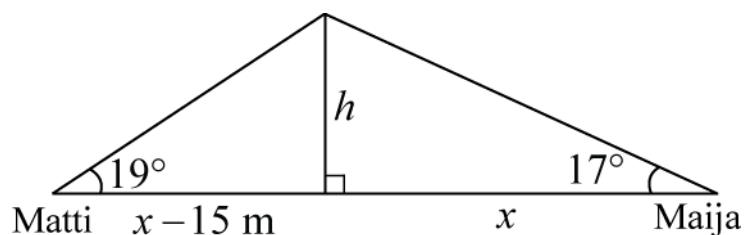


25.

$$\tan 17^\circ = \frac{h}{x}$$

$$x \cdot \tan 17^\circ = h$$

$$x = \frac{h}{\tan 17^\circ}$$



$$\tan 19^\circ = \frac{h}{x-15}$$

$$(x-15) \tan 19^\circ = h$$

$$x \tan 19^\circ - 15 \tan 19^\circ = h$$

$$\frac{h}{\tan 17^\circ} \cdot \tan 19^\circ - h = 15 \tan 19^\circ$$

$$h \left(\frac{\tan 19^\circ}{\tan 17^\circ} - 1 \right) = 15 \tan 19^\circ \quad | : \left(\frac{\tan 19^\circ}{\tan 17^\circ} - 1 \right)$$

$$h = \frac{15 \tan 19^\circ}{\frac{\tan 19^\circ}{\tan 17^\circ} - 1} = 40,911... \approx 41 \text{ (m)}$$

26. a)

$$A_{\text{suunnikas}} = ab \cdot \sin \alpha = 9,2 \text{ cm} \cdot 19 \text{ cm} \cdot \sin 128^\circ$$

$$= 137,744... \text{ cm}^2 \approx 140 \text{ cm}^2$$

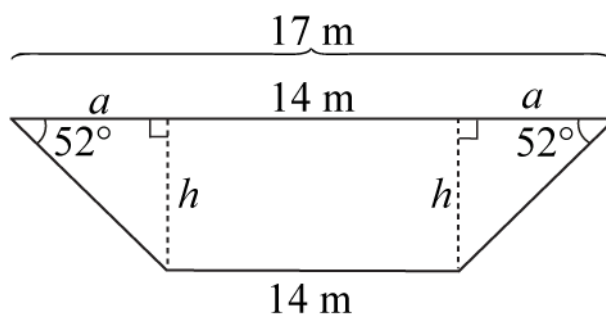
b)

$$a = \frac{17 \text{ m} - 14 \text{ m}}{2} = 1,5 \text{ m}$$

$$\tan 52^\circ = \frac{h}{1,5 \text{ m}}$$

$$h = \tan 52^\circ \cdot 1,5 \text{ m}$$

$$A = \left(\frac{17 \text{ m} + 14 \text{ m}}{2} \right) \cdot \tan 52^\circ \cdot 1,5 \text{ m} = 29,758... \text{ m}^2 \approx 30 \text{ m}^2$$



27. $A = 42 \text{ cm}^2$

$$\frac{x(x-5)}{2} = 42 \quad | \cdot 2$$

$$x^2 - 5x = 84$$

$$x^2 - 5x - 84 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-84)}}{2 \cdot 1}$$

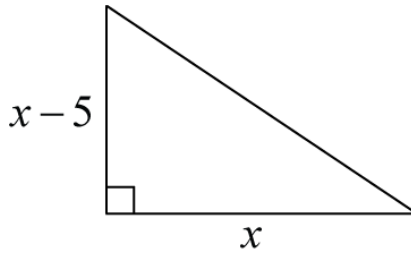
$$x = \frac{5 \pm 19}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+19}{2} = 12 \quad x_2 = \frac{5-19}{2} = -7 \text{ ei kelpaa}$$

$$x = 12 \text{ cm}$$

$$x - 5,0 \text{ cm} = 7,0 \text{ cm}$$

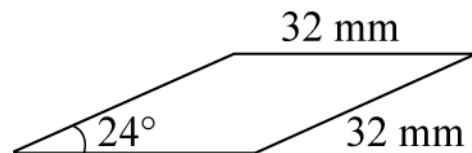
Vastaus: 12 cm ja 7,0 cm



28.

$$A = 32 \text{ mm} \cdot 32 \text{ mm} \cdot \sin 24^\circ$$

$$= 416,498... \text{ mm}^2 \approx 420 \text{ mm}^2$$



29. $A = 216 \text{ cm}^2$

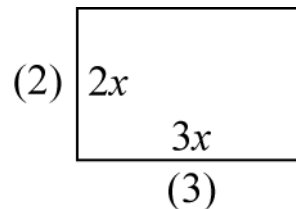
$$2x \cdot 3x = 216$$

$$6x^2 = 216 \quad | :6$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm\sqrt{36} \quad | x > 0$$

$$x = 6 \text{ (cm)}$$



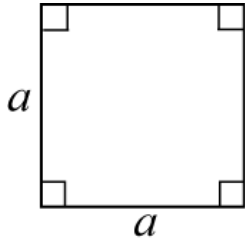
$$2x = 12 \text{ cm ja } 3x = 18 \text{ cm}$$

Vastaus: 12 cm ja 18 cm

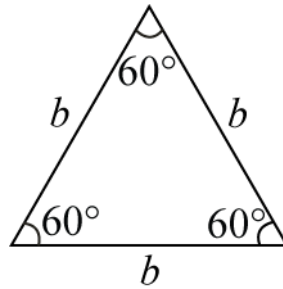
$$30. \quad A_{\text{neliö}} = \frac{1}{2} A_{\text{kolmio}}$$

Neliön sivu a

Tasasivuisen kolmion sivu b



$$A_{\text{neliö}} = a^2$$



$$A_{\text{kolmio}} = \frac{1}{2} b \cdot b \cdot \sin 60^\circ = \frac{b^2 \sin 60^\circ}{2}$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 \cdot \sin 60^\circ}{2}$$

$$a^2 = \frac{b^2 \cdot \sin 60^\circ}{4}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{b^2 \sin 60^\circ}{4}} \quad | \quad a > 0$$

$$a = \sqrt{\frac{b^2 \sin 60^\circ}{4}} = b \cdot \frac{\sqrt{\sin 60^\circ}}{2} \quad | \quad b > 0$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\cancel{b}}{\cancel{b} \cdot \frac{\sqrt{\sin 60^\circ}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\sin 60^\circ}} = 2,149... \approx 2,15$$

Kolmion sivu on $215\% - 100\% = 115\%$ suurempi.

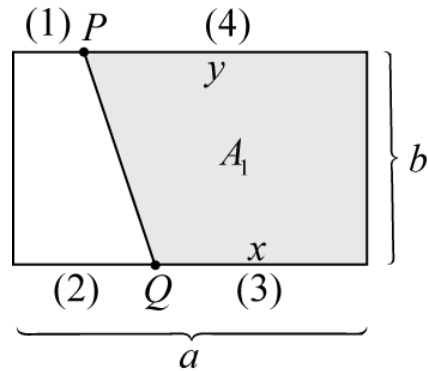
$$31. \quad A_1 = \frac{x+y}{2} \cdot b$$

$$x = \frac{3}{5}a$$

$$y = \frac{4}{5}a$$

$$A_1 = \frac{\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}a}{2} \cdot b = \frac{\frac{7}{5}a}{2} \cdot b = \frac{7}{10}ab$$

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\frac{7}{10} \cancel{ab}}{\cancel{ab}} = \frac{7}{10}$$



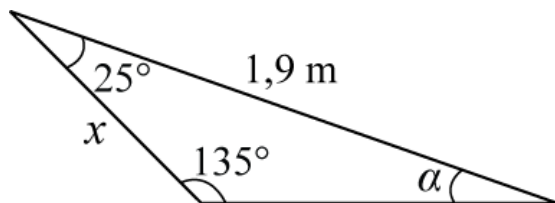
Vastaus: 7:10

32. a)

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sin 34^\circ} &= \frac{145 \text{ mm}}{\sin 78^\circ} \\ x &= \frac{145 \text{ mm} \cdot \sin 34^\circ}{\sin 78^\circ} \\ x &= 82,894... \text{ mm} \\ x &\approx 82,9 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \alpha = 180^\circ - 135^\circ - 25^\circ = 20^\circ$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sin 20^\circ} &= \frac{1,9 \text{ m}}{\sin 135^\circ} \\ x &= \frac{1,9 \text{ m} \cdot \sin 20^\circ}{\sin 135^\circ} \\ x &= 0,9190... \text{ m} \\ x &\approx 0,92 \text{ m} \end{aligned}$$



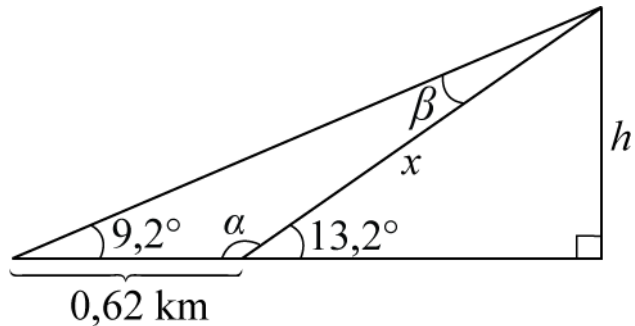
$$33. \quad \alpha = 180^\circ - 13,2^\circ = 166,8^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 9,2^\circ - 166,8^\circ = 4^\circ$$

Sinilause

$$\frac{x}{\sin 9,2^\circ} = \frac{0,62 \text{ km}}{\sin 4^\circ}$$

$$x = \frac{0,62 \text{ km} \cdot \sin 9,2^\circ}{\sin 4^\circ}$$



$$\sin 13,2^\circ = \frac{h}{x}$$

$$h = x \cdot \sin 13,2^\circ$$

$$h = \frac{0,62 \text{ km} \cdot \sin 9,2^\circ}{\sin 4^\circ} \cdot \sin 13,2^\circ$$

$$h = 0,32449... \text{ km} \approx 0,324 \text{ km} = 324 \text{ m}$$

Vastaus: 324 m

34. Sinilause

$$\frac{94}{\sin 49^\circ} = \frac{57}{\sin \alpha}$$

$$94 \sin \alpha = 57 \sin 49^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{57 \sin 49^\circ}{94}$$

$$\sin \alpha = 0,457...$$

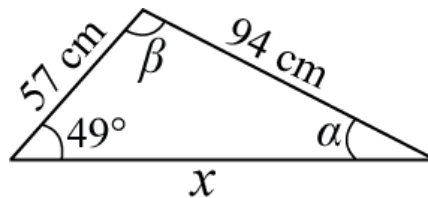
$$\alpha = 27,235...^\circ$$

$$\alpha \approx 27^\circ$$

$$\text{tai } \alpha = 180^\circ - 27,235...^\circ \approx 152,8...^\circ$$

Ei käy, koska $152,8^\circ + 49^\circ = 201,8^\circ > 180^\circ$

$$\beta = 180^\circ - 49^\circ - 27,235...^\circ = 103,76...^\circ \approx 104^\circ$$



Sinilause

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{94 \text{ cm}}{\sin 49^\circ}$$

$$x = \frac{94 \text{ cm} \cdot \sin \beta}{\sin 49^\circ}$$

$$x = 120,974... \text{ cm} \approx 121 \text{ cm}$$

Vastaus: kulmat 27° ja 104° , sivun pituus 121 cm

35. a)

$$x^2 = 12^2 + 17^2 - 2 \cdot 12 \cdot 17 \cdot \cos 32^\circ$$

$$x^2 = 433 - 408 \cdot \cos 32^\circ$$

$$x = \pm \sqrt{86,996...} \quad | \quad x > 0$$

$$x = \sqrt{86,996...} \text{ (cm)} = 9,327... \text{ (cm)} \approx 9,3 \text{ (cm)}$$

b)

$$6,3^2 = x^2 + 5,2^2 - 2x \cdot 5,2 \cdot \cos 119^\circ$$

$$39,69 = x^2 - 27,04 - 10,4x \cdot \cos 119^\circ$$

$$x^2 + 5,042...x - 9,65 = 0$$

$$x = \frac{-5,042... \pm \sqrt{(5,042...)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9,65)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = 1,4796... \quad \text{tai} \quad x = -6,5216...$$

$$x > 0 \quad x = 1,4796... \text{ (m)} \approx 1,5 \text{ (m)}$$

Vastaus: a) 9,3 cm b) 1,5 m

36. Merkitään kolmion kulmia α , β ja γ .

$$7,9^2 = 8,1^2 + 4,2^2 - 2 \cdot 8,1 \cdot 4,2 \cdot \cos \alpha$$

$$62,41 = 83,25 - 68,04 \cos \alpha$$

$$-68,04 \cos \alpha = -20,84$$

$$\cos \alpha = \frac{20,84}{68,04} = 0,3062\dots$$

$$\alpha = 72,164\dots^\circ \approx 72,2^\circ$$

$$\frac{8,1}{\sin \beta} = \frac{7,9}{\sin 72,164\dots^\circ}$$

$$7,9 \sin \beta = 8,1 \sin 72,164\dots^\circ \quad | :7,9$$

$$\sin \beta = 0,976\dots$$

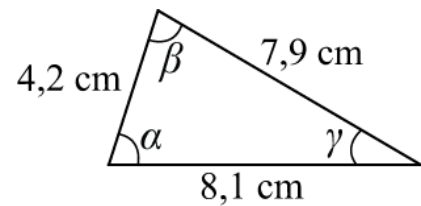
$$\beta = 77,43\dots^\circ \approx 77,4^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$= 180^\circ - 72,164\dots^\circ - 77,43\dots^\circ$$

$$= 30,403\dots^\circ$$

$$\approx 30,4^\circ$$



Vastaus: $72,2^\circ$, $77,4^\circ$, $30,4^\circ$

37.

$$x^2 = 4,1^2 + 3,2^2 - 2 \cdot 4,1 \cdot 3,2 \cdot \cos 50^\circ$$

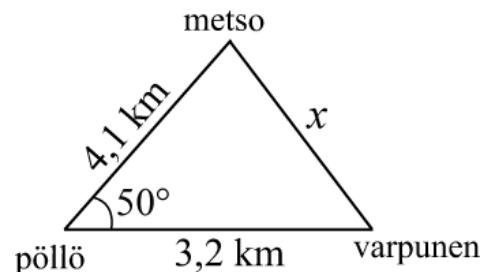
$$x^2 = 27,05 - 26,24 \cdot \cos 50^\circ$$

$$x^2 = 10,183\dots$$

$$x = \pm \sqrt{10,183\dots} \quad | x > 0$$

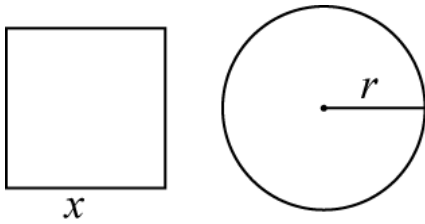
$$x = \sqrt{10,183\dots} \text{ (km)}$$

$$x = 3,191\dots \text{ (km)} \approx 3,2 \text{ (km)}$$



Vastaus: 3,2 km

38.



Olkoon ympyrän säde r . Tällöin $p = 2\pi r$.

Merkitään neliön sivun pituutta x .

Ympyrän kehän pituus on sama kuin neliön piiri ($4x$).

$$2\pi r = 4x \quad | :4$$

$$x = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$$

Ympyrän halkaisija on $2r$ ja neliön sivun pituus on siis $x = \frac{\pi r}{2}$.

$$\frac{\text{neliön sivun pituus}}{\text{ympyrän halkaisija}} = \frac{\frac{\pi r}{2}}{2r} = \frac{\pi \cancel{r}}{2} \cdot \frac{1}{2\cancel{r}} = \frac{\pi}{4} = 0,785... \approx 79\%$$

Vastaus: 79 %

39. Tasasivuisen kolmion kyljet ovat ympyrän tangentteja, joten tangentti $\perp$ ymp.säde r .

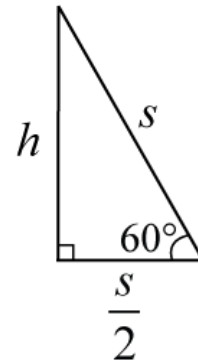
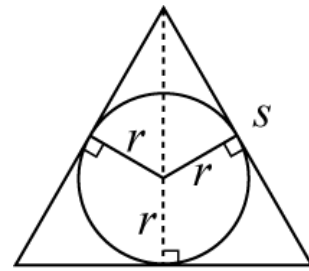
Lasketaan kolmion korkeus h .

$$h^2 + \frac{s^2}{4} = s^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4}s^2$$

$$h = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}s \quad | \quad h > 0$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$



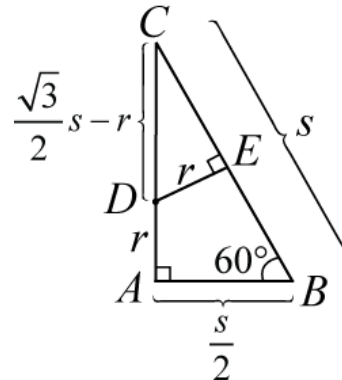
Muodostuu yhdenmuotoiset kolmiot $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (kk-lause):

$$\frac{s}{\frac{\sqrt{3}}{2}s - r} = \frac{\frac{s}{2}}{r}$$

$$sr = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 - \frac{s}{2}r$$

$$\frac{3}{2}sr = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 \quad | \quad : \frac{3}{2}s$$

$$r = \frac{\sqrt{3}s^{2-1}}{\cancel{4}_2} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}_6} = \frac{\sqrt{3}s}{6}$$



$$A_{\text{ympyrä}} = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}s}{6} \right)^2 = \frac{\pi \cdot \cancel{3}^1 s^2}{\cancel{36}_{12}} = \frac{\pi s^2}{12}$$

Vastaus: $\frac{\pi s^2}{12}$

40. Merkitään ympyrän sädettä r . $A_{\text{ympyrä}} = 150 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{ympyrä}} = 150 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\pi r^2 = 150 \quad | : \pi$$

$$r^2 = \frac{150}{\pi}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{150}{\pi}} \quad | r > 0$$

$$r = \sqrt{\frac{150}{\pi}} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} \text{ (cm)}$$

Kehän pituus

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} = \frac{10\sqrt{6}\pi^{1-\frac{1}{2}}}{\cancel{\sqrt{\pi}}} = 10\sqrt{6}\sqrt{\pi} = 10\sqrt{6\pi} \text{ (cm)} \\ &= 43,416... \text{ (cm)} \approx 43 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Vastaus: 43 cm

41. Piirretään mallikuva ylhäältä katsottuna.

$$R = 6370 \text{ km}$$

Merkitään satelliitin korkeutta maanpinnasta kirjaimella x .

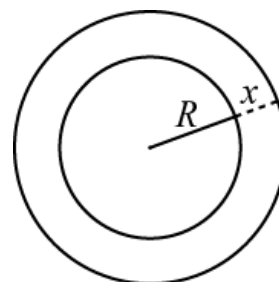
Satelliitin kierroksen pituus on

$$2\pi(R + x) = 95\,000$$

$$2\pi(6370 + x) = 95\,000 \quad | : 2\pi$$

$$6370 + x = \frac{95\,000}{2\pi}$$

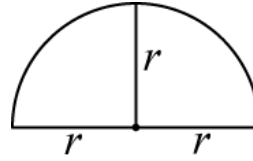
$$x = \frac{47\,500}{\pi} - 6370 = 8\,749,719... \text{ (km)} \approx 8\,750 \text{ (km)}$$



Vastaus: 8750 km

42. Piirretään mallikuva. Merkitään puoliympyrän sädettä r .

Puoliympyrän piiri on $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi r$.



Piiri on 168 cm, joten

$$\pi r = 168 \quad | : \pi$$

$$r = \frac{168}{\pi} \text{ (cm)}$$

Ikkunan ala on

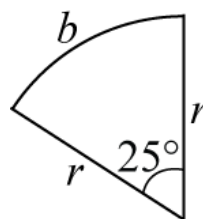
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{168}{\pi} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cancel{\pi} \cdot \frac{168^2}{\pi^{2-1}} \\ &= \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{14112}{\pi} \\ &= 4491,989... \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus: $44,9 \text{ dm}^2$

43. Piirretään mallikuva.

Keskuskulma on $\alpha = 25^\circ$.

Merkitään kaaren pituutta $b = 86$ cm ja ympyrän sädettä r .



$$b = 86$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = 86$$

$$\frac{25^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r = 86$$

$$\frac{5}{\cancel{72}} \cdot \frac{1}{\cancel{36}} \pi r = 86 \quad | \cdot 36$$

$$5\pi r = 3096 \quad | :5\pi$$

$$r = \frac{3096}{5\pi} = 197,097\dots$$

$$r = 197,097\dots \text{ cm} = 19,7097\dots \text{ dm} \approx 20 \text{ dm}$$

Ympyrän kehän pituus

$$p = 2\pi r = 2\cancel{\pi} \cdot \frac{3096}{5\cancel{\pi}} = \frac{6192}{5} = 1238,4 \text{ (cm)}$$

$$p = 1238,4 \text{ cm} = 12,384 \text{ m} \approx 12 \text{ m}$$

Vastaus: säde 20 dm, kehän pituus 12 m

44. Merkitään sektorin keskuskulmaa $\alpha = 53^\circ$. Sektorin ala on 38 cm^2 .

$$A = 38$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = 38$$

$$\frac{53^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = 38 \quad | \cdot 360^\circ$$

$$53^\circ \cdot \pi r^2 = 13680^\circ \quad | : 53^\circ \pi$$

$$r^2 = \frac{13680^\circ}{53^\circ \pi} = \frac{13680}{53\pi}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{13680}{53\pi}} \quad | r > 0$$

$$r = \sqrt{\frac{13680}{53\pi}} = 9,064... \text{ (cm)} \approx 9,1 \text{ (cm)}$$

Vastaus: 9,1 cm

45. $r = 15 \text{ mm}$

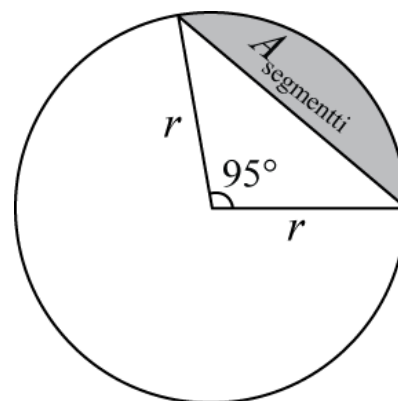
Segmentin ala saadaan, kun sektorin ($\alpha = 95^\circ$) alasta A_1 vähennetään keskuskolmion ala A_2 .

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{95^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 15^2 \\ &= \frac{19}{72} \pi \cdot 225 = \frac{4275}{72} \pi = \frac{475}{8} \pi \text{ (mm}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 15^2 \cdot \sin 95^\circ = \frac{225}{2} \cdot \sin 95^\circ \text{ (mm}^2\text{)}$$

$$A_{\text{segmentti}} = A_1 - A_2$$

$$= \frac{475}{8} \pi - \frac{225}{2} \cdot \sin 95^\circ \text{ (mm}^2\text{)} = 74,4601... \text{ (mm}^2\text{)} \approx 74 \text{ (mm}^2\text{)}$$

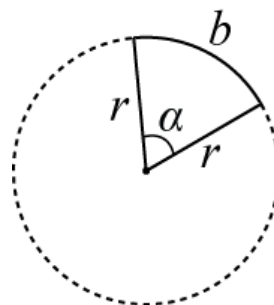


Vastaus: 74 mm^2

46. Merkitään ympyrän sädettä r ja sektorin keskuskulmaa α ja kaaren pituutta b . Piirretään mallikuva.

Sektorin piiri on

$$\begin{aligned} b + 2r &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r + 2r \\ &= 2r \left(\frac{\alpha}{360^\circ} \pi + 1 \right) \end{aligned}$$



Ympyrän sektorin piiri on puolet ympyrän kehästä eli

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi r = 2r \left(\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi + 1 \right)$$

$$\pi r = 2r \left(\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi + 1 \right) \quad | :r$$

$$\pi = 2 \left(\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi + 1 \right)$$

$$\frac{\alpha}{180^\circ} \pi + 2 = \pi \quad | \cdot 180^\circ$$

$$\alpha \pi + 360^\circ = \pi \cdot 180^\circ$$

$$\alpha \pi = \pi \cdot 180^\circ - 360^\circ \quad | : \pi$$

$$\alpha = \frac{\cancel{\pi} \cdot 180^\circ}{\cancel{\pi}} - \frac{360^\circ}{\pi} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\pi} = 65,408...^\circ$$

$$\frac{A_{\text{sektori}}}{A_{\text{ympyrä}}} = \frac{\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{\pi}}{360^\circ} = \frac{\cancel{360^\circ} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)}{\cancel{360^\circ}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} = 0,18169... \approx 18\%$$

Vastaus: 18 %

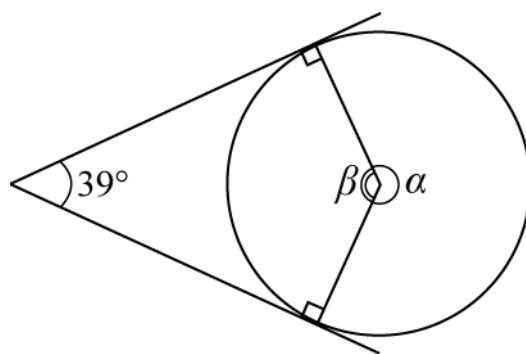
47. a) Tangenttikulman ja keskuskulman summa on 180° .

$$\beta + 39^\circ = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 39^\circ = 141^\circ$$

Tällöin

$$\alpha = 360^\circ - \beta = 360^\circ - 141^\circ = 219^\circ$$



- b) $\triangle AOB$ on tasakylkinen (kyljen pituus on ympyrän säde a), joten kantakulmat ovat yhtä suuret, 50° . Merkitään keskuskulmaa β .

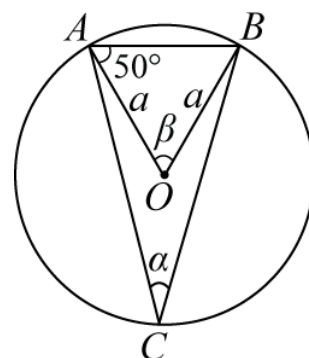
$\triangle AOB$ saadaan siis

$$2 \cdot 50^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

Kulma α on kulmaa β vastaava kehäkulma,

$$\text{joten } \alpha = \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ.$$



Vastaus: a) 219° b) 40°

48. Kaarta AB vastaava kehäkulma olkoon γ .

Kaarta AB vastaava keskuskulma on 180° , joten $\gamma = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$

Tiedetään, että $\alpha : \beta = 2 : 3$, joten merkitään

$$\alpha = 2x \text{ ja } \beta = 3x.$$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ kolmion kulmien summana.

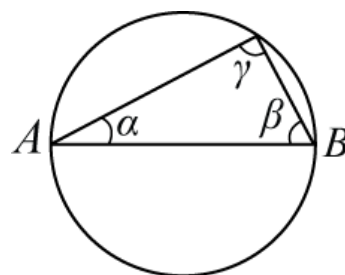
$$2x + 3x + 90^\circ = 180^\circ$$

$$5x = 90^\circ$$

$$x = 18^\circ$$

$$\alpha = 2x = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ \text{ ja } \beta = 3x = 3 \cdot 18^\circ = 54^\circ$$

Vastaus: $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 54^\circ$



49. Piirretään tilannekuva: Maapallo ylhäältä katsottuna.

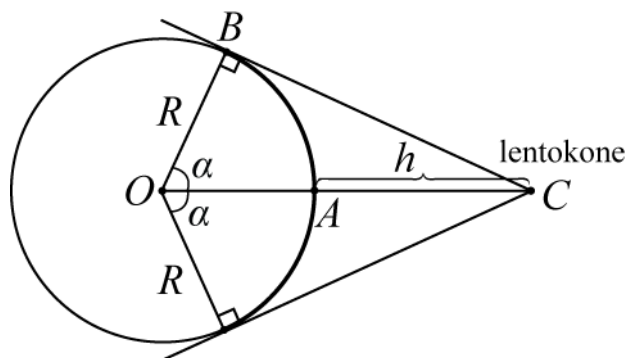
$$R = 6370 \text{ km}$$

$$h = 11000 \text{ m} = 11 \text{ km}$$

Piirretään tangentit

Maapallolle kuvan

osoittamalla tavalla. Päiväntasaajasta näkyy kaaren AB pituus. Määritetään ensin kulma α .



$$\cos \alpha = \frac{R}{R + 11 \text{ km}} = \frac{6370 \text{ km}}{6381 \text{ km}}$$

$$\alpha = 3,364...^\circ$$

Kaaren AB pituus

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R &= \frac{3,364...^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370 \text{ km} \\ &= 374,08... \text{ km} \\ &\approx 370 \text{ km} \end{aligned}$$

Vastaus: 370 km

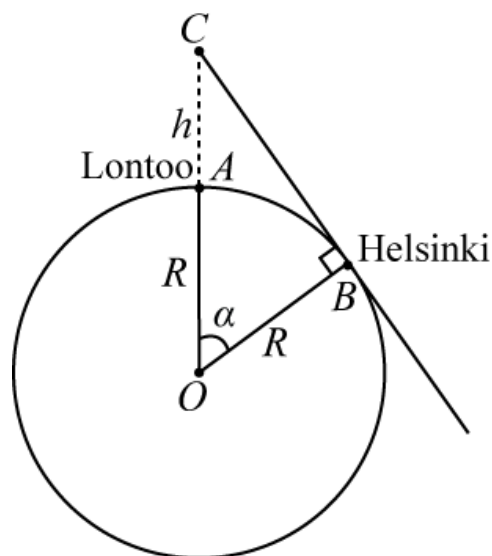
50. Piirretään mallikuva. Olkoon piste C satelliitin sijainti ja h sen korkeus maan pinnasta.

$$p = 40\,000 \text{ km} \quad R = \frac{p}{2\pi} = \frac{40\,000 \text{ km}}{2\pi} = \frac{20\,000}{\pi} \text{ km}$$

Kaaren AB pituus on 1900 km .

Lasketaan keskuskulma α .

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R &= 1900 \text{ (km)} \\ \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \cancel{\pi} \cdot \frac{20\,000}{\cancel{\pi}} &= 1900 \\ \frac{20\,000\alpha}{180^\circ} &= 1900 \quad | \cdot 180^\circ \\ 20\,000\alpha &= 342\,000^\circ \quad | : 20\,000 \\ \alpha &= \frac{342\,000^\circ}{20\,000} = 17,1^\circ \end{aligned}$$



$\triangle OBC$ on suorakulmainen, joten

$$\cos \alpha = \frac{R}{R+h} \quad | \cdot (R+h)$$

$$(R+h)\cos \alpha = R$$

$$R\cos \alpha + h\cos \alpha = R$$

$$h\cos \alpha = R - R\cos \alpha \quad | : \cos \alpha \neq 0$$

$$h = \frac{R - R\cos \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{R}{\cos \alpha} - R$$

$$= \frac{\frac{20\,000}{\pi}}{\cos 17,1^\circ} - \frac{20\,000}{\pi} = 294,447... \text{ (km)} \approx 290 \text{ (km)}$$

Vastaus: 290 km

51. Avaruuslävistäjän pituus

$$d = \sqrt{15^2 + 22^2 + 18^2} = \sqrt{1033} = 32,14\dots$$

Vastaus: 32 cm

52. Avaruuslävistäjän pituus

$$d = \sqrt{25^2 + 14,1^2 + 17,3^2} = \sqrt{1123,1}$$

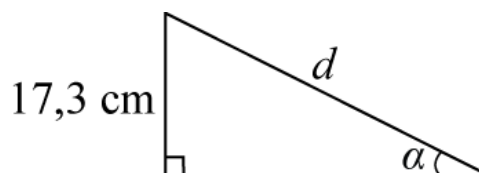
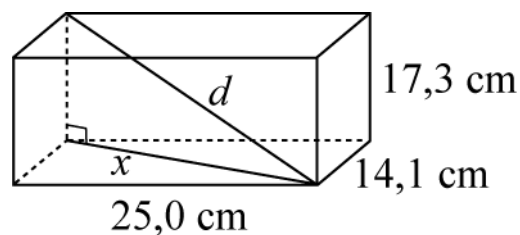
Kulma muodostuu tasolle, joka kulkee avaruuslävistäjän ja pohjan lävistäjän x kautta.

Kysytty kulma α saadaan yhtälöstä

$$\sin \alpha = \frac{17,3}{d} = \frac{17,3}{\sqrt{1123,1}}$$

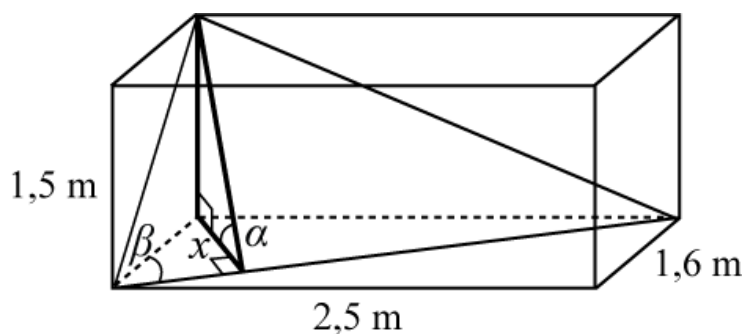
$$\alpha = 31,079\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 31^\circ$$



Vastaus: 31°

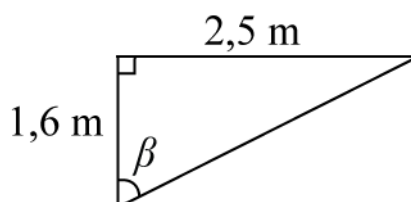
53. Tasojen välinen kulma α muodostuu tasojen normaalitasolle.



Sivun x pituuden selvittämiseksi ratkaistaan ensin kulma β .

$$\tan \beta = \frac{2,5}{1,6}$$

$$\beta = 57,380\dots^\circ$$

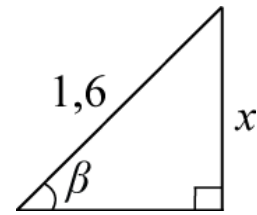


Sivun x pituus saadaan yhtälöstä

$$\sin \beta = \frac{x}{1,6}$$

$$x = 1,6 \cdot \sin \beta$$

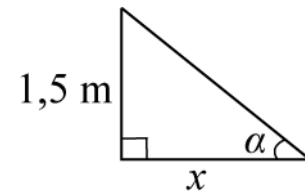
$$x = 1,6 \cdot \sin 57,380\dots^\circ = 1,347\dots$$



Tasojen välinen kulma α saadaan yhtälöstä

$$\tan \alpha = \frac{1,5}{x} = \frac{1,5}{1,347\dots}$$

$$\alpha = 48,06\dots^\circ \approx 48^\circ$$



Vastaus: 48°

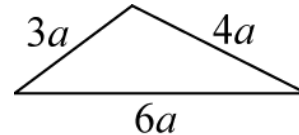
54. Kolmion sivujen pituudet ovat $3a$, $4a$ ja $6a$.

Koska piiri on 26 cm, saadaan yhtälö

$$3a + 4a + 6a = 26$$

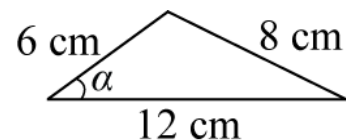
$$13a = 26 \quad | :13$$

$$a = 2$$



Kolmion sivujen pituudet ovat $3 \cdot 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$, $4 \cdot 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$ ja $6 \cdot 2 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$.

Alan laskemiseksi tarvitaan yksi kolmion kulmista.



$$8^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos \alpha$$

$$64 = 180 - 144 \cos \alpha$$

$$144 \cos \alpha = 116 \quad | :144$$

$$\cos \alpha = \frac{116}{144}$$

$$\alpha = 36,336\dots^\circ$$

Kolmion ala

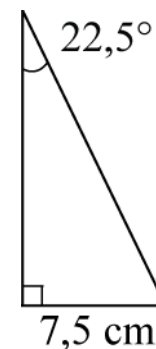
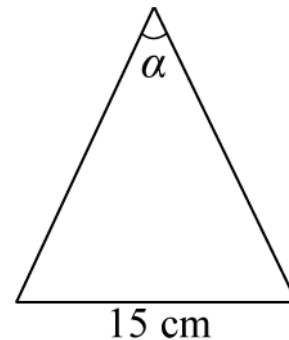
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} \cdot \sin 36,336...^\circ \\ &= 21,330... \text{ cm}^2 \\ &\approx 21 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 21 cm^2

55. Säännöllinen kahdeksankulmio koostuu kahdeksasta tasakylkisestä kolmiosta. Kolmion huippukulma $\alpha = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Puolitetaan kolmio korkeusjanalla ja lasketaan suorakulmaisen kolmion avulla tasakylkisen kolmion korkeus h .

$$\begin{aligned} \tan 22,5^\circ &= \frac{7,5}{h} & | \cdot h \\ h \tan 22,5^\circ &= 7,5 & | : \tan 22,5^\circ \\ h &= \frac{7,5}{\tan 22,5^\circ} \\ h &= 18,106... \end{aligned}$$



Kolmion ala

$$A_k = \frac{15 \text{ cm} \cdot 18,106... \text{ cm}}{2} = 135,799... \text{ cm}^2$$

Kahdeksankulmion ala

$$\begin{aligned} A &= 8 \cdot A_k \\ &= 8 \cdot 135,799... \text{ cm}^2 \\ &= 1086,396... \text{ cm}^2 \approx 1090 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 1090 cm^2

56. Pohjan lävistäjän pituus

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$

Sivusärmän ja pohjan välinen kulma saadaan yhtälöstä

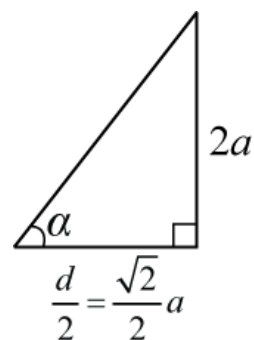
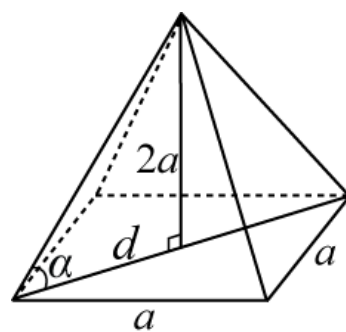
$$\tan \alpha = \frac{2\cancel{a}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{a}}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = 70,528\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 70,5^\circ$$

Vastaus: $70,5^\circ$



57. Merkitään pallon sädettä kirjaimella r .

Kolmiot ABC ja EDC ovat yhdenmuotoisia, koska molemmissa 90° kulma ja kulma C .

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC}$$

$$\frac{\frac{h}{4}}{r} = \frac{\sqrt{h^2 + \left(\frac{h}{4}\right)^2}}{h-r}$$

$$\frac{h}{4r} = \frac{\sqrt{h^2 + \frac{h^2}{16}}}{h-r}$$

$$\frac{h}{4r} = \frac{\sqrt{\frac{17}{16}h^2}}{h-r}$$

$$\frac{h}{4r} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{4}h}{h-r}$$

$$h(h-r) = 4r \cdot \frac{\sqrt{17}}{4}h$$

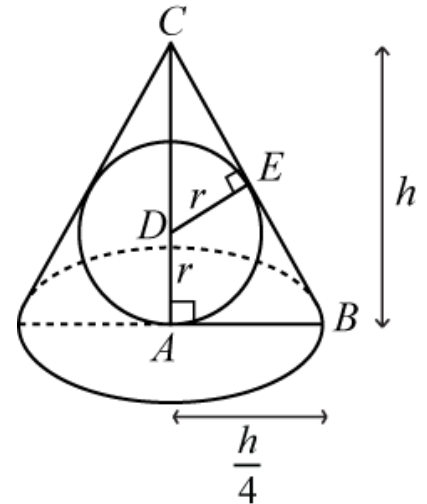
$$h^2 - hr = \sqrt{17}rh$$

$$h^2 = \sqrt{17}rh + rh$$

$$(\sqrt{17} + 1)rh = h^2 \quad \left| :(\sqrt{17} + 1)h \neq 0 \right.$$

$$r = \frac{h^2}{(\sqrt{17} + 1)h} = \frac{h}{\sqrt{17} + 1}$$

Vastaus: $r = \frac{h}{\sqrt{17} + 1}$



58. Pohjaympyrän säde

$$r = \frac{5,8 \text{ dm}}{2} = 2,9 \text{ dm}$$

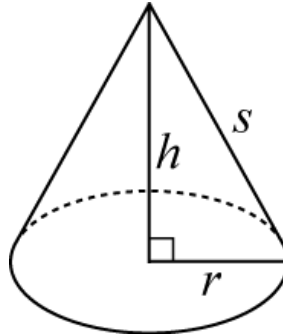
Sivujanen pituus

$$s^2 = h^2 + r^2$$

$$s^2 = \sqrt{7,2^2 + 2,9^2}$$

$$s^2 = \sqrt{66,25}$$

$$s = 7,762 \text{ (dm)}$$



Kartion vaipan ala

$$A_v = \pi r s = \pi \cdot 2,9 \text{ dm} \cdot 7,762 \dots \text{ dm} = 70,717 \dots \text{ dm}^2 \approx 71 \text{ dm}^2$$

Kokonaispinta-ala

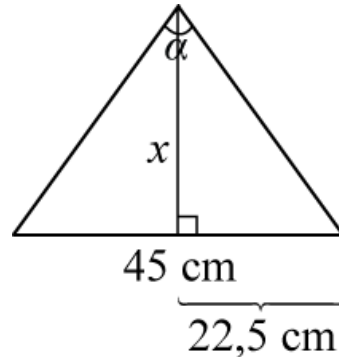
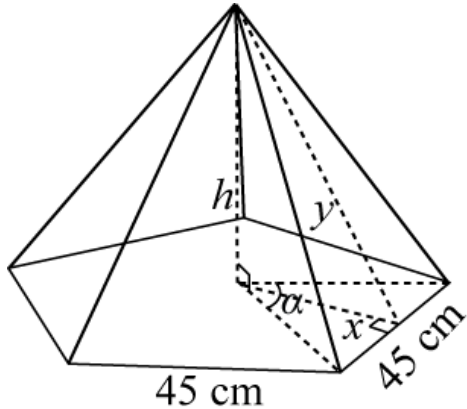
$$A = \pi r^2 + A_v$$

$$= \pi \cdot 2,9^2 + 70,717 \dots$$

$$= 97,138 \dots \text{ (dm}^2\text{)}$$

Vastaus: vaipan ala 71 dm^2 , kokonaispinta-ala 97 dm^2

59. Säännöllinen viisikulmio muodostuu tasakylkisistä kolmioista, joiden huippukulma $\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.



Kolmion korkeus saadaan yhtälöstä

$$\tan 36^\circ = \frac{22,5}{x} \quad | \cdot x$$

$$x \cdot \tan 36^\circ = 22,5 \quad | : \tan 36^\circ$$

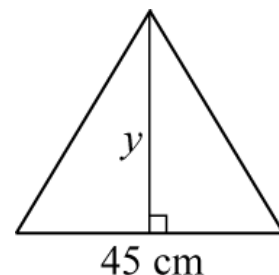
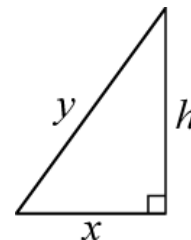
$$x = \frac{22,5}{\tan 36^\circ} = 30,968\dots$$

Sivutahkona olevan kolmion korkeus y saadaan kartion sisälle muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$y^2 = h^2 + x^2$$

$$y = \sqrt{55^2 + 30,968\dots^2}$$

$$y = \sqrt{3984,053\dots} = 63,119\dots$$



Yhden sivutahkon ala

$$A_k = \frac{45 \text{ cm} \cdot 63,119\dots \text{ cm}}{2} = 1420,185\dots \text{ cm}^2$$

Vaipan ala

$$A = 5 \cdot A_k = 5 \cdot 1420,185\dots \text{ cm}^2 = 7100,928\dots \text{ cm}^2 \approx 71 \text{ dm}^2$$

Vastaus: 71 dm^2

60. Pallon ala $A_p = 4\pi r^2$

Kuution ala $A_k = 6a^2$

$$A_p = A_k$$

$$4\pi r^2 = 6a^2 \mid :4\pi$$

$$r^2 = \frac{3}{2\pi} a^2$$

$$r = \sqrt{\frac{3}{2\pi} a^2} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} a$$

Pallon halkaisija $d = 2r = 2a\sqrt{\frac{3}{2\pi}}$

Halkaisijan suhde särmän pituuteen

$$\frac{d}{a} = \frac{2\cancel{a}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}}{\cancel{a}} = 2\sqrt{\frac{3}{2\pi}} = 1,3819... = 138,19... \%$$

Vastaus: 38 % suurempi

61. $r = s - 3$

Vaipan ala

$$A_v = \pi r s$$

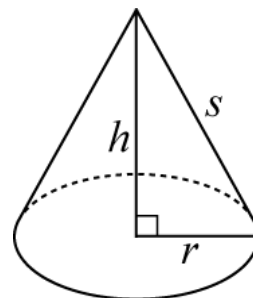
$$= \pi(s - 3)s$$

$$= \pi s^2 - 3\pi s$$

Saadaan yhtälö

$$\pi s^2 - 3\pi s = 1070$$

$$\pi s^2 - 3\pi s - 1070 = 0$$



$$s = \frac{-(-3\pi) \pm \sqrt{(-3\pi)^2 - 4 \cdot \pi \cdot (-1070)}}{2\pi}$$

$$s = \frac{3\pi \pm \sqrt{9\pi^2 + 4280\pi}}{2\pi}$$

$$s = \frac{3\pi + \sqrt{9\pi^2 + 4280\pi}}{2\pi} = 20,015...$$

tai

$$s = \frac{3\pi - \sqrt{9\pi^2 + 4280\pi}}{2\pi} = -17,015... \text{ ei käy}$$

Pohjaympyrän säde

$$r = s - 3 = 20,015... - 3 = 17,015...$$

Kartion korkeus saadaan Pythagoraan lauseella.

$$s^2 = h^2 + r^2$$

$$h^2 = s^2 - r^2$$

$$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{20,015...^2 - 17,015...^2} = \sqrt{111,095...} = 10,540... \text{ (cm)}$$

Vastaus: Korkeus on 11 cm.

62. Pallon säde $r_p = 18 \text{ cm}$ Kalotin ala $A = 2\pi r_p h$

Lasketaan kalotin korkeus h_1 .

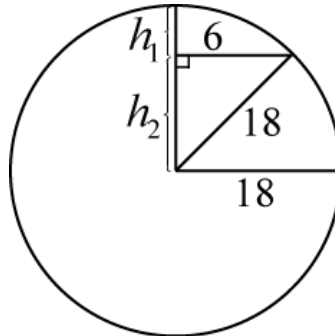
Pythagoraan lause:

$$18^2 = 6^2 + h_2^2$$

$$h_2^2 = 18^2 - 6^2$$

$$h_2^2 = 288$$

$$h_2 = \sqrt{288} = 16,97...$$



$$\text{Kalotin korkeus } h_1 = 18 - h_2 = 18 - \sqrt{288} = 1,029...$$

$$\text{Kalotin ala } A = 2\pi \cdot 18 \text{ cm} \cdot 1,029... \text{ cm} = 116,42... \text{ cm}^2 \approx 116 \text{ cm}^2$$

Vastaus: 116 cm^2

63. Pohjan piiri $p = 2\pi r$

$$\text{Vaipan ala } A_v = p \cdot 2r = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

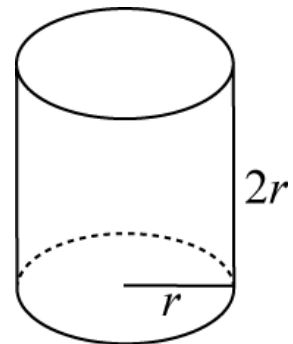
$$\text{Kokonaispinta-ala } A = 2 \cdot \pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2$$

Saadaan yhtälö

$$6\pi r^2 = 2500 \quad | :6\pi$$

$$r^2 = \frac{2500}{6\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{2500}{6\pi}}$$



Lieriön korkeus

$$2r = 2 \cdot \sqrt{\frac{2500}{6\pi}} = 23,03... \text{ (cm)}$$

Vastaus: 23 cm

64. Tiheys $\rho = \frac{m}{V}$, joten $V\rho = m$ eli $V = \frac{m}{\rho}$

Jääkuution massa $m = 17,3 \text{ g} = 0,0173 \text{ kg}$

Tiheys $0,917 \text{ kg/l} = 0,917 \text{ kg/dm}^3$

Tilavuus $V = \frac{0,0173 \text{ kg}}{0,917 \text{ kg/dm}^3} = 0,0188... \text{ dm}^3$

Kuution särmän pituus on $x \text{ dm}$. Tällöin

$$x^3 = 0,0188...$$

$$x = \sqrt[3]{0,0188...} = 0,2662... \text{ (dm)}$$

$$0,2662... \text{ dm} = 2,662... \text{ cm} \approx 26,6 \text{ mm}$$

Vastaus: 26,6 mm

65. Tangon pituus $h = 1,5 \text{ m} = 15 \text{ dm}$

Tangon säde $r = \frac{1,9 \text{ cm}}{2} = 0,95 \text{ cm} = 0,095 \text{ dm}$

Tangon tilavuus $V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 0,095^2 \cdot 15 = 0,425... \text{ (dm}^3\text{)}$

Pallon säde $r_2 = 14 \text{ cm} = 1,4 \text{ dm}$

Pallojen tilavuus $V_2 = 2 \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = 2 \cdot \frac{4\pi \cdot 1,4^3}{3} = 22,988... \text{ (dm}^3\text{)}$

Yhteistilavuus

$$V = V_1 + V_2 = 0,425... \text{ dm}^3 + 22,988... \text{ dm}^3 = 23,413... \text{ dm}^3$$

$\rho = \frac{m}{V}$, joten massa

$$m = \rho V = 7,8 \text{ kg/dm}^3 \cdot 23,413... \text{ dm}^3 = 182,624... \text{ kg}$$

Vastaus: 180 kg

66.

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \\
 &= \frac{190^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 8,0 \text{ cm} \\
 &= 26,529... \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Kaaren b pituus on sama kuin kartion pohjan piiri.

$$\begin{aligned}
 2\pi r &= 26,529... \text{ cm} \quad | :2\pi \\
 r &= \frac{26,529... \text{ cm}}{2\pi} \\
 r &= 4,222... \text{ cm}
 \end{aligned}$$

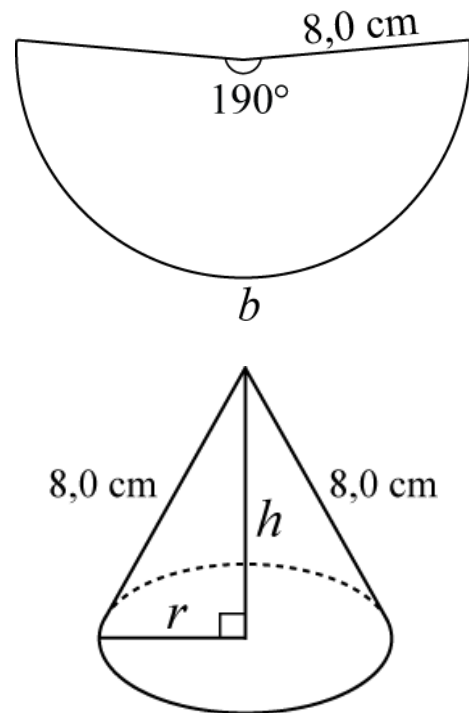
Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseella:

$$\begin{aligned}
 h^2 + r^2 &= 8,0^2 \\
 h^2 &= 8,0^2 - r^2 \\
 h^2 &= 8,0^2 - 4,222...^2 \\
 h &= \sqrt{46,17...} = 6,795... \text{ (cm)}
 \end{aligned}$$

Kartion tilavuus

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\pi r^2 h}{3} \\
 &= \frac{\pi \cdot 4,222...^2 \cdot 6,795...}{3} \\
 &= 126,85... \approx 130 \text{ (cm}^3\text{)}
 \end{aligned}$$

Vastaus: 130 cm^3



67. r = lieriön pohjaympyrän säde
 a = kuution särmä

$$V_{\text{kuutio}} = a^3$$

Lieriön pohjaympyrän halkaisija $2r = a$, joten

$$V_{\text{kuutio}} = (2r)^3 = 8r^3$$

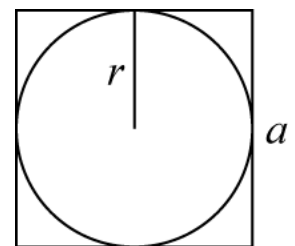
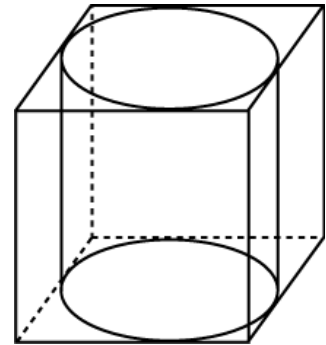
Lieriön tilavuus

$$\begin{aligned} V_{\text{lieriö}} &= \pi r^2 \cdot a \\ &= \pi r^2 \cdot 2r \\ &= 2\pi r^3 \end{aligned}$$

Tilavuuksien suhde

$$\frac{V_{\text{lieriö}}}{V_{\text{kuutio}}} = \frac{2\pi \cancel{r^3}}{8\cancel{r^3}} = \frac{2\pi}{8} = 0,785... \approx 79\%$$

Vastaus: 79 %



68. Pythagoraan lauseella saadaan

$$r^2 = 2,5^2 + (r - 3)^2$$

$$r^2 = 6,25 + r^2 - 6r + 9$$

$$6r = 15,25 \quad | :6$$

$$r = 2,5416... \text{ (cm)}$$

Koko pallon tilavuus

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{4\pi r^3}{3} \\ &= \frac{4\pi \cdot 2,5416...^3}{3} \\ &= 68,77... \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

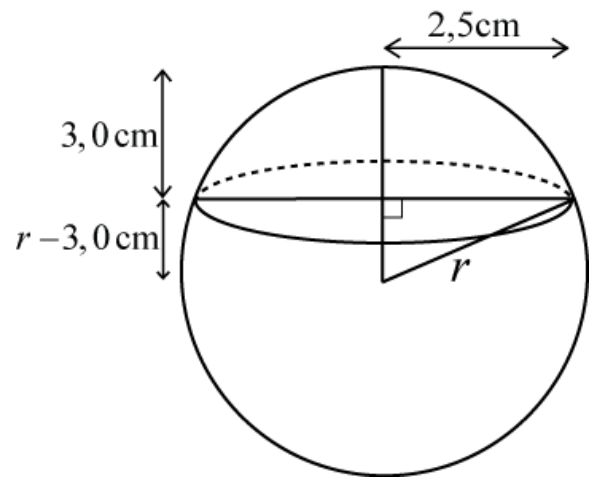
Segmentin tilavuus

$$\begin{aligned} V_s &= \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) \\ &= \pi \cdot 3^2 \cdot \left(2,5416... - \frac{3,0}{3} \right) \\ &= 9\pi (2,5416... - 1) \\ &= 43,589... \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Tilavuuksien suhde

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{43,589... \text{ cm}^3}{68,77... \text{ cm}^3} = 0,6337... \approx 63\%$$

Vastaus: 63 %

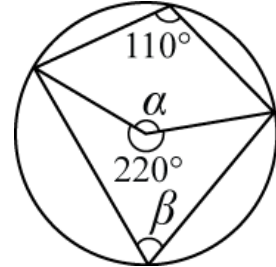


Testi 1

1. a) Kehäkulmaa 110° vastaava keskuskulma on
 $2 \cdot 110^\circ = 220^\circ$

Kulma β on kulmaa α vastaava kehäkulma,

$$\text{joten } \beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$



- b) Tapa 1: Jatketaan kulman γ toista kylkeä.

Koska $s \parallel t$, niin $\alpha = 45^\circ$

samankohtaisena kulmana.

Kulma $\beta = 50^\circ$ ristikulmana.

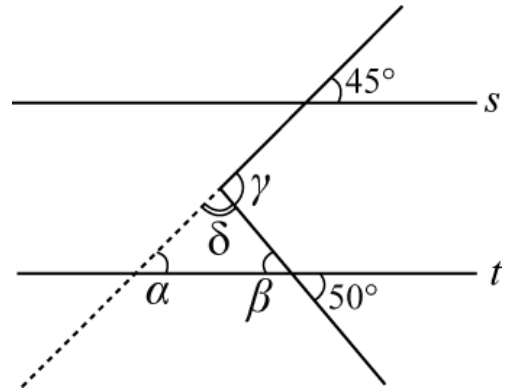
Muodostuu kolmio, jonka kulma

$$\begin{aligned} \delta &= 180^\circ - \alpha - \beta \\ &= 180^\circ - 45^\circ - 50^\circ \\ &= 85^\circ \end{aligned}$$

Kulma γ ja δ ovat vieruskulmia,

joten

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - \delta \\ &= 180^\circ - 85^\circ \\ &= 95^\circ \end{aligned}$$



Tapa 2: Piirretään suorien s ja t
 kanssa yhdensuuntainen suora n .

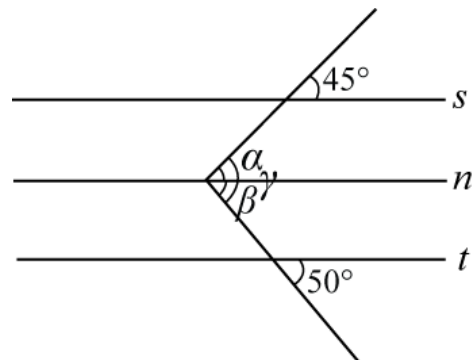
Samankohtaisina kulmina

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 50^\circ$$

Tällöin

$$\gamma = \alpha + \beta = 45^\circ + 50^\circ = 95^\circ$$



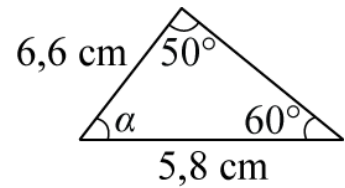
Vastaus: a) $\alpha = 140^\circ$, $\beta = 70^\circ$ b) $\gamma = 95^\circ$

2. a) Lasketaan ensin kulma α .

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6,6 \cdot 5,8 \cdot \sin 70^\circ = 17,985... \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\approx 18 \text{ (cm}^2\text{)}$$

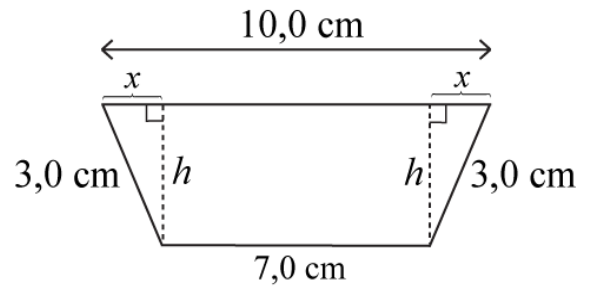


- b) Merkitään korkeutta kirjaimella h .
Korkeuden laskemiseksi tarvitaan
pituus x . Koska kuvio on
tasakylkinen puolisuunnikas, niin

$$2x + 7,0 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

$$2x = 3,0 \text{ cm} \quad | :2$$

$$x = 1,5 \text{ cm}$$



Pythagoraan lauseella saadaan

$$x^2 + h^2 = 3,0^2$$

$$h^2 = 9 - x^2$$

$$h^2 = 9 - 1,5^2$$

$$h^2 = 6,75$$

$$h = \pm \sqrt{6,75} \quad | h > 0$$

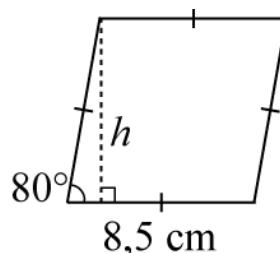
$$h = \sqrt{6,75} \text{ (cm)}$$

$$A = \frac{10,0 \text{ cm} + 7,0 \text{ cm}}{2} \cdot \sqrt{6,75} \text{ cm} = 22,083... \text{ cm}^2 \approx 22 \text{ cm}^2$$

c) Lasketaan korkeus h

$$\sin 80^\circ = \frac{h}{8,5 \text{ cm}}$$

$$h = 8,5 \text{ cm} \cdot \sin 80^\circ$$



$$A = 8,5 \text{ cm} \cdot \overbrace{8,5 \text{ cm} \cdot \sin 80^\circ}^h = 71,152... \text{ cm}^2 \approx 71 \text{ cm}^2$$

Vastaus: a) 18 cm^2 b) 22 cm^2 c) 71 cm^2

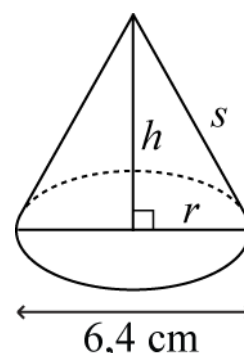
3. Kartion korkeus $h = 4,7 \text{ cm}$

Kartion pohjaympyrän säde $r = \frac{6,4 \text{ cm}}{2} = 3,2 \text{ cm}$

Merkitään kartion sivujanaa kirjaimella s .

a) Kartion tilavuus

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3,2 \text{ cm})^2 \cdot 4,7 \text{ cm} \\ &= 50,399... \text{ cm}^3 \approx 50 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



Kokonaispinta-ala $A_{\text{koko}} = A_{\text{vaippa}} + A_{\text{pohja}}$

Vaipan ala laskemiseksi tarvitaan kartion sivujanen s . Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$s^2 = r^2 + h^2$$

$$s^2 = 3,2^2 + 4,7^2$$

$$s^2 = 32,33$$

$$s = \pm \sqrt{32,33} \quad | \quad s > 0$$

$$s = \sqrt{32,33} \text{ (cm)}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{koko}} &= \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3,2 \text{ cm} \cdot \sqrt{32,33} \text{ cm} + (3,2 \text{ cm})^2 \\ &= 89,331... \text{ cm}^2 \approx 89 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } V_{\text{Sanni}} = \frac{1}{2} \cdot V_{\text{Joonas}}$$

Kartiot ovat yhdenmuotoiset ja tilavuuksien suhde on siis

$$\frac{V_{\text{Sanni}}}{V_{\text{Joonas}}} = \frac{1}{2}$$

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio, joten

$$k^3 = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Tällöin

$$\frac{h_{\text{Sanni}}}{h_{\text{Joonas}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$h_{\text{Sanni}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot h_{\text{Joonas}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot 4,7 \text{ cm}$$

$$= 3,730... \text{ cm} \approx 3,7 \text{ cm}$$

Vastaus: a) 50 cm^3 , 89 cm^2 b) $3,7 \text{ cm}$

4. a) Merkitään kysytyn sivun pituutta x .

Kosinilauseella saadaan

$$x^2 = 2,6^2 + 9,3^2 - 2 \cdot 2,6 \cdot 9,3 \cdot \cos 65^\circ$$

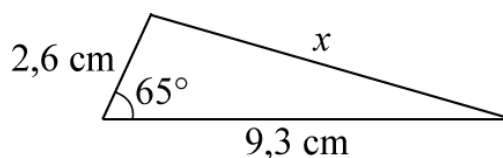
$$x^2 = 93,25 - 48,36 \cdot \cos 65^\circ$$

$$x^2 = 72,812...$$

$$x = \pm \sqrt{72,812...} \quad | \quad x > 0$$

$$x = \sqrt{72,812...}$$

$$x = 8,533... \approx 8,5 \text{ (cm)}$$



b) Merkitään puuttuvia kulmia α ja β .

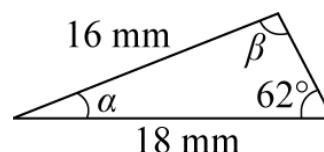
Lasketaan ensin kulma β sinilauseella.

$$\frac{18}{\sin \beta} = \frac{16}{\sin 62^\circ}$$

$$18 \cdot \sin \beta = 16 \cdot \sin 62^\circ \quad | :16$$

$$\sin \beta = \frac{16 \cdot \sin 62^\circ}{18} = 0,993...$$

$$\beta = 83,371...^\circ \approx 83^\circ$$



Myös kulman β suplementtikulmalla on sama sinin arvo eli kulma voi olla myös $180^\circ - \beta = 180^\circ - 83,371...^\circ = 96,628...^\circ \approx 97^\circ$.

Lasketaan kulman α suuruus:

$$\alpha = 180^\circ - 62^\circ - 83,371...^\circ = 34,628...^\circ \approx 35^\circ \text{ tai}$$

$$\alpha = 180^\circ - 62^\circ - 96,628...^\circ = 21,371...^\circ \approx 21^\circ$$

Vastaus:

a) 8,5 cm

b) Kolmion kulmat ovat 62° , 97° ja 21° tai 62° , 83° ja 35°

5. $R = 6380$ km

a) Merkitään kysyttyä kulmaa α .

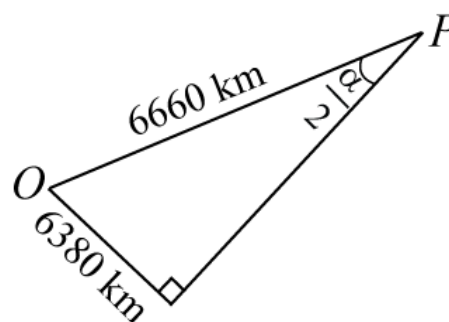
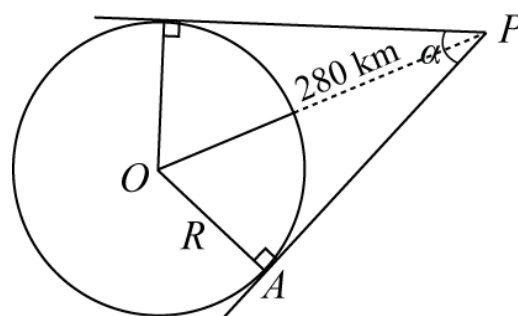
Jana OP puolittaa tangenttikulman α . Maapallon säde R on kohtisuorassa piirrettyä tangenttia vastaan.

Muodostuu suorakulmainen kolmio OAP .

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{6380 \text{ km}}{6660 \text{ km}} = 0,957...$$

$$\frac{\alpha}{2} = 73,327...^\circ \quad | \cdot 2$$

$$\alpha = 146,654...^\circ \approx 147^\circ$$



b) Keskuskulma

$$\begin{aligned}\beta &= 180^\circ - \alpha \\ &= 180^\circ - 146,654\dots^\circ \\ &= 33,345\dots^\circ\end{aligned}$$

Lasketaan muodostuvan keskuskolmion korkeus. Kolmio on tasakylkinen ja korkeus h puolittaa

keskuskulman $\frac{\beta}{2} = 16,672\dots^\circ$

$$\begin{aligned}\cos \frac{\beta}{2} &= \frac{h}{R} \\ h &= \cos 16,672\dots^\circ \cdot 6380 \text{ km} \\ h &= 6111,771\dots \text{ km}\end{aligned}$$

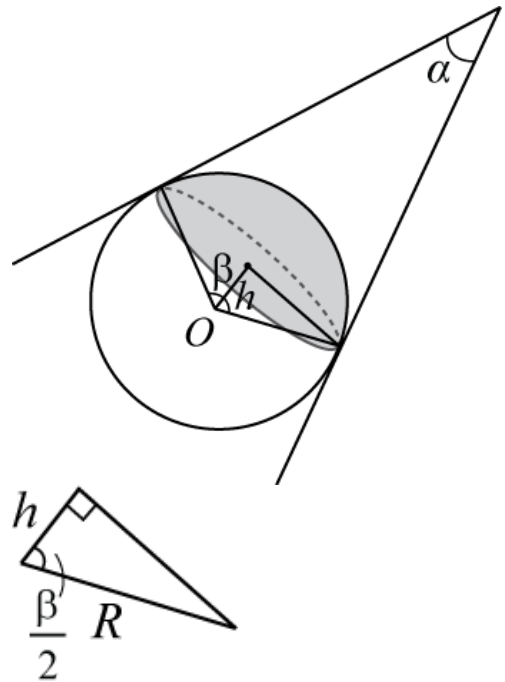
Kysytty alue on kalotti, jonka korkeus on

$$R - h = 6380 \text{ km} - 6111,771\dots \text{ km} = 268,228\dots \text{ km}.$$

Kalotin ala

$$\begin{aligned}A &= 2\pi Rh \\ &= 2\pi \cdot 6380 \text{ km} \cdot 268,228\dots \text{ km} \\ &= 10752390,49\dots \text{ km}^2 \\ &\approx 1075 \cdot 10^4 \text{ km}^2\end{aligned}$$

Vastaus: a) 147° b) $1075 \cdot 10^4 \text{ km}^2$



6. Pellon koko rajaviiva on 330 m.

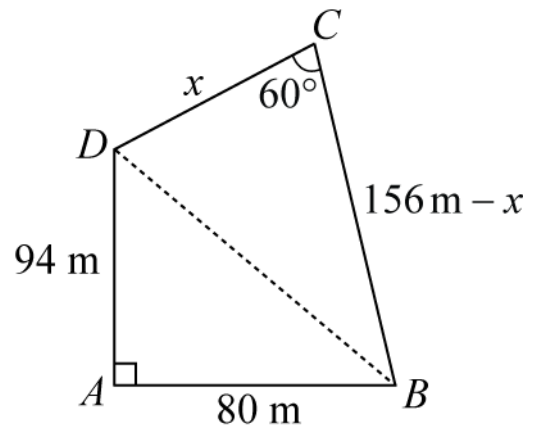
Lasketaan ensin pituus DB
suorakulmaisesta kolmiosta

$$|DB|^2 = 94^2 + 80^2$$

$$|DB| = \sqrt{15236} = 2\sqrt{3809}$$

Pelto muodostuu kahdesta kolmiosta $\triangle ABD$ ja $\triangle DBC$. Merkitään pellon sivun DC pituutta kirjaimella x (m), jolloin

$$|BC| = 330 \text{ m} - 80 \text{ m} - 94 \text{ m} - x = 156 \text{ m} - x$$



Kolmiosta DBC saadaan kosinilauseella

$$\left(\sqrt{15236}\right)^2 = x^2 + (156 - x)^2 - 2 \cdot x \cdot (156 - x) \cdot \overbrace{\cos 60^\circ}^{\frac{1}{2}}$$

$$15236 = x^2 + 24336 - 312x + x^2 - x(156 - x)$$

$$15236 = x^2 + 24336 - 312x - 156x + x^2$$

$$2x^2 - 468x + 9100 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 234x + 4550 = 0$$

$$x = \frac{234 \pm \sqrt{(-234)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4550}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{234 \pm \sqrt{36556}}{2} = \frac{234 \pm 2\sqrt{9139}}{2} = \frac{234}{2} \pm \frac{2\sqrt{9139}}{2} = 117 \pm \sqrt{9139}$$

$$x = 117 + \sqrt{9139} = 212,598... \text{ (m)} \quad \text{TAI} \quad x = 117 - \sqrt{9139} = 21,401... \text{ (m)}$$

Koska $|BC| = 156 - x$, niin $156 - x > 0$ eli $x < 156$, joten vain

$$x = 117 - \sqrt{9139} = 21,401... \text{ (m)} \text{ kelpaa.}$$

Rajaviivan CD pituus on

$$|CD| = x = 21,401... \text{ m} \approx 21 \text{ m}$$

Rajaviivan BC pituus on

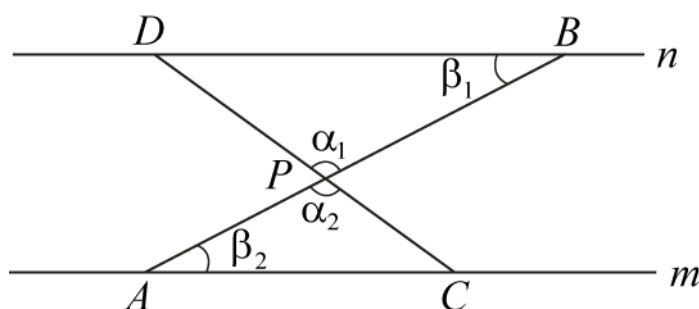
$$|BC| = 156 \text{ m} - 21,401... \text{ m} = 134,598... \text{ m} \approx 135 \text{ m}$$

(Yhteensä rajaviivan pituus oli $330 \text{ m} = 80 \text{ m} + 94 \text{ m} + 21 \text{ m} + 135 \text{ m}$)

Vastaus: $|CD| \approx 21 \text{ m}$ ja $|BC| \approx 135 \text{ m}$

Testi 2

1. a)



Kulma α_1 ja α_2 ovat ristikulmina yhtä suuret.

Kulmilla β_1 ja β_2 on sama suora vasempana kylkenä, joten ne ovat samankohtaisia kulmia. Koska $m \parallel n$, $\beta_1 = \beta_2$.

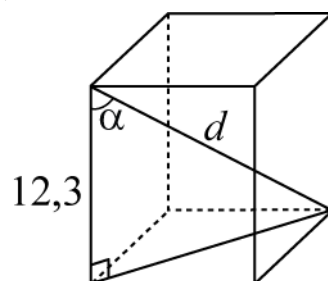
kk-lauseen mukaan $\triangle ACP \sim \triangle BDP$. Sivut AP ja PB ovat vastinsivuja, joten mittakaava on $1:3$. Tällöin pinta-alojen suhde on $(1:3)^2 = 1:9$.

b) $d = \sqrt{7,4^2 + 3,1^2 + 12,3^2} = 14,685... \approx 15 \text{ (m)}$

Lävistäjän ja pystysuoran sivusärmän välinen kulma saadaan suorakulmaisesta kolmiosta

$$\cos \alpha = \frac{12,3}{d} = \frac{12,3}{14,685...}$$

$$\alpha = 33,11...^\circ \approx 33^\circ$$



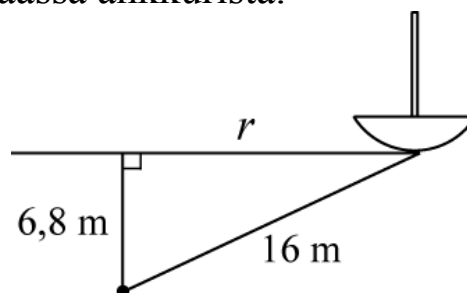
Vastaus: a) $1:9$ b) 15 m ja 33°

2. Purjeverene voi kauimmillaan olla 16 m päässä ankkurista.

$$16^2 = 6,8^2 + r^2$$

$$r^2 = 16^2 - 6,8^2$$

$$r = \sqrt{209,76} = 14,48\dots$$



Purjeverene voi liikkua vesialueella, jonka säde on 14,48... m eli

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (14,48\dots \text{ m})^2 = 658,98\dots \text{ m}^2 \approx 660 \text{ m}^2$$

Vastaus: 660 m^2

3. a) Kolmio ABC on tasakylkinen, joten korkeusjana puolittaa huippukulman C .

$$\beta = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$$

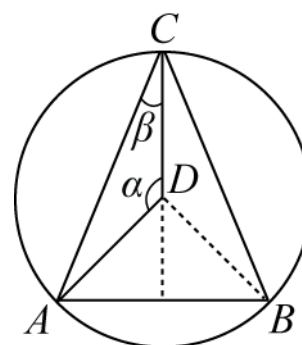
Kolmion ADC kahtena sivuna on ympyrän säteet, joten sekin on tasakylkinen. Kolmion kulmien summa:

$$2 \cdot 22,5^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 135^\circ$$

Kaaren pituus

$$b = \frac{135^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 15 \text{ cm} = 35,34\dots \text{ cm} \approx 35 \text{ cm}$$



- b) Ympyrän ala $A_y = \pi r^2$

Kolmio ABC koostuu kolmesta tasakylkisestä kolmiosta.

$$A_{ADC} = A_{BDC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin 135^\circ$$

$$A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin(360^\circ - 2 \cdot 135^\circ) = \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} r^2$$

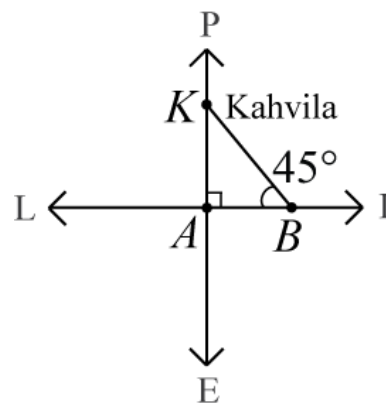
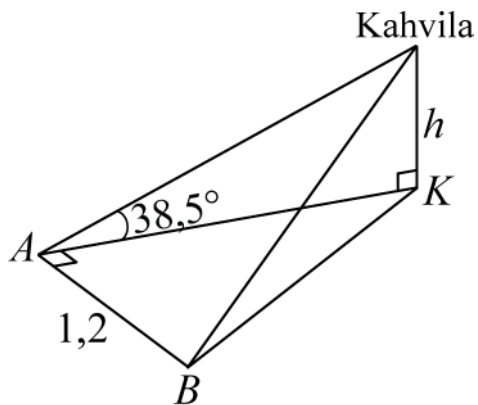
$$A_{\text{kolmio}} = 2 \cdot \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 135^\circ + \frac{1}{2} r^2 = r^2 \cdot \sin 135^\circ + \frac{1}{2} r^2 = r^2 \left(\sin 135^\circ + \frac{1}{2} \right)$$

Alojen suhde

$$\frac{A_{\text{ympyrä}}}{A_{\text{kolmio}}} = \frac{\pi \cancel{\text{m}^2}}{\cancel{\text{m}^2} \left(\sin 135^\circ + \frac{1}{2} \right)} = 2,6025... \approx 260\%$$

Vastaus: a) 135° , 35 cm b) 160 % suurempi

4.



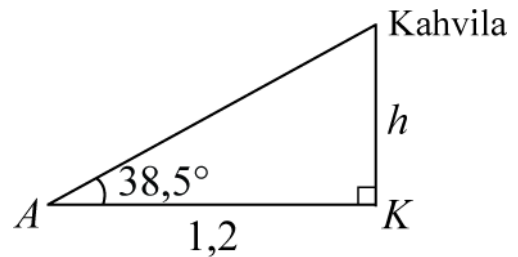
Kolmio ABK on suorakulmainen ja tasakylkinen kolmio (molemmat terävät kulmat 45°). Tällöin $|AB| = |AK| = 1,2 \text{ km}$

Kysytty korkeus saadaan suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\tan 38,5^\circ = \frac{h}{1,2} \quad | \cdot 1,2$$

$$h = 1,2 \cdot \tan 38,5^\circ$$

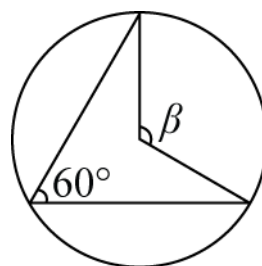
$$h = 0,9545... \text{ (km)}$$



Vastaus: 950 m

5. a) 60° kulma on kehäkulma. Sitä vastaava keskuskulma
 $\beta = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$

Kulma α on tangenttikulma. Koska
 $\alpha + \beta = 180^\circ$, on
 $\alpha = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$



b) Sektorin ala $A_s = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi a^2 = \frac{1}{3} \pi a^2$

Kolmion ala $A_k = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

Väritetyn segmentin ala $A = A_s - A_k = \frac{1}{3} \pi a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

Vastaus: a) 60° b) $\frac{1}{3} \pi a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

6. x = leikkaustason etäisyys
 h = pienemmän pyramidin korkeus
 s = sivutahkona olevan kolmion korkeus

Pyramidin pohjan ala
 $A_p = (5,0 \text{ m})^2 = 25 \text{ m}^2$

Vaipan ala

$$A_v = 4 \cdot \frac{5s}{2} = 10s$$

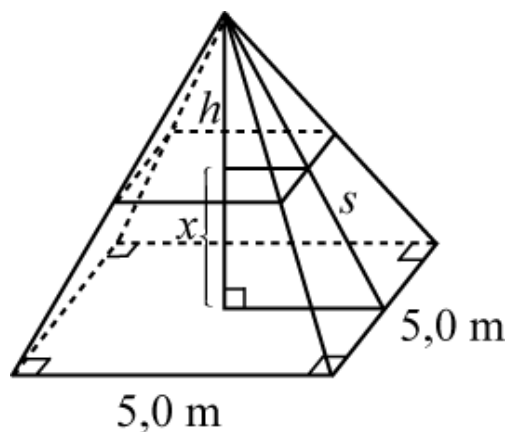
Saadaan yhtälö

$$A_p + A_v = 65$$

$$25 + 10s = 65$$

$$10s = 40 \quad | :10$$

$$s = 4$$



Pythagoraan lauseen mukaan

$$4^2 = 2,5^2 + CA^2$$

$$CA^2 = 4^2 - 2,5^2$$

$$CA = \sqrt{9,75}$$

Tilavuuksien suhde 1 : 2, joten mittakaava on

$$\left(\sqrt{1:2}\right)^3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$, koska

- molemmissa 90° kulma
- kulma C yhteinen

Tällöin

$$\frac{h}{h+x} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{h}{\sqrt{9,75}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\sqrt[3]{2}h = \sqrt{9,75} \quad | : \sqrt[3]{2}$$

$$h = \frac{\sqrt{9,75}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$x = CA - h = \sqrt{9,75} - \frac{\sqrt{9,75}}{\sqrt[3]{2}} = 0,6441... \text{ m} \approx 64 \text{ cm}$$

Vastaus: 64 cm

