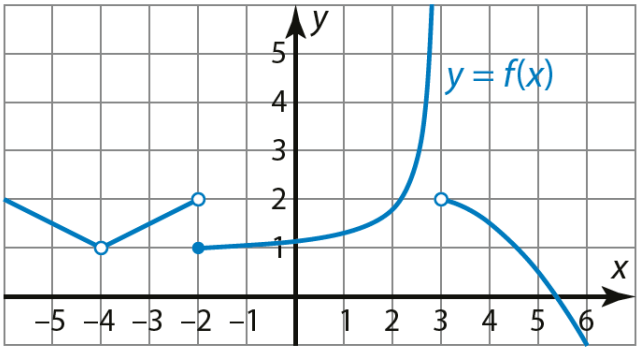
K1.



a) Kohdassa $x = -4$ kuvaajassa ei ole pistettä, joten $f(-4)$ ei ole olemassa.

Kohdassa $x = -2$ kuvaajan pisteen y-koordinaatti on 1, joten $f(-2) = 1$.

Kohdassa $x = 3$ kuvaajassa ei ole pistettä, joten $f(3)$ ei ole olemassa.

b) Kun x lähestyy kohtaa -4 kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua 1. Siis $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 1$.

Kun x lähestyy kohtaa -2 vasemmalta puolelta, funktion arvot lähestyvät lukua 2. Kun x lähestyy kohtaa -2 oikealta puolelta, funktion arvot lähestyvät lukua 1. Funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa -2.

Kun x lähestyy kohtaa 3 vasemmalta puolelta, funktion arvot kasvavat rajatta. Kun x lähestyy kohtaa 3 oikealta puolelta, funktion arvot lähestyvät lukua 2. Funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 3.

Vastaus

a) $f(-4)$ ei ole olemassa
$f(-2) = 1$
$f(3)$ ei ole olemassa

b) $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 1$
$\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ ei ole olemassa
$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ei ole olemassa

K2.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $f(x) = \dfrac{5x^2 - 23x - 10}{x^2 - 4x - 5}$.

a) Määritetään laskimella arvoja kohdan 5 molemmilta puolilta.

Lähestytään kohtaa 5 vasemmalta.	Lähestytään kohtaa 5 oikealta.
$f(4{,}9) = 4{,}49152...$	$f(5{,}1) = 4{,}50819...$
$f(4{,}99) = 4{,}49916...$	$f(5{,}01) = 4{,}50083...$
$f(4{,}999) = 4{,}49991...$	$f(5{,}001) = 4{,}50008...$
$f(4{,}9999) = 4{,}49999...$	$f(5{,}0001) = 4{,}50000...$

Funktion arvot näyttävät lähestyvän lukua $4{,}5$.

Näyttäisi olevan $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 4{,}5$.

b) Määritetään laskimella arvoja kohdan -1 molemmilta puolilta.

Lähestytään kohtaa -1 vasemmalta.	Lähestytään kohtaa -1 oikealta.
$f(-1{,}1) = 35$	$f(-0{,}9) = -25$
$f(-1{,}01) = 305$	$f(-0{,}99) = -295$
$f(-1{,}001) = 3005$	$f(-0{,}999) = -2995$
$f(-1{,}0001) = 30005$	$f(-0{,}9999) = -29995$

Funktion arvot eivät näytä lähestyvän mitään tiettyä lukua.

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ ei ole olemassa.

Vastaus
a) $4{,}5$
b) ei ole olemassa

K3.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{3x+3}=\dfrac{(-1)^2+(-1)}{3\cdot(-1)+3}=\dfrac{0}{0}$ ei määritelty

Koska sekä osoittaja että nimittäjän raja-arvo on nolla, lauseketta voidaan mahdollisesti sieventää.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{3x+3}$ Erotetaan osoittajan yhteinen tekijä x.

Erotetaan nimittäjän yhteinen tekijä 3.

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x\,\cancel{(x+1)}^{\,1}}{3\,\cancel{(x+1)}_{\,1}}$ Supistetaan yhteinen tekijä $(x+1)$.

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{3}$ Lasketaan raja-arvo.

$=\dfrac{-1}{3}=-\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{6x^3-3x^2}{2x-1}=\dfrac{6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{1}{2}-1}=\dfrac{0}{0}$ ei määritelty

Koska sekä osoittaja että nimittäjän raja-arvo on nolla, lauseketta voidaan mahdollisesti sieventää.

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{6x^3-3x^2}{2x-1}$ Erotetaan osoittajan yhteinen tekijä $3x^2$.

$=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{3x^2\,\cancel{(2x-1)}^{\,1}}{\cancel{2x-1}_{\,1}}$ Supistetaan yhteinen tekijä $2x-1$.

$=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}3x^2$ Lasketaan raja-arvo.

$=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

Vastaus

a) $-\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{3}{4}$

K4.

Funktio g on jatkuva kohdassa 4, jos $\lim\limits_{x\to 4} g(x) = g(4)$.

Lasketaan funktion g raja-arvo kohdassa 4.

$$\lim_{x\to 4} g(x) = \lim_{x\to 4} \frac{x^3 - 4x^2}{2x - 8} = \frac{4^3 - 4\cdot 4^2}{2\cdot 4 - 8} = \frac{0}{0}$$ ei määritelty

Koska sekä osoittaja että nimittäjän raja-arvo on nolla, lauseketta voidaan mahdollisesti sieventää.

$\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^3 - 4x^2}{2x - 8}$ Erotetaan osoittajan yhteinen tekijä x^2.

Erotetaan nimittäjän yhteinen tekijä 2.

$= \lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2(\cancel{x-4})}{2(\cancel{x-4})}$ (1 ja 1) Supistetaan yhteinen tekijä $x - 4$.

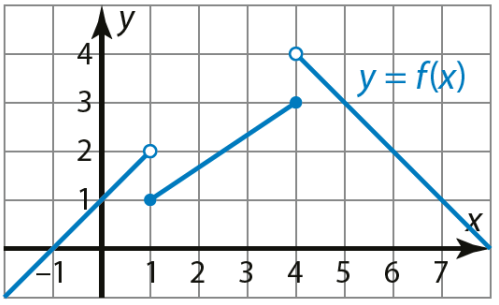
$= \lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2}{2}$ Lasketaan raja-arvo.

$= \frac{4^2}{2} = 8$

Funktio g on jatkuva kohdassa 4, jos $g(4) = 8$.

Vastaus
$g(4) = 8$

K5.



a) Funktio f on jatkuva välin $[1, 4]$ jokaisessa sisäpisteessä.

Funktio f on oikealta jatkuva välin päätepisteessä 1:

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$$
$$f(1) = 1.$$

Funktio f on vasemmalta jatkuva välin päätepisteessä 4:

$$\lim_{x \to 4-} f(x) = 3$$
$$f(4) = 3.$$

Siis funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[1, 4]$.

b) Funktio f on ei ole oikealta jatkuva välin $[4, 6]$ päätepisteessä 4:

$$\lim_{x \to 4+} f(x) = 4$$
$$f(4) = 3.$$

Siis funktio f on ei ole jatkuva suljetulla välillä $[4, 6]$.

c) Funktio f on jatkuva välin $]4, 6]$ jokaisessa sisäpisteessä.

Funktio f on vasemmalta jatkuva välin päätepisteessä 6:

$$\lim_{x \to 6-} f(x) = 2$$
$$f(6) = 2.$$

Siis funktio f on jatkuva välillä $]4, 6]$.

Vastaus

a) on
b) ei ole
c) on

K6.

$$f(x)=\begin{cases} 2x-4, \text{ kun } x\leq 3 \\ -x+a, \text{ kun } x>3. \end{cases}$$

a) Kun x lähestyy kohtaa 3 vasemmalta puolelta, $f(x)=2x-4$.

$$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-}(2x-4)=2\cdot 3-4=2$$

b) Kun x lähestyy kohtaa 3 oikealta puolelta, $f(x)=-x+a$.

$$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+}(-x+a)=-3+a=a-3$$

c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ on olemassa, kun vasemmanpuoleinen ja oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 3 ovat yhtä suuret.

$$a-3=2 \quad \big|+3$$
$$a=5$$

Vastaus
a) 2
b) $a-3$
c) $a=5$

K7.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{2x^2-18}=\dfrac{3^2-6\cdot 3+9}{2\cdot 3^2-18}=\dfrac{0}{0}$ ei määritelty

Koska sekä osoittaja että nimittäjän raja-arvo on nolla, lauseketta voidaan mahdollisesti sieventää.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{2x^2-18}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{2(x^2-9)} \qquad \begin{vmatrix} x^2-6x+9=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2=(x-3)^2 \\ x^2-9=x^2-3^2=(x-3)(x+3)\end{vmatrix}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{2\cancel{(x-3)}(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{2(x+3)}$$

$$=\frac{3-3}{2\cdot(3+3)}=0$$

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}}\dfrac{16x^2-1}{16x^2+8x+1}=\dfrac{16\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2-1}{16\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2+8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+1}=\dfrac{0}{0}$ ei määritelty

Koska sekä osoittaja että nimittäjän raja-arvo on nolla, lauseketta voidaan mahdollisesti sieventää.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{4}}\frac{16x^2-1}{16x^2+8x+1} \qquad \begin{vmatrix} 16x^2-1=(4x)^2-1^2=(4x+1)(4x-1) \\ 16x^2+8x+1=(4x)^2+2\cdot 4x\cdot 1+1^2=(4x+1)^2\end{vmatrix}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{4}}\frac{\cancel{(4x+1)}(4x-1)}{(4x+1)^{\cancel{2}}}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{4}}\frac{4x-1}{4x+1}$$

$$=\frac{4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-1}{4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+1}=\frac{-2}{0}$$ ei määritelty

Raja-arvo ei ole olemassa.

Vastaus
a) 0
b) ei ole olemassa

K8.

a) Sievennetään lauseke yhdeksi rationaalilausekkeeksi.

$$\overset{x+2)}{\frac{3x}{x-2}} - \frac{12x}{x^2-4} \qquad x^2-4 = x^2-2^2 = (x+2)(x-2)$$

$$= \frac{(x+2)\cdot 3x}{(x+2)(x-2)} - \frac{12x}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{(x+2)\cdot 3x - 12x}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{3x^2+6x-12x}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{3x^2-6x}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{3x\cdot(\cancel{x-2})}{(x+2)(\cancel{x-2})}$$

$$= \frac{3x}{x+2}$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x}{x-2} - \frac{12x}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{3x}{x+2} = \frac{3\cdot 2}{2+2} = \frac{3}{2}$$

b) Sievennetään lauseke yhdeksi rationaalilausekkeeksi.

$$\frac{x}{x-1}\cdot\left(\frac{1}{x^3} - \overset{x^2)}{1}\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x}{x-1}\cdot\left(\frac{1}{x^3} - \frac{x^2}{x^3}\right)$$

$$= \frac{x}{x-1}\cdot\frac{1-x^2}{x^3} \qquad \begin{vmatrix} 1-x^2 = 1^2-x^2 = (1+x)(1-x) \\ x-1 = -(-x+1) = -(1-x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\overset{1}{x}}{-\cancel{(1-x)}}\cdot\frac{(1+x)\cancel{(1-x)}}{\cancel{x^3}\ \ x^2}$$

$$= \frac{1+x}{-x^2}$$

$$= -\frac{1+x}{x^2}$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{1+x}{x^2}\right) = -\frac{1+1}{1^2} = -2$$

Vastaus

a) $\frac{3}{2}$ **b)** -2

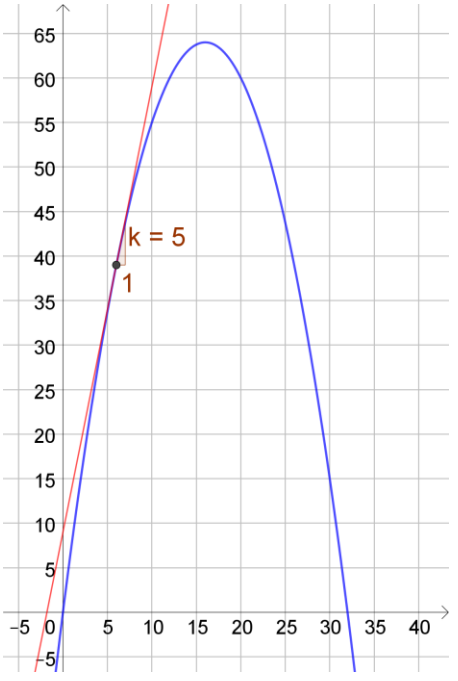
K9

a) Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 8x$ derivaatta kohdassa 6 on funktion kuvaajalle kohtaan $x = 6$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Piirretään funktion f kuvaaja ja merkitään kuvaajalle piste kohtaan $x = 6$.

Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 6$.

Määritetään tangentin kulmakerroin.



Tangentin kulmakertoimeksi saadaan 5. Siten $f'(6) = 5$.

b) Funktion derivaatta $f'(20)$ on funktion kuvaajalle kohtaan $x = 20$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Merkitään funktion f kuvaajalle piste kohtaan $x = 20$.

Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 20$.

Määritetään tangentin kulmakerroin.



Tangentin kulmakertoimeksi saadaan -2. Siten $f'(20) = -2$.

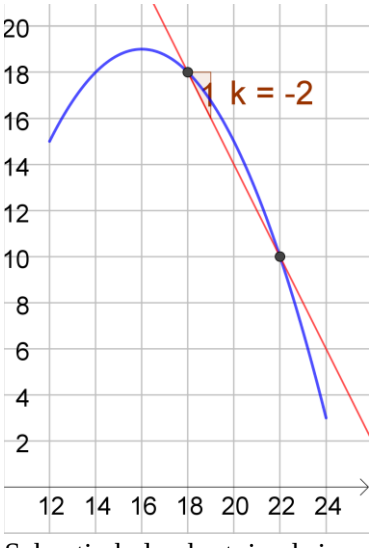
Vastaus

a) 5

b) -2

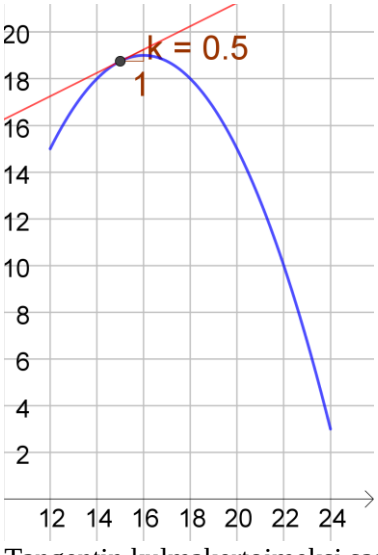
K10

a) Funktion $f(x) = -0,25x^2 + 8x - 45$ keskimääräisen muutosnopeuden ilmaisee kuvaajan pisteiden kautta piirretyn sekantin kulmakerroin.
Piirretään funktion kuvaaja ja merkitään kuvaajalle pisteet kohtiin
$x = 18$ ja $x = 22$. Piirretään pisteiden kautta kulkeva sekantti ja määritetään sekantin kulmakerroin.



Sekantin kulmakertoimeksi saadaan -2. Lämpötilan keskimääräinen muutosnopeus on -2 °C/h (eli lämpötila alenee keskimäärin 2 astetta tunnissa).

b) Hetkellisen muutosnopeuden klo 15.00 ilmaisee derivaatta kohdassa
$x = 15$. Merkitään kuvaajalle piste kohtaan $x = 15$, piirretään pisteeseen kuvaajan tangentti ja määritetään tangentin kulmakerroin.

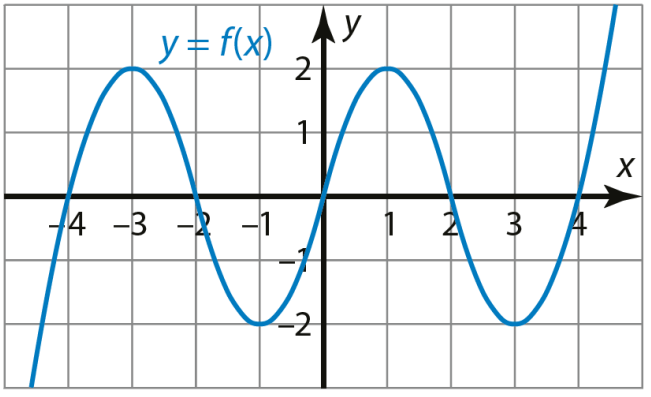


Tangentin kulmakertoimeksi saadaan 0,5. Siten lämpötilan hetkellinen muutosnopeus klo 15.00 on 0,5 °C/h.

Vastaus

a) –2 °C/h b) 0,5 °C/h

K11



a) Yhtälö $f(x) = 0$ toteutuu funktion nollakohdissa, eli kohdissa, joissa kuvaaja leikkaa x-akselin. Kuvaajan perusteella funktion nollakohdat ovat $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ ja $x = 4$.

b) Derivaatta $f'(x)$ on kuvaajalle kohtaan x piirretyn tangentin kulmakerroin. Tangentin kulmakerroin on 0 niissä kohdissa, joissa tangentti on vaakasuora. Kuvaajan perusteella tangentti on vaakasuora kohdissa $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ ja $x = 3$.

c) Kuvaajan perusteella kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on epäpositiivinen väleillä $-3 \le x \le -1$ ja $1 \le x \le 3$.

d) Epäyhtälö $f(x) \ge 0$ toteutuu kohdissa, joissa funktion arvot ovat epänegatiivisia. Nämä ovat kohtia joissa kuvaaja leikkaa x-akselin tai kulkee x-akselin yläpuolella. Kuvaajan perusteella epäyhtälö toteutuu väleillä $-4 \le x \le -2$, $0 \le x \le 2$ ja $x \ge 4$.

Vastaus

a) $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ tai $x = 4$
b) $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ tai $x = 3$
c) $-3 \le x \le -1$ tai $1 \le x \le 3$
d) $-4 \le x \le -2$ tai $0 \le x \le 2$ tai $x \ge 4$

K12

Funktion $f(x) = 2x^2 - 2x$ derivaatta kohdassa 2 on erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(2)$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$
missä $a = 2$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \qquad f(x) = 2x^2 - 2x$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(2+h)^2 - 2(2+h) - (2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2)}{h} \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(2^2 + 2 \cdot 2 \cdot h + h^2) - 4 - 2h - 8 + 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8 + 8h + 2h^2 - 4 - 2h - 8 + 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 6h}{h}$$

Erotetaan osoittajasta yhteinen tekijä.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2h+6)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2h + 6)$$

$$= 2 \cdot 0 + 6$$

$$= 6$$

Vastaus

6

K13

Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ derivaatta kohdassa -3 on erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(-3)$$

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, missä $a = -3$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$$

$f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{(-3+h)^3 - 1}{(-3+h)^2 + 1} - \dfrac{(-3)^3 - 1}{(-3)^2 + 1}}{h}$$

Lasketaan raja-arvo CAS-laskimella.

$$= \frac{51}{50}$$

Vastaus

$\dfrac{51}{50}$

K14

a) Funktion $f(x) = (x + 1)^2$ derivaattafunktion lauseke on erotusosamäärän raja-arvo kohdassa x.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f(x+h) = ((x+h)-1)^2 \text{ ja } f(x) = (x-1)^2$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)-1)^2 - (x-1)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-1)(x+h-1) - (x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + hx - x + hx + h^2 - h - x - h + 1 - x^2 + 2x - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2 - 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h - 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h - 2)$$

$$= 2x + 0 - 2$$

$$= 2x - 2$$

b) Kysytty derivaatta voidaan laskea suoraan derivaattafunktion arvona.
Kun $x = 0$, saadaan $f'(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2$.

Vastaus

a) $f'(x) = 2x - 2$
b) $f'(0) = -2$

K15

a) Funktio $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ on määritelty, kun $x \neq 1$. Funktion f derivaattafunktion lauseke on erotusosamäärän raja-arvo kohdassa x.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f(x+h) = \frac{(x+h)^2+3}{(x+h)-1} \text{ ja } f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{(x+h)^2+3}{(x+h)-1} - \dfrac{x^2+3}{x-1}}{h} \qquad \text{Lasketaan raja-arvo CAS-laskimella.}$$

$$= \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

b) Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 0$.

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = -1 \text{ tai } x = 3$$

Vastaus

a) $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

b) $x = -1$ tai $x = 3$

K16

a) Määritetään funktion $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + x$ derivaattafunktio.

$f'(x) = 8x^3 - 6x + 1$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 2.

$f'(2) = 8 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 + 1 = 53$

b) Määritetään funktion $f(x) = \frac{3x^4}{2} - 5x^3 - 145$ derivaattafunktio.

$f'(x) = \frac{12x^3}{2} - 15x^2 = 6x^3 - 15x^2$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 2.

$f'(2) = 6 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 = -12$

Vastaus
a) 53
b) –12

K17

a) Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

$$y = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 2 = -2$$

Tangentti piirretään kuvaajan pisteeseen $(2, -2)$.

Käyrälle kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $y'(2)$. Derivoidaan ja lasketaan kulmakerroin.

$$y'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 1$$

$$y'(2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 1 = 7$$

Tangentti kulkee pisteen $(2, -2)$ kautta ja sen kulmakerroin on 7. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$\begin{aligned} y - (-2) &= 7(x - 2) \\ y + 2 &= 7x - 14 \quad \big| -2 \\ y &= 7x - 16 \end{aligned}$$

Tangentin yhtälö on $y = 7x - 16$.

b) Normaali piirretään kuvaajalle samaan pisteeseen kuin tangentti, eli normaali kulkee pisteen $(2, -2)$ kautta.

Normaali on kohtisuorassa tangenttia vastaan, joten sen kulmakerroin voidaan ratkaista kohtisuoruusehdosta.

Sijoitetaan $k_t = 7$.

$$\begin{aligned} k_t \cdot k_n &= -1 \\ 7 \cdot k_n &= -1 \quad \big| : 7 \\ k_n &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

Normaali kulkee pisteen $(2, -2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{1}{7}$. Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y-(-2)=-\frac{1}{7}(x-2) \qquad y-y_0=k(x-x_0)$$

$$y+2=-\frac{1}{7}x+\frac{2}{7} \qquad \left|-2\right.$$

$$y=-\frac{1}{7}x-\frac{12}{7}$$

Normaalin yhtälö on $y=-\frac{1}{7}x-\frac{12}{7}$.

Vastaus

a) $y = 7x - 16$

b) $y=-\frac{1}{7}x-\frac{12}{7}$

K18

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion f' nollakohdat ovat –4, –1, 1 ja 2. Derivaattafunktion merkit voidaan päätellä kuvaajasta.

		-4		-1		1		2	
f'	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$
f	$\searrow$	$\vert$	$\nearrow$	$\vert$	$\searrow$	$\vert$	$\nearrow$	$\vert$	$\searrow$
		min		max		min		max	

a) Funktion maksimikohdat ovat $x = -1$ ja $x = 2$.

Funktion minimikohdat ovat $x = -4$ ja $x = 1$.

b) Funktio f on aidosti kasvava välillä $-4 \le x \le -1$, joten $f(-3) < f(-2)$.

Vastaus

a) maksimikohdat ovat $x = -1$ ja $x = 2$,
minimikohdat ovat $x = -4$ ja $x = 1$.

b) $f(-2)$

K19

a) Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x - 2$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = x^2 + 6x + 5$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{-6+4}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6-4}{2} = -5$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio f' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -5 ja -1. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = x^2 + 6x + 5$$

$f'(-6) = 5 > 0$ $+$

$f'(-2) = -3 < 0$ $-$

$f'(0) = 5 > 0$ $+$

		-5		-1	
f'	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$
f	$\nearrow$	$\vert$	$\searrow$	$\vert$	$\nearrow$
		max		min	

Funktio f on aidosti kasvava välillä $x \le -5$ ja välillä $x \ge -1$.

Funktio f on aidosti vähenevä välillä $-5 \le x \le -1$.

b) Funktion maksimikohta on $x = -5$. Funktion maksimiarvo on

$$f(-5) = \frac{1}{3} \cdot (-5)^3 + 3 \cdot (-5)^2 + 5 \cdot (-5) + 2 = 6\frac{1}{3} = \frac{19}{3}.$$

Funktion minimikohta on $x = -1$. Funktion minimiarvo on

$$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 2 = -4\frac{1}{3} = -\frac{13}{3}.$$

Vastaus

a) aidosti kasvava välillä $x \le -5$ ja välillä $x \ge -1$,
aidosti vähenevä välillä $-5 \le x \le -1$

b) maksimikohta $x = -5$, maksimiarvo $\frac{19}{3}$,

minimikohta $x = -1$, minimiarvo $\frac{13}{3}$

K20

Funktio $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$ on määritelty ja jatkuva välillä $[2, 6]$. Funktio f saa suljetulla välillä $[2, 6]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 12x - 15 = 0 \qquad |:3$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2}$$
$$x = \frac{4+6}{2} = 5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4-6}{2} = -1$$

Vain nollakohta $x = 5$ kuuluu välille $[2, 6]$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 15 \cdot 2 + 2 = -44 \quad \text{suurin}$$
$$f(6) = 6^3 - 6 \cdot 6^2 - 15 \cdot 6 + 2 = -88$$
$$f(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 + 2 = -98 \quad \text{pienin}$$

Funktion f suurin arvo välillä $[2, 6]$ on -44 ja pienin arvo -98.

Vastaus
suurin arvo -44, pienin arvo -98

K21

Määritetään funktion f kuvaajan ja x-akselin leikkauskohta.

$$f(x) = 0$$
$$x^7 - 1 = 0 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x = 1$$

Määritetään funktion f derivaattafunktio ja kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 1$.

$$f(x) = x^7$$
$$f'(x) = 7x^6$$
$$k = f'(1) = 7 \cdot 1^6 = 7$$

Lasketaan tangentin suuntakulma.

$$\tan\alpha = 7$$
$$\alpha = \tan^{-1}(7) = 81{,}869...^\circ \approx 82^\circ$$

Funktion f kuvaaja leikkaa x-akselin 82°:n kulmassa.

Vastaus
82°

K22

Funktio $f(x) = x^2 - 2x + 5$ on määritelty ja jatkuva välillä $[-1, 2]$. Funktio f saa suljetulla välillä $[-1, 2]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2x - 2$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= 0 \quad |+2 \\ 2x &= 2 \quad |:2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Nollakohta kuuluu välille $[-1, 2]$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(x) = x^2 - 2x + 5$$

$f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 5 = 8$ suurin
$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 5$
$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$ pienin

Funktion f suurin arvo välillä $[-1, 2]$ on 8 ja pienin arvo 4.

Koska funktio f on jatkuva, se saa kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa välistä. Täten funktion f arvojoukko on $[4, 8]$.

Vastaus
$[4, 8]$

K23

Funktion $f(x) = x^5 + 4x^3$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$f'(x) = 5x^4 + 12x^2$

Koska parilliset potenssit ovat aina epänegatiivisia, niin $x^4 \geq 0$ ja $x^2 \geq 0$ kaikilla x.

Siten derivaattafunktio $f'(x) = 5x^4 + 12x^2 \geq 0$ kaikilla x.

Derivaattafunktio $f'(x) = 5x^4 + 12x^2$ saa arvon 0 vain, kun $x = 0$.

Siis $f'(x) \geq 0$ kaikilla x ja $f'(x) = 0$ vain, kun $x = 0$.

On osoitettu, että funktio f on kaikkialla aidosti kasvava. □

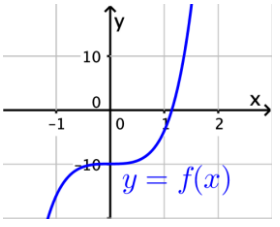
K24

Muokataan yhtälö muotoon, jossa toisella puolella on vain luku 0.

$$2x^5 = 10 - 4x^3 \quad \big| -10 + 4x^3$$
$$2x^5 + 4x^3 - 10 = 0$$

Yhtälön $2x^5 + 4x^3 - 10 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = 2x^5 + 4x^3 - 10$ nollakohdat. Pitää siis osoittaa, että funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta.

Tilannetta voi hahmotella piirtämällä funktion f kuvaajan. Funktiolla näyttäisi olevan yksi nollakohta välillä $]1, 2[$.



1) Perustellaan ensin, että funktiolla f on ainakin yksi nollakohta.

Funktio f on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä.

$$f(1) = 2 \cdot 1^5 + 4 \cdot 1^3 - 10 = -4$$
$$f(2) = 2 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^3 - 10 = 54$$

Koska funktion arvot ovat erimerkkiset, funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]1, 2[$.

2) Perustellaan seuraavaksi, että funktiolla f on korkeintaan yksi nollakohta.

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$f(x) = 2x^5 + 4x^3 - 10$ Derivoidaan CAS-laskimella.
$f'(x) = 10x^4 + 12x^2$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$10x^4 + 12x^2 = 0$ Ratkaistaan CAS-laskimella.
$x = 0$

Derivaattafunktio f' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa 0. Päätellään merkit testaamalla.

$f'(x) = 10x^4 + 12x^2$

$f'(-1) = 10 \cdot (-1)^4 + 12 \cdot (-1)^2 = 22$
$f'(1) = 10 \cdot 1^4 + 12 \cdot 1^2 = 22$

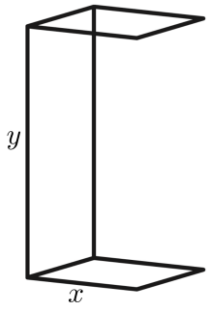
Koska $f'(x) > 0$, kun $x \neq 0$ ja $f'(x) = 0$, kun $x = 0$, niin funktio f on aidosti kasvava.

Täten funktiolla f on korkeintaan yksi nollakohta.

On siis osoitettu, että funktiolla f on ainakin yksi nollakohta ja korkeintaan yksi nollakohta. Funktiolla f on siis täsmälleen yksi nollakohta ja yhtälöllä $2x^5 = 10 - 4x^3$ täsmälleen yksi ratkaisu. □

K25

Merkitään varjostimen pohjaneliön sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella x ja varjostimen korkeutta senttimetreinä kirjaimella y.



Rautalankaa on käytettävissä 200 cm, joten särmien pituuksien summan pitää olla 200. Ratkaistaan muuttujan y lauseke.

$8x + 2y = 200$ Ratkaistaan muuttuja y CAS-laskimella.

$y = 100 - 4x$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee särmiön tilavuuden.

$V(x) = x^2 \cdot y$ Sijoitetaan $y = 100 - 4x$.

$= x^2 \cdot (100 - 4x)$ Sievennetään CAS-laskimella.

$= -4x^3 + 100x^2$

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion V määrittelyehto.

$x \geq 0$ ja $y \geq 0$

$100 - 4x \geq 0$

$x \leq 25$

On siis määritettävä funktion V suurin arvo suljetulla välillä $[0, 25]$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $V(x) = -4x^3 + 100x^2$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $[0, 25]$ kohta, jossa funktion V arvo on suurin.

Laskin antaa ääriarvokohdaksi $x = \frac{50}{3}$.

Suurin tilavuus saavutetaan, kun $x = \frac{50}{3}$. Lasketaan särmiön mitat.

pohjasärmän pituus: $x = \frac{50}{3} = 16{,}666... \approx 16{,}7$ (cm)

korkeus: $y = 100 - 4 \cdot x = 100 - 4 \cdot \frac{50}{3} = \frac{100}{3} = 33{,}333... \approx 33{,}3$ (cm)

Särmiön tilavuus on mahdollisimman suuri, kun pohjasärmän pituus on 16,7 cm ja kehikon korkeus 33,3 cm.

Vastaus
pohjasärmä 16,7 cm; korkeus 33,3 cm

K26

Merkitään $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ ja määritetään funktion f suurin ja pienin arvo välillä [–3, 3].

Funktio f on määritelty ja jatkuva välillä [–3, 3]. Funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetulla välillä [–3, 3] välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$3x^2 - 6x - 24 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.
$x = -2$ tai $x = 4$

Nollakohdista vain $x = -2$ kuuluu välille [–3, 3].

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$

$f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 - 24 \cdot (-3) = 18$
$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 = -72$ pienin
$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 24 \cdot (-2) = 28$ suurin

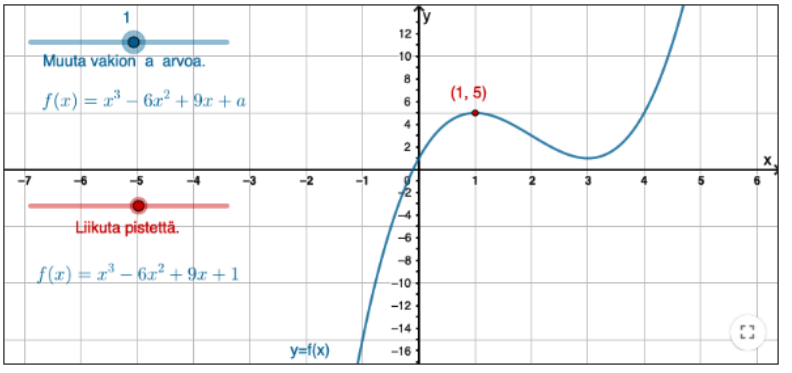
Funktion f suurin arvo välillä [–3, 3] on 28 ja pienin arvo –72.

Täten kaikilla välillä [–3, 3] olevilla muuttujan x arvoilla pätee $-72 \leq f(x) \leq 28$.

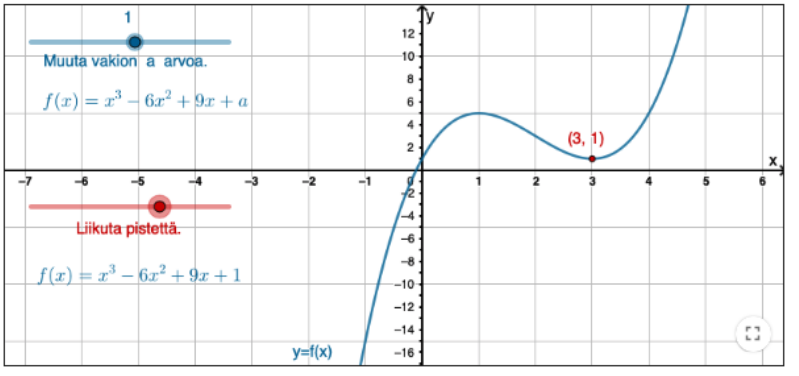
On siis osoitettu, että kaikilla välillä [–3, 3] olevilla muuttujan x arvoilla kaksoisepäyhtälö $-75 \leq x^3 - 3x^2 - 24x \leq 28$ on tosi. □

K27

a) Appletin perusteella funktiolla f on maksimiarvo 5, kun $a = 1$.



Tällöin funktion minimiarvo on 1.



b) Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Määritetään derivaattafunktio.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$3x^2 - 12x + 9 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 1$ tai $x = 3$

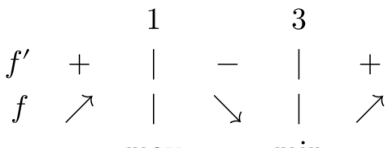
Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio f' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 1 ja 3. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(0) = 9 > 0$ $+$

$f'(2) = -3 < 0$ $-$

$f'(4) = 9 > 0$ $+$



Funktion f maksimikohta on $x = 1$. Maksimiarvon tulee olla 5. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$f(1) = 5$ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$

$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + a = 5$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$a = 1$

Funktiolla f on maksimiarvo 5, kun $a = 1$.

Funktion f minimikohta on $x = 3$. Lasketaan funktion f minimiarvo, kun $a = 1$.

$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 1$

Vastaus

$a = 1$, minimiarvo 1

K28

Jos $k = 0$, käyrät ovat samat ($y = 0$). Tällöin niille piirretyt tangentit eivät voi koskaan olla kohtisuorassa toisiaan vastaan. Oletetaan siis, että $k \neq 0$.

Koska leikkauskohdassa käyrillä on yhteinen piste, niiden y-koordinaatit ovat leikkauskohdassa yhtä suuret.

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ kx^2 &= kx^2 - 4kx + 4k \\ 4kx - 4k &= 0 \quad \vert : 4k \ (\neq 0) \\ x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Käyrät leikkaavat siis kohdassa $x = 1$.

Käyrien $y_1 = kx^2$ ja $y_2 = k(x-2)^2 = kx^2 - 4kx + 4k$ leikkauspisteisiin piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun niiden kulmakertoimien tulo on -1. Sivuamispisteessä käyrien derivaattojen tulon on siis oltava -1.

Määritetään käyrien derivaatat kohdassa $x = 1$.

$y_1'(x) = 2kx$ $\qquad$ $y_2'(x) = 2kx - 4k$

$y_1'(1) = 2k$ $\qquad$ $y_2'(1) = 2k - 4k = -2k$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$2k \cdot (-2k) = -1$ $\qquad$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$k = -\frac{1}{2}$ tai $k = \frac{1}{2}$

Tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun $k = -\frac{1}{2}$ tai $k = \frac{1}{2}$.

Vastaus

$k = -\frac{1}{2}$ ja $k = \frac{1}{2}$

K29

Merkitään $0{,}05$ euron korotusten lukumäärää kirjaimella x.

Kahvikupin uudeksi hinnaksi saadaan $0{,}80 + 0{,}05x$ euroa.

Myynti laskee $25x$ kupillisella, joten uusi myynti on $500 - 25x$ kupillista.

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee myyntitulot.

$$M(x) = (0{,}80 + 0{,}05x)(500 - 25x) = -1{,}25x^2 + 5x + 400$$

On siis määritettävä funktion M suurin arvo.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $M(x) = -1{,}25x^2 + 5x + 400$.

Määritetään laskimen Max-komennolla kohta, jossa funktion M arvo on suurin.

Laskimen komento on
$\mathrm{Max}(f(x), x, -\infty, \infty)$ tai
$\mathrm{fMax}(f(x), x, -\infty, \infty)$.

Laskin antaa ääriarvokohdaksi $x = 2$.

Suurin myyntitulo saadaan, kun $x = 2$. Lasketaan kahvikupin hinta ja myytyjen kupillisten lukumäärä.

hinta: $0{,}80 + 0{,}05x = 0{,}80 + 0{,}05 \cdot 2 = 0{,}90$ (€)
myytyjä kuppeja: $500 - 25x = 500 - 25 \cdot 2 = 450$

Vastaus
kahvikupin hinta $0{,}90$ €, myynti 450 kuppia

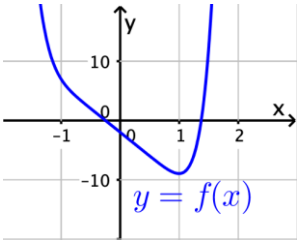
K30

Muokataan yhtälö muotoon, jossa toisella puolella on vain luku 0.

$$x^8 - 2 = 8x \quad \big| -8x$$
$$x^8 - 8x - 2 = 0$$

Yhtälön $x^8 - 8x - 2 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^8 - 8x - 2$ nollakohdat. Pitää siis osoittaa, että funktiolla f on täsmälleen kaksi nollakohtaa.

Tilannetta voi hahmotella piirtämällä funktion f kuvaajan. Funktiolla näyttäisi olevan yksi nollakohta välillä $]-1, 0[$ ja yksi nollakohta välillä $]1, 2[$.



1) Perustellaan ensin, että funktiolla f on ainakin kaksi nollakohtaa.

Funktio f on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva.

Lasketaan funktion arvot välin $]-1, 0[$ päätepisteissä.

$$f(-1) = (-1)^8 - 8 \cdot (-1) - 2 = 7$$
$$f(0) = 0^8 - 8 \cdot 0 - 2 = -2$$

Koska funktion arvot ovat erimerkkiset, funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]-1, 0[$.

Lasketaan funktion arvot välin $]1, 2[$ päätepisteissä.

$$f(1) = 1^8 - 8 \cdot 1 - 2 = -9$$
$$f(2) = 2^8 - 8 \cdot 2 - 2 = 238$$

Koska funktion arvot ovat erimerkkiset, funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]1, 2[$.

Funktiolla f on siis ainakin kaksi nollakohtaa.

2) Perustellaan seuraavaksi, että funktiolla f on korkeintaan kaksi nollakohtaa.

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = x^8 - 8x - 2$$
$$f'(x) = 8x^7 - 8$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$8x^7 - 8 = 0$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = 1$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio f' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa 1. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$f'(x) = 8x^7 - 8$

$f'(0) = -8 < 0$ $-$

$f'(2) = 1016 > 0$ $+$

		1	
f'	$-$	$\|$	$+$
f	$\searrow$	$\|$	$\nearrow$

Funktio f on aidosti vähenevä, kun $x \leq 1$ ja aidosti kasvava, kun $x \geq 1$. Funktiolla f voi siis olla korkeintaan yksi nollakohta ennen kohtaa 1 ja korkeintaan yksi nollakohta kohdan 1 jälkeen.

Siis funktiolla f voi olla korkeintaan kaksi nollakohtaa.

On siis osoitettu, että funktiolla f on ainakin kaksi nollakohtaa ja korkeintaan kaksi nollakohtaa. Funktiolla f on siis täsmälleen kaksi nollakohtaa ja yhtälöllä $x^8 - 2 = 8x$ täsmälleen kaksi ratkaisua. □

K31

a) $f(x) = x^3(4x-7)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}x^3(4x-7) + x^3\mathrm{D}(4x-7) \\ &= 3x^2(4x-7) + x^3 \cdot 4 \\ &= 12x^3 - 21x^2 + 4x^3 \\ &= 16x^3 - 21x^2 \end{aligned}$$

b) $g(x) = (x^2-3x)(2x+8)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{D}(x^2-3x)(2x+8) + (x^2-3x) \cdot \mathrm{D}(2x+8) \\ &= (2x-3)(2x+8) + (x^2-3x) \cdot 2 \\ &= 4x^2 + 16x - 6x - 24 + 2x^2 - 6x \\ &= 6x^2 + 4x - 24 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $f'(x) = 16x^3 - 21x^2$

b) $g'(x) = 6x^2 + 4x - 24$

K32

a) $f(x) = \dfrac{4x}{2x-6}$

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$\begin{aligned} 2x - 6 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Määrittelyehto on $x \neq 3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{D}(4x)\cdot(2x-6) - 4x\cdot\mathrm{D}(2x-6)}{(2x-6)^2} \\ &= \frac{4\cdot(2x-6) - 4x\cdot 2}{(2x-6)^2} \\ &= \frac{8x - 24 - 8x}{(2x-6)^2} \\ &= \frac{-24}{(2x-6)^2}, \text{ kun } x \neq 3 \end{aligned}$$

b) $g(x) = \dfrac{5x+1}{4x^2+2}$

Nimittäjä $4x^2 + 2 > 0$ aina, joten funktio g on määritelty kaikilla x.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\mathrm{D}(5x+1)\cdot(4x^2+2) - (5x+1)\cdot\mathrm{D}(4x^2+2)}{(4x^2+2)^2} \\ &= \frac{5(4x^2+2) - (5x+1)\cdot 8x}{(4x^2+2)^2} \\ &= \frac{5(4x^2+2) - (5x-1)\cdot 8x}{(4x^2+2)^2} \\ &= \frac{-20x^2 - 8x + 10}{(4x^2+2)^2} \end{aligned}$$

c) $h(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{x^3}{3}$

Funktio h on määritelty, kun $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \mathrm{D}\frac{2}{x^3} + \mathrm{D}\frac{x^3}{3} \\ &= \mathrm{D}(2x^{-3}) + \frac{1}{3} \cdot 3x^2 \\ &= 2 \cdot (-3)x^{-4} + x^2 \\ &= -6x^{-4} + x^2 \\ &= x^2 - \frac{6}{x^4}, \text{ kun } x \neq 0 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $f'(x) = \frac{-24}{(2x-6)^2}$, kun $x \neq 3$

b) $g'(x) = \frac{-20x^2 - 8x + 10}{(4x^2 + 2)^2}$

c) $h'(x) = x^2 - \frac{6}{x^4}$, kun $x \neq 0$

K33

$$h(x) = \frac{8 - x^2}{3 - x}$$

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$\begin{aligned} 3 - x &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Määrittelyehto on $x \neq 3$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\mathrm{D}(8 - x^2) \cdot (3 - x) - (8 - x^2) \cdot \mathrm{D}(3 - x)}{(3 - x)^2} \\ &= \frac{-2x \cdot (3 - x) - (8 - x^2) \cdot (-1)}{(3 - x)^2} \\ &= \frac{-6x + 2x^2 + 8 - x^2}{(3 - x)^2} \\ &= \frac{x^2 - 6x + 8}{(3 - x)^2} \text{ kun } x \neq 3 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0 \\ \frac{x^2 - 6x + 8}{(3 - x)^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{6 - 2}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{6 + 2}{2} = 4$$

Molemmat nollakohdat toteuttavat määrittelyehdon.

Vastaus

$x = 2$ tai $x = 4$

K34

$$h(x) = \frac{x^3}{x^2 - 12}$$

Selvitetään nimittäjän nollakohdat.

$$x^2 - 12 = 0$$
$$x = \pm 2\sqrt{3}$$

Funktio on määritelty, kun $x \neq \pm 2\sqrt{3}$.

Derivoidaan funktio.

$$h(x) = \frac{x^3}{x^2 - 12}$$
$$h'(x) = \frac{\mathrm{D}x^3 \cdot (x^2 - 12) - x^3 \cdot \mathrm{D}(x^2 - 12)}{(x^2 - 12)^2}$$
$$= \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 12) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 12)^2}$$
$$= \frac{3x^4 - 36x^2 - 2x^4}{(x^2 - 12)^2}$$
$$= \frac{x^4 - 36x^2}{(x^2 - 12)^2}, \text{ kun } x \neq \pm 2\sqrt{3}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$h'(x) = 0$$
$$\frac{x^4 - 36x^2}{(x^2 - 12)^2} = 0 \qquad \left| \cdot (x^2 - 12)^2 \neq 0 \right.$$
$$x^4 - 36x^2 = 0$$
$$x^2(x^2 - 36) = 0$$
$$x^2 = 0 \text{ tai } x^2 - 36 = 0$$
$$x = 0 \qquad x^2 = 36$$
$$x = \sqrt{36} \text{ tai } x = -\sqrt{36}$$
$$x = -6 \text{ tai } x = 6$$

Nollakohdat täyttävät määrittelyehdon.
Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa tai kohdissa, joissa *f'* ei ole määritelty. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$h'(-7) = 0{,}4653... > 0$

$h'(-4) = -20 < 0$

$h'(-1) = -0{,}2892... < 0$

$h'(1) = -0{,}2892... < 0$

$h'(4) = -20 < 0$

$h'(7) = 0{,}4653... > 0$

	-6		$-2\sqrt{3}$		0		$2\sqrt{3}$		6
$h'(x)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	max	↘	ei määr	↘	terassi	↘	ei määr	↗ min

Kulkukaavion perusteella funktiolla on

maksimikohta $x = -6$ ja maksimiarvo $h(-6) = \dfrac{(-6)^3}{(-6)^2 - 12} = -9$

sekä

minimikohta $x = 6$ ja minimiarvo $h(6) = \dfrac{6^3}{6^2 - 12} = 9$.

Vastaus

maksimikohta $x = -6$, maksimiarvo -9,
minimikohta $x = -6$, minimiarvo 9

K35

$f(x) = \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}$

Funktio on määritelty, kun $x \neq 0$.

$f(x) = \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}$

$f'(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^2}$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$f'(x) = 0$

$\frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^2} = 0$

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Nollakohdat toteuttavat määrittelyehdon.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa tai kohdassa, joissa derivaattafunktio ei ole määritelty. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$f'(-1) = -3 < 0$

$f'(-0{,}5) = 24 > 0$

$f'(0{,}5) = 24 > 0$

$f'(1) = -3 < 0$

	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	
$f(x)$	↘	↗	↗	↘	
	min		ei määr		max

Kulkukaavion perusteella funktiolla on

minimikohta $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ja minimiarvo $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -4\sqrt{2}$

sekä

maksimikohta $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ja maksimiarvo $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4\sqrt{2}$

Vastaus

minimikohta $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, minimiarvo $-4\sqrt{2}$,

maksimikohta $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, maksimiarvo $4\sqrt{2}$

K36

a) Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$, missä $-6 \le x \le 2$, nimittäjän nollakohta $x = 3$ ei kuulu tarkasteluvälille, joten funktio f on määritelty koko suljetulla välillä $[-6,2]$.

Määritetään funktion suurin ja pienin arvo välillä $[-6,2]$.
Jatkuva funktio f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin $[-6,2]$ päätepisteessä tai välille $]-6,2[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{D}x^2 \cdot (x-3) - x^2 \cdot \mathrm{D}(x-3)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{2x(x-3) - x^2 \cdot 1}{(x-3)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 6x - x^2}{(x-3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat

$$\begin{aligned} &\frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = 0 \qquad \Big| \cdot (x-3)^2 \ \ (\neq 0) \\ &x^2 - 6x = 0 \\ &x(x-6) = 0 \\ &x = 0 \quad \text{tai} \qquad x - 6 = 0 \\ &\qquad\qquad\quad x = 6 \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdista $x = 0$ kuuluu välille $]-6,2[$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$$\begin{aligned} &f(-6) = \frac{(-6)^2}{-6-3} = -4 \quad \text{pienin} \\ &f(2) = \frac{2^2}{2-3} = -4 \qquad \text{pienin} \\ &f(0) = \frac{0^2}{0-3} = 0 \qquad \text{suurin} \end{aligned}$$

Funktion suurin arvo on 0 ja pienin -4.

b) Funktio f on jatkuva, joten se saa myös kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa väliltä.

Funktio f saa siis kaikki arvot väliltä $[-4,0]$, joten funktion f arvojoukko on suljettu väli $[-4,0]$.

Vastaus
a) pienin arvo -4, suurin arvo 0
b) arvojoukko $[-4,0]$

K37

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{8x^2+2}{x^4+3}$ arvoja välillä $[-1,2]$.

Nimittäjä $x^4+3 \geq 3$ kaikilla *x*, joten funktio on määritelty koko tarkasteluvälillä.
Rationaalifunktio f on suljetulla välillä jatkuva ja se saa kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa väliltä.

Jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Derivoidaan.

$$f(x) = \frac{8x^2+2}{x^4+3}$$

$$f'(x) = \frac{-8x(2x^4+x^2-6)}{(x^4+3)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-8x(2x^4+x^2-6)}{(x^4+3)^2} = 0$$

$$x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{tai} \quad x = 0$$

Nollakohdista $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ja $x = 0$ kuuluvat tarkasteluvälille.
Lasketaan funktion arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa.

$$f(-1) = \frac{5}{2}$$

$$f(2) = \frac{34}{19}$$

$$f(0) = \frac{2}{3} \quad \text{pienin}$$

$$f(\tfrac{\sqrt{6}}{2}) = \frac{8}{3} \quad \text{suurin}$$

Funktion f suurin arvo on $\frac{8}{3}$ ja pienin arvo $\frac{2}{3}$,

joten se saa kaikki arvot suljetulta väliltä $[\frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$.

Funktion f arvojoukko on suljettu väli $[\frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$.

Vastaus

arvojoukko $[\frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$

K38

$$f(x)=\frac{5x-8}{3-x^2}$$

Lasketaan nimittäjän nollakohdat.

$3-x^2=0$

$x=-\sqrt{3}$ tai $x=\sqrt{3}$

Funktio $f(x)=\frac{5x-8}{3-x^2}$ on määritelty, kun $x\neq-\sqrt{3}$ ja $x\neq\sqrt{3}$.

Tangentti kulkee pisteen $(x_0,\,y_0)=(2,\,f(2))$ kautta ja tangentin kulmakerroin on $k=f'(2)$.

Lasketaan funktion f kuvaajan ja tangentin sivuamispisteen y-koordinaatti.

$$y_0=f(2)=\frac{5\cdot2-8}{3-2^2}=\frac{2}{-1}=-2$$

Derivoidaan funktio.

$$f(x)=\frac{5x-8}{3-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{5x^2-16x+15}{(3-x^2)^2}$$

Lasketaan tangentin kulmakerroin $k=f'(2)$.

$$k=f'(2)=\frac{5\cdot2^2-16\cdot2+15}{(3-2^2)^2}=3$$

Muodostetaan tangentin yhtälö.

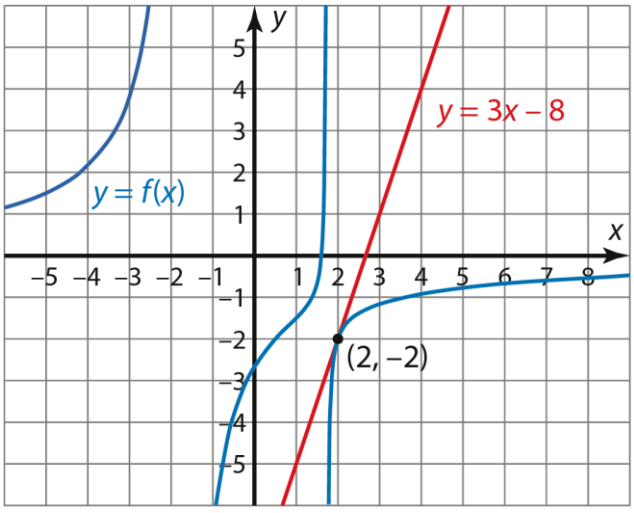
$$y-y_0=k(x-x_0)\qquad\left|\begin{matrix}(x_0,y_0)=(2,-2)\\k=3\end{matrix}\right.$$

$$y-(-2)=3(x-2)$$

$$y+2=3x-6$$

$$y=3x-8$$

Tarkistetaan saatu tulos piirtämällä.

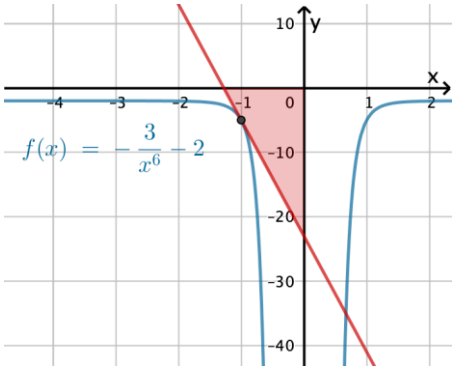


Vastaus
(2, -2)

K39

Funktio $f(x) = -\frac{3}{x^6} - 2$ on määritelty, kun $x \neq 0$.

Kohtaan $x = -1$ piirretty tangentti kulkee pisteen $(x_0, y_0) = (-1, f(-1))$ kautta ja tangentin kulmakerroin on $k = f'(-1)$.



Lasketaan käyrän $y = f(x)$ ja tangentin leikkauspisteen y-koordinaatti.

$$y_0 = f(-1) = -\frac{3}{(-1)^6} - 2 = -5$$

Derivoidaan funktio.

$$f(x) = -\frac{3}{x^6} - 2$$

$$f'(x) = \frac{18}{x^7}$$

Lasketaan tangentin kulmakerroin $k = f'(-1)$.

$$k = f'(-1) = \frac{18}{(-1)^7} = -18$$

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left| \begin{array}{l} (x_0, y_0) = (-1, -5) \\ k = -18 \end{array} \right.$$

$$y - (-5) = -18(x - (-1))$$

$$y + 5 = -18x - 18$$

$$y = -18x - 23$$

Lasketaan tangentin ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

Tangentti leikkaa y-akselin, kun $x = 0$.

$$y = -18 \cdot 0 - 23 = -23$$

Tangentti leikkaa x-akselin, kun $y = 0$.

$$0 = -18x - 23$$

$$x = -\frac{23}{18}$$

Kolmion kannaksi saadaan $\left|-\frac{23}{18}\right| = \frac{23}{18}$ ja korkeudeksi $|-23| = 23$.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{\frac{23}{18} \cdot 23}{2} = \frac{529}{36} (\approx 14{,}7)$$

Vastaus

$$A = \frac{529}{36}$$

K40

Merkitään akvaarion leveyttä kirjaimella x ja korkeutta
kirjaimella h. Akvaarion pituus on tällöin $3x$. Käytetään mittoina senttimetrejä.
Akvaarion tilavuus on $180\text{L} = 180\ \text{dm}^3 = 180\ 000\ \text{cm}^3$.

Ratkaistaan korkeus h akvaarion tilavuuden avulla.

$$V = 180\ 000$$
$$3x \cdot x \cdot h = 180\ 000$$
$$h = \frac{180\ 000}{3x^2} = \frac{60\ 000}{x^2}$$

Muodostetaan funktio A, joka ilmaisee akvaarion pinta-alan muuttujan x avulla.

$$A(x) = 2 \cdot 3x \cdot x + 2 \cdot 3x \cdot y + 2 \cdot x \cdot h$$
$$= 6x^2 + 6xh + 2xh \qquad \left| h = \frac{60\ 000}{x^2} \right.$$
$$= 6x^2 + 6x \cdot \frac{60\ 000}{x^2} + 2x \cdot \frac{60\ 000}{x^2}$$
$$= 6x^2 + \frac{360\ 000}{x} + \frac{120\ 000}{x}$$
$$= 6x^2 + \frac{480\ 000}{x}$$

Akvaarion seinien pituuksien on oltava positiivisia, joten saadaan määrittelyehto $x > 0$
(tällöin myös $h > 0$).
Akvaarion pinta-alaa kuvaa funktio
$A(x) = 6x^2 + \frac{480\ 000}{x}$, missä $x > 0$.

Määritetään CAS-laskimen MIN-toiminnon avulla kohta, jossa funktio A saa pienimmän arvonsa.
Saadaan ääriarvokohdaksi $x = 20\sqrt[3]{5} = 34{,}199...\ (\text{cm})$.

Akvaarion pinta-ala on pienin eli lasia kuluu vähiten,
kun $x = 34{,}1995...\ \text{cm} \approx 34\ \text{cm}$.
Lasketaan muiden sivujen pituudet.

$$3x = 3 \cdot 34{,}1995...\ \text{cm} = 102{,}598...\ \text{cm} \approx 103\ \text{cm}$$

$$h = \frac{60\ 000}{x^2}\ \text{cm} = \frac{60\ 000}{34{,}1995...^2}\ \text{cm} = 51{,}299...\ \text{cm} \approx 51\ \text{cm}$$

Akvaarion leveys on 34 cm, pituus 103 cm ja korkeus 51 cm.

Vastaus
leveys 34 cm, pituus 103 cm ja korkeus 51 cm

K41

Merkitään rasian pohjan sädettä kirjaimella r ja korkeutta kirjaimella h. Käytetään mittana senttimetriä.

Rasian tilavuus on $V = 3\,\text{L} = 3\ \text{dm}^3 = 3000\ \text{cm}^3$.

Ratkaistaan korkeus h rasian tilavuuden avulla.

$$V = 3000$$
$$\pi r^2 h = 3000$$
$$h = \frac{3000}{\pi r^2}$$

Muodostetaan rasian pinta-alan lauseke.

$$A = \pi r^2 + 2\pi rh$$
$$= \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{3000}{\pi r^2}$$
$$= \pi r^2 + \frac{6000}{r}$$

Rasian säteen ja korkeuden on oltava positiivisia, joten saadaan määrittelyehto $r > 0$ (tällöin myös $h > 0$).

Rasian pinta-alaa kuvaa funktio $A(r) = \pi r^2 + \frac{6000}{r}$, missä $r > 0$.

Määritetään CAS-laskimen MIN-toiminnolla kohta, jossa funktio A saa pienimmän arvonsa.

Saadaan ääriarvokohdaksi $r = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{\pi}} = 9{,}847...\ (\text{cm})$.

Tölkin pohjan säde on $r = 9{,}847...\ \text{cm} \approx 9{,}8\ \text{cm}$.

Tölkin korkeudeksi saadaan

$$h = \frac{3000}{\pi r^2} = \frac{3000}{\pi \cdot 9{,}84745...^2} = 9{,}84745...\ (\text{cm})\ .$$

Tölkin korkeus on siis $h = 9{,}84745...\ \text{cm} \approx 9{,}8\ \text{cm}$.

Vastaus
korkeus 9,8 cm, pohjan säde 9,8 cm

K42

$$g(x) = \frac{15}{x^2 - 2x + 4}$$

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$x^2 - 2x + 4 = 0$

Ei ratkaisua

Funktio g on siis määritelty kaikilla x.

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion g kulku derivaatan merkeistä.

$$g(x) = \frac{15}{x^2 - 2x + 4}$$

$$g'(x) = \frac{-30x + 30}{(x^2 - 2x + 4)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{-30x + 30}{(x^2 - 2x + 4)^2} = 0$$

$$x = 1$$

Laaditaan funktion g kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$g'(x) = \frac{-30x + 30}{(x^2 - 2x + 4)^2}$$

$$g'(0) = \frac{15}{8} > 0$$

$$g'(2) = -\frac{15}{8} < 0$$

	1	
$g'(x)$	+	−
$g(x)$	↗	↘
		min

Kulkukaavion perusteella funktio saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 1$.

Lasketaan suurin arvo.

$$g(1) = \frac{15}{1^2 - 2 \cdot 1 + 4} = 5$$

Kulkukaavion mukaan funktiolla ei ole minimikohtia, joten sillä ei ole pienintä arvoa.

Vastaus

suurin arvo 5, ei pienintä arvoa