

15.1

Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku välillä $[2, 3]$.

Funktion arvot	Nollakohta välillä	Välin keskipiste
$f(2) = -1 < 0$		
$f(3) = 12 > 0$	$]2; 3[$	2,5
$f(2,5) = 3,088... > 0$	$]2; 2,5[$	2,25
$f(2,25) = 0,594... > 0$	$]2; 2,25[$	2,125
$f(2,125) = -0,300... < 0$	$]2,125; 2,25[$	2,1875
$f(2,1875) = 0,121... > 0$	$]2,125; 2,1875[$	2,15625
$f(2,15625) = -0,095... < 0$	$]2,15625; 2,1875[$	2,171875
$f(2,171875) = 0,011... > 0$	$]2,15625; 2,171875[$	2,1640625
$f(2,1640625) = -0,042... < 0$	$]2,1640625; 2,171875[$	2,16796875
$f(2,16796875) = -0,015... < 0$	$]2,16796875; 2,171875[$	

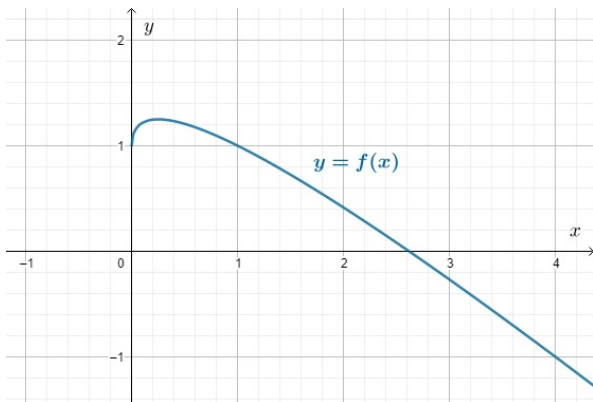
Viimeisen välin molemmat päätepisteet pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Nollakohta on noin 2,17.

Vastaus

2,17

15.2

Funktio $f(x) = \sqrt{x} - x + 1$ on määritelty ja jatkuva, kun $x \geq 0$.



Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi nollakohta välillä $]2, 3[$.
Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku välillä $[2, 3]$.

Funktion arvot	Nollakohta välillä	Välin keskipiste
$f(2) = 0,414... > 0$		
$f(3) = -0,267... < 0$	$]2; 3[$	2,5
$f(2,5) = 0,081... > 0$	$]2,5; 3[$	2,75
$f(2,75) = -0,091... < 0$	$]2,5; 2,75[$	2,625
$f(2,625) = -0,004... < 0$	$]2,5; 2,625[$	2,5625
$f(2,5625) = 0,038... > 0$	$]2,5625; 2,625[$	

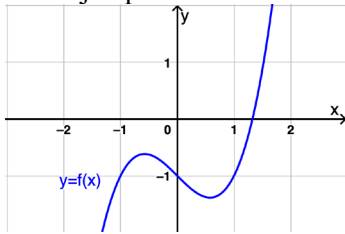
Viimeisen välin molemmat päätepisteet pyöristyvät yhden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Nollakohta on noin 2,6.

Vastaus

2,6

15.3

Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi nollakohta välillä $]1, 2[$.



Kirjoitetaan ohjelma.

```
#Ohjelma laskee puolitusmenetelmällä funktion  $f(x) = x^3 - x - 1$   
#ainoan nollakohdan likiarvon kuuden desimaalin tarkkuudella.
```

```
#Asetetaan aloitusvälin päätepisteet.
```

```
a = 1
```

```
b = 2
```

```
#Lasketaan välin keskipiste.
```

```
c = 0.5 * (a + b)
```

```
#Lasketaan välin pituus.
```

```
vali = abs(a - b)
```

```
#Lasketaan funktion arvo kohdassa a.
```

```
f_a = a ** 3 - a - 1
```

```
#Lasketaan funktion arvo kohdassa b.
```

```
f_b = b ** 3 - b - 1
```

```
#Lasketaan funktion arvo kohdassa c.
```

```
f_c = c ** 3 - c - 1
```

```
#Tutkitaan, onko välin pituus liian suuri ja ettei välin
```

```
#keskipiste ole funktion nollakohta.
```

```
while vali >= 0.0000001 and f_c != 0:
```

```
    #Tutkitaan saako funktio erimerkkiset arvot välin
```

```
    #alkupisteessä ja keskipisteessä.
```

```
    if f_a * f_c < 0:
```

```
        #Asetetaan keskipiste uudeksi loppupisteeksi.
```

```
        b = c
```

```
    else:
```

```
        #Asetetaan keskipiste uudeksi alkupisteeksi.
```

```
        a = c
```

```
    #Lasketaan välin uusi keskipiste.
```

```
    c = 0.5 * (a + b)
```

```
    #Lasketaan välin uusi pituus.
```

```
    vali = abs(a - b)
```

```
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa a.
```

```
    f_a = a ** 3 - a - 1
```

```
    #Lasektaan funktion arvo kohdassa c.
```

```
    f_c = c ** 3 - c - 1
```

```
print("Nollakohta on noin", round(c, 6))
```

Suoritetaan ohjelma.

Nollakohta on noin 1.324718

15.4

Kirjoitetaan ohjelma.

```
#Ohjelma laskee puolitusmenetelmällä funktion
#f(x) = sqrt(x) - 3 * x + x ** 2 - 4
#ainoan nollakohdan viiden desimaalin tarkkuudella.
#Ohjelma varmistaa, että f(a) * f(b) < 0.

import math

#Asetetaan aloitusvälin päätepisteet.
#Ohjelma tarkastaa, että ne arvot ovat epänegatiiviset.
a = float(input("Anna välin alkupiste: "))
while a < 0:
    print("Luku a ei saa olla pienempi kuin nolla.")
    a = float(input("Anna välin alkupiste: "))
b = float(input("Anna välin päätepiste: "))
while b < 0:
    print("Luku b ei saa olla pienempi kuin nolla.")
    b = float(input("Anna välin päätepiste: "))

#Lasketaan funktion arvo kohdassa a.
f_a = math.sqrt(a) - 3 * a + a ** 2 - 4
#Lasketaan funktion arvo kohdassa b.
f_b = math.sqrt(b) - 3 * b + b ** 2 - 4

while f_a * f_b >= 0:
    print("Annoit sopimattomat arvot.")
    print("f(a) =", f_a)
    print("f(b) =", f_b)
    a = float(input("Anna välin alkupiste: "))
    b = float(input("Anna välin päätepiste: "))
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa a.
    f_a = math.sqrt(a) - 3 * a + a ** 2 - 4
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa b.
    f_b = math.sqrt(b) - 3 * b + b ** 2 - 4

#Lasketaan välin keskipiste.
c = 0.5 * (a + b)
#Lasketaan välin pituus.
vali = abs(a - b)
#Lasketaan funktion arvo kohdassa c.
f_c = math.sqrt(c) - 3 * c + c ** 2 - 4

#Tutkitaan, onko välin pituus liian suuri ja ettei välin
#keskipiste ole funktion nollakohta.
while vali >= 0.000001 and f_c != 0:
    #Tutkitaan saako funktio erimerkkiset arvot välin
    #alkupisteessä ja keskipisteessä.
    if f_a * f_c < 0:
        #Asetetaan keskipiste uudeksi loppupisteeksi.
        b = c
    else:
        #Asetetaan keskipiste uudeksi alkupisteeksi.
        a = c
```

```
#Lasketaan välin uusi keskipiste.  
c = 0.5 * (a + b)  
#Lasketaan välin uusi pituus.  
vali = abs(a - b)  
#Lasketaan funktion arvo kohdassa a.  
f_a = math.sqrt(a) - 3 * a + a ** 2 - 4  
#Lasketaan funktion arvo kohdassa c.  
f_c = math.sqrt(c) - 3 * c + c ** 2 - 4  
  
print("Nollakohta on noin", round(c, 5))
```

Suoritetaan ohjelma.

```
Anna välin alkupiste: 0  
Anna välin päätepiste: 7  
Nollakohta on noin 3.58711
```

15.5

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^3 + x = 3$$

$$x^3 + x - 3 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 + x - 3$ nollakohdat.

Määritetään nollakohta kolmen desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

Taulukossa uudet päätepisteet a ja b määräytyvät aina laskun $f(a) \cdot f(c)$ lopputuloksen etumerkin perusteella. Jos $f(a) \cdot f(c) > 0$, eli arvot ovat samanmerkkiset, korvaa keskipiste c vanhan vasemman päätepisteeseen a . Jos taas $f(a) \cdot f(c) < 0$, eli arvot ovat vastakkaismerkkiset, korvaa keskipiste c vanhan oikean päätepisteeseen b .

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	f(a)	f(c)	f(a) f(c)
2	1	2	1,5	-1	1,875	-1,875
3	1	1,5	1,25	-1	0,203125	-0,20313
4	1	1,25	1,125	-1	-0,45117	0,451172
...						
14	1,213379	1,213623	1,213501	-0,00018	0,000484	-8,6E-08
15	1,213379	1,213501	1,21344	-0,00018	0,000153	-2,7E-08
16	1,213379	1,21344	1,213409	-0,00018	-1,2E-05	2,15E-09

Viimeisen välin $]a, b[$ molemmat päätepisteet pyöristyvät kolmen desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis $x \approx 1,213$.

Vastaus

1,213

15.7

Jotta yhtälöön $x - \sqrt{x+4} = 0$ voidaan soveltaa kiintopistemenetelmää, on se ensin saatettava muotoon $x = g(x)$. Muokataan yhtälöä.

$$x - \sqrt{x+4} = 0$$

$$x = \sqrt{x+4}$$

Määritellään $g(x) = \sqrt{x+4}$ ja iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 2$.

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = g(2) = 2,44948974\dots$$

$$x_3 = g(2,449\dots) = 2,53958456\dots$$

$$x_4 = g(2,539\dots) = 2,55726114\dots$$

...

$$x_{10} = g(2,561\dots) = 2,56155257\dots$$

$$x_{11} = g(2,561\dots) = 2,56155276\dots$$

$$x_{12} = g(2,561\dots) = 2,56155280\dots$$

$$x_{13} = g(2,561\dots) = 2,56155281\dots$$

Sijoitetaan x_2 funktioon g .

Sijoitetaan x_3 funktioon g .

Sijoitetaan x_4 funktioon g .

...

Sijoitetaan x_{10} funktioon g .

Sijoitetaan x_{11} funktioon g .

Sijoitetaan x_{12} funktioon g .

7. desimaali ei muutu.

Havaitaan, että iteroinnin arvot pyöristyvät kuuden desimaalin tarkkuudella samaan arvoon. Funktion g kiintopisteen ja yhtälön $x - \sqrt{x+4} = 0$ ratkaisun kuusidesimaalinen likiarvo on $x \approx 2,561553$.

Vastaus

2,561553

15.8

Yhtälön $x^3 - 5x + 7 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 - 5x + 7$ nollakohdat.

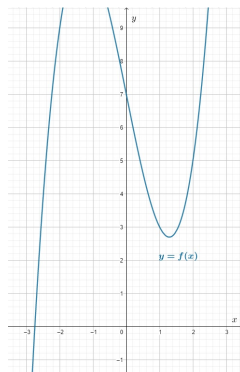
Kuvaajan perusteella yhtälön ratkaisu on välillä $]-3, -2[$.

Muokataan yhtälö muotoon $x = g(x)$.

$$x^3 - 5x + 7 = 0$$

$$x^3 = 5x - 7$$

$$x = \sqrt[3]{5x - 7}$$



Alkuperäisen yhtälön ratkaisu on funktion $g(x) = \sqrt[3]{5x - 7}$ kiintopiste.

Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = -3$. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A
1	-3
2	-2,80203933...
3	-2,75937064...
...	
6	-2,74747583...
7	-2,74737509...
8	-2,74735284...

Iteroinnin perusteella funktion g ainoan kiintopisteen kolmidesimaalinen likiarvo on $-2,747$. Tämä on samalla yhtälön ratkaisun likiarvo.

Vastaus

$-2,747$

15.9

Kirjoitetaan ohjelma.

```
#Ohjelma etsii funktion  $g(x) = 1/2 * x - x^{1/2} + 2$ 
#ainoan kiintopisteen viiden desimaalin tarkkuudella
#käyttäen alkuarvoa 1.

#Asetetaan iteroinnin alkuarvo.
x = 1
#Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
g_x = 1 / 2 * x - x ** (1 / 2) + 2

#Tutkitaan, onko arvo g_x liian kaukana arvosta x.
while abs(g_x - x) >= 0.000001:
    #Sijoitetaan muuttujan x uudeksi arvoksi g_x.
    x = g_x
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
    g_x = 1 / 2 * x - x ** (1 / 2) + 2

print("Likiarvo on:", round(g_x, 5))
```

Suoritetaan ohjelma.

Likiarvo on: 1.52786

15.10

Muokataan yhtälö $x^5 + x - 3 = 0$ muotoon $x = g(x)$.

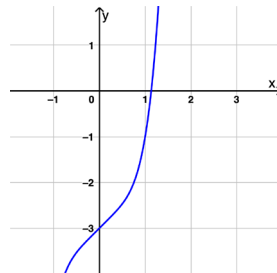
$$x^5 + x - 3 = 0 \quad | -x + 3$$

$$x^5 = -x + 3$$

$$x = \sqrt[5]{-x + 3}$$

Iteroinnin alkuarvon voi valita esimerkiksi piirtämällä funktion

$f(x) = x^5 + x - 3$ kuvaajan geometriaohjelmalla ja tutkimalla, millä välillä funktion nollakohta sijaitsee.



Kirjoitetaan ohjelma.

```
#Ohjelma etsii funktion g(x)= (-x + 3) ** (1/5)
#ainoan kiintopisteen kolmen desimaalin tarkkuudella
#käyttäen alkuarvoa 1.

#Asetetaan iteroinnin alkuarvo.
x = 1
#Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
g_x = (-x + 3) ** (1/5)

#Tutkitaan, onko arvo g_x liian kaukana arvosta x.
while abs(g_x - x) >= 0.0001:
    #Sijoitetaan muuttujan x uudeksi arvoksi g_x.
    x = g_x
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
    g_x = (-x + 3) ** (1/5)

print("Likiarvo on:", round(g_x, 3))
```

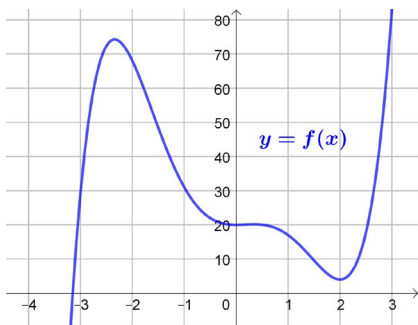
Suoritetaan ohjelma.

Likiarvo on: 1.133

Huomaa, että yhtälön voi muokata myös muotoon $x = -x^5 + 3$, mutta funktion $g(x) = -x^5 + 3$ iteroinnin arvot eivät lähesty yhtälön ratkaisua.

15.11

Yhtälön $x^5 - 8x^3 + 4x^2 + 20 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^5 - 8x^3 + 4x^2 + 20 = 0$ nollakohdat. Piirretään funktion kuvaaja.



Kuvaajan perusteella yhtälön ratkaisu on välillä $]-4, -3[$.

Muokataan yhtälö muotoon $x = g(x)$.

$$x^5 - 8x^3 + 4x^2 + 20 = 0$$

$$x^5 = 8x^3 - 4x^2 - 20$$

$$x = \sqrt[5]{8x^3 - 4x^2 - 20}$$

Alkuperäisen yhtälön ratkaisu on funktion $g(x) = \sqrt[5]{8x^3 - 4x^2 - 20}$ kiintopiste. Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = -4$. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A
1	-4
2	-3,5896264114171
3	-3,38065128883456
4	-3,27161462162511
5	-3,21401090550522
6	-3,18338230784589
7	-3,16704155129127
8	-3,15830793133531
9	-3,15363564113144
10	-3,15113480111089
11	-3,14979586482905
12	-3,14907890143405
13	-3,14869495749486
14	-3,1484893415808
15	-3,14837922434227
16	-3,14832025054643
17	-3,14828866665575
18	-3,14827175159117
19	-3,14826269254467
20	-3,14825784086919
21	-3,14825524249779
22	-3,14825385090929

Iteroinnin perusteella funktion g ainoan kiintopisteen kolmidesimaalinen likiarvo on $-3,148$. Tämä on samalla yhtälön ratkaisun likiarvo.

Vastaus

$-3,148$

15.12

a) Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 1$. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A
1	1
2	1,5
3	1,416666666...
4	1,414215686...
5	1,414213562...
6	1,414213562...

Iteroinnin perusteella kiintopisteen kahdeksandesimaalinen likiarvo on 1,41421356.

b) Kiintopisteen suuruudesta päätellen, se voisi olla $\sqrt{2}$. Lisäksi kokeilemalla $1,41421356^2 \approx 2$.

c) Ratkaistaan yhtälö $g(x) = x$.

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = x \quad | \cdot 2$$

$$x + \frac{2}{x} = 2x \quad | \cdot x \ (x \neq 0)$$

$$x^2 + 2 = 2x^2$$

$$2 = x^2$$

$$x = \sqrt{2} \text{ tai } x = -\sqrt{2}$$

Yhtälön ratkaisut ovat $\sqrt{2}$ ja $-\sqrt{2}$. Positiivinen kiintopiste on siis $\sqrt{2}$.

Vastaus

a) 1,41421356 b) $\sqrt{2}$ c) Yhtälön ratkaisut ovat $\sqrt{2}$ ja $-\sqrt{2}$.

15.13

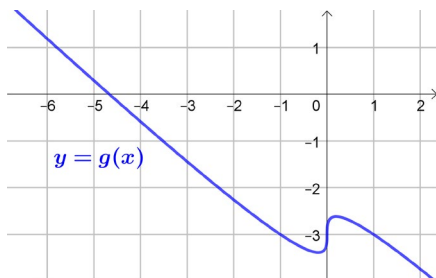
Muokataan yhtälö $f(x) = 3$ muotoon $g(x) = 0$.

$$f(x) = 3$$

$$\sqrt[3]{x} - x = 3$$

$$\sqrt[3]{x} - x - 3 = 0$$

Yhtälön $f(x) = 3$ ainoa ratkaisu on siis funktion $g(x) = \sqrt[3]{x} - x - 3$ ainoa nollakohta. Piirretään funktion g kuvaaja.



Kuvaajan perusteella nollakohta ja yhtälön ratkaisu ovat välillä $] -5, -4[$.

Taulukoidaan funktion g puolitusmenetelmän kulku välillä $[-5, -4]$.

Funktion arvot	Nollakohta välillä	Välin keskipiste
$g(-5) = 0,290... > 0$		
$g(-4) = -0,587... < 0$	$] -5; -4[$	$-4,5$
$g(-4,5) = -0,150... < 0$	$] -5; -4,5[$	$-4,75$
$g(-4,75) = 0,069... > 0$	$] -4,75; -4,5[$	$-4,625$
$g(-4,625) = -0,041... < 0$	$] -4,75; -4,625]$	$-4,6875$
$g(-4,6875) = 0,013... > 0$	$] -4,6875; -4,625[$	$-4,65625$
$g(-4,65625) = -0,013... < 0$	$] -4,6875; -4,65625[$	

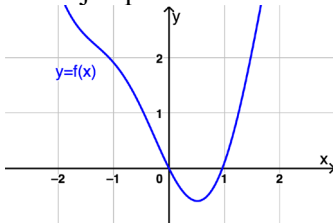
Viimeisen välin molemmat päätepisteet pyöristyvät yhden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Funktion g nollakohta ja yhtälön $f(x) = 3$ ratkaisu on noin $-4,7$.

Vastaus

$-4,7$

15.14

Kuvaajan perusteella funktion positiivinen nollakohta on välillä]0, 1[.



Kirjoitetaan ohjelma.

```
#Ohjelma laskee puolitusmenetelmällä funktion  $f(x) = x^3 - x - 1$   
#ainoan nollakohdan likiarvon kuuden desimaalin tarkkuudella.
```

```
#Asetetaan aloitusvälin päätepisteet.  
a = 1  
b = 2  
#Lasketaan välin keskipiste.  
c = 0.5 * (a + b)  
#Lasketaan välin pituus.  
vali = abs(a - b)  
#Lasketaan funktion arvo kohdassa a.  
f_a = a ** 3 - a - 1  
#Lasketaan funktion arvo kohdassa b.  
f_b = b ** 3 - b - 1  
#Lasketaan funktion arvo kohdassa c.  
f_c = c ** 3 - c - 1  
  
#Tutkitaan, onko välin pituus liian suuri ja ettei välin  
#keskipiste ole funktion nollakohta.  
while vali >= 0.0000001 and f_c != 0:  
    #Tutkitaan saako funktio erimerkkiset arvot välin  
    #alkupisteessä ja keskipisteessä.  
    if f_a * f_c < 0:  
        #Asetetaan keskipiste uudeksi loppupisteeksi.  
        b = c  
    else:  
        #Asetetaan keskipiste uudeksi alkupisteeksi.  
        a = c  
    #Lasketaan välin uusi keskipiste.  
    c = 0.5 * (a + b)  
    #Lasketaan välin uusi pituus.  
    vali = abs(a - b)  
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa a.  
    f_a = a ** 3 - a - 1  
    #Lasektaan funktion arvo kohdassa c.  
    f_c = c ** 3 - c - 1  
  
print("Nollakohta on noin", round(c, 6))
```

Suoritetaan ohjelma.

Nollakohta on noin 1.324718

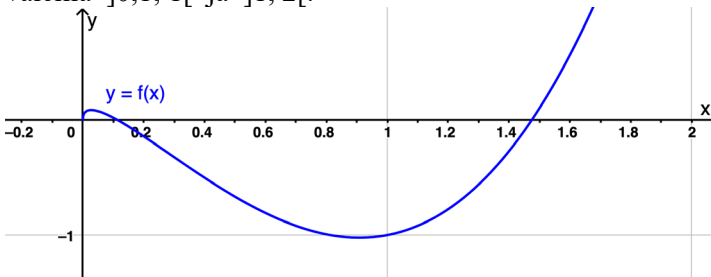
15.15

Kirjan 1. painoksessa tehtävänannossa on virhe.

Tehtävänannon pitäisi olla:

Yhtälöllä $x^3 + \sqrt{x} = 3x$ on kaksi positiivista ratkaisua. Tee ohjelma, joka etsii puolitusmenetelmällä niiden likiärvot kuuden desimaalin tarkkuudella.

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 + \sqrt{x} - 3x$ nollakohdat. Kuvaajan perusteella funktion f positiiviset nollakohdat ovat väleillä $]0,1[$ ja $]1,2[$.



Kirjoitetaan ohjelma. Ohjelma on toteutettu funktioiden avulla. Ohjelman voi toteuttaa myös ilman funktioita.

```
#Yhtälön  $x^3 + x^{1/2} = 3x$  ratkaisut ovat samat kuin
#funktion  $f(x) = x^3 + x^{1/2} - 3x$  nollakohdat.
#Ohjelma laskee puolitusmenetelmällä funktion
# $f(x) = x^3 + x^{1/2} - 3x$  positiiviset nollakohdat
#kuuden desimaalin tarkkuudella.

def main():
    #Asetetaan aloitusvälien päätepisteet. Etsitään ne esimerkiksi
    #piirtämällä funktion kuvaaja geometriaohjelmalla.
    a1 = 0.1
    b1 = 1

    a2 = 1
    b2 = 2

    #Lasketaan ratkaisut puolitusmenetelmällä.
    #Kutsutaan funktiota puolitus(a, b).
    c1 = puolitus(a1, b1)
    c2 = puolitus(a2, b2)
    print("Nollakohdat:")
    print(round(c1, 6))
    print(round(c2, 6))
```

```

def puolitus(a, b):
    #Lasketaan välin keskipiste.
    c = 0.5 * (a + b)
    #Lasketaan välin pituus.
    vali = abs(a - b)
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa a.
    f_a = a ** 3 + a ** (1 / 2) - 3 * a
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa b.
    f_b = b ** 3 + b ** (1 / 2) - 3 * b
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa c.
    f_c = c ** 3 + c ** (1 / 2) - 3 * c
    #Tutkitaan, onko välin pituus liian suuri ja ettei välin
    #keskipiste ole funktion nollakohta.
    while vali >= 0.0000001 and f_c != 0:
        #Tutkitaan saako funktio erimerkkiset arvot välin
        #alkupisteessä ja keskipisteessä.
        if f_a * f_c < 0:
            #Asetetaan keskipiste uudeksi loppupisteeksi.
            b = c
        else:
            #Asetetaan keskipiste uudeksi alkupisteeksi.
            a = c
    #Lasketaan välin uusi keskipiste.
    c = 0.5 * (a + b)
    #Lasketaan välin uusi pituus.
    vali = abs(a - b)
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa a.
    f_a = a ** 3 + a ** (1 / 2) - 3 * a
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa c.
    f_c = c ** 3 + c ** (1 / 2) - 3 * c
    return c

main()

```

Suoritetaan ohjelma.

Nollakohta on noin 0.967

15.16

Leikkauspisteen x -koordinaatti saadaan yhtälöstä $e^x = 6 - x$. Muokataan yhtälö muotoon $f(x) = 0$.

$$e^x = 6 - x$$

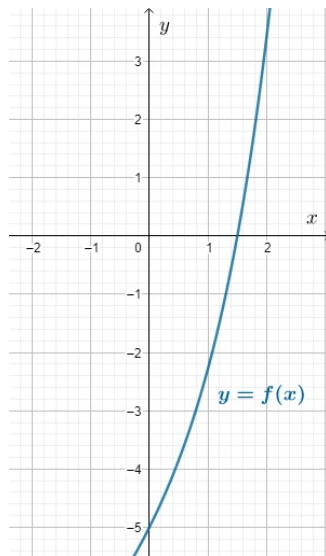
$$e^x + x - 6 = 0$$

Yhtälön ratkaisu on sama kuin funktion $f(x) = e^x + x - 6$ nollakohta.

Kuvaajan perusteella funktion f nollakohta on välillä $]1, 2[$.

Määritetään nollakohta kahden desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

Taulukossa uudet päätepisteet a ja b määräytyvät aina laskun $f(a) \cdot f(c)$ lopputuloksen etumerkin perusteella. Jos $f(a) \cdot f(c) > 0$, eli arvot ovat samanmerkkiset, korvaa keskipiste c vanhan vasemman päätepisteen a . Jos taas $f(a) \cdot f(c) < 0$, eli arvot ovat vastakkaismerkkiset, korvaa keskipiste c vanhan oikean päätepisteen b .



	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	$f(a)$	$f(c)$	$f(a)f(c)$
2	1	2	1,5	-2,281718172	-0,01831093	0,041780381
3	1,5	2	1,75	-0,01831093	1,504602676	-0,027550674
...						
9	1,5	1,5078125	1,50390625	-0,01831093	0,003136155	-5,74259E-05
10	1,5	1,50390625	1,501953125	-0,01831093	-0,007595952	0,000139089

Viimeisen välin $[a, b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Funktion f nollakohta ja käyrien leikkauspisteen x -koordinaatti on siis $x \approx 1,50$.

Leikkauspisteen y -koordinaatti saadaan sijoittamalla saatu x :n arvo suoran yhtälöön (tarkkuus säilyy pelkässä vähennyslaskussa).

$$y \approx 6 - 1,50 = 4,50$$

Leikkauspisteen koordinaatit ovat siis $x \approx 1,50$ ja $y \approx 4,50$.

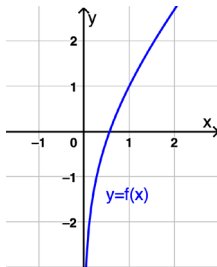
Vastaus

$$x \approx 1,50 \text{ ja } y \approx 4,50$$

15.17

Funktio $f(x) = \ln x + x$ on määritelty, kun $x > 0$.

Kuvaajan perusteella funktion $f(x) = \ln x + x$ nollakohta on välillä $]0,1; 1[$.



Kirjoitetaan ohjelma.

```
#Ohjelma laskee kolmannesmenetelmällä funktion  $f(x) = \ln x + x$   
#ainoan nollakohdan likiarvon kuuden desimaalin tarkkuudella.
```

```
import math
```

```
#Asetetaan aloitusvälin päätepisteet. Etsitään ne esimerkiksi  
#piirtämällä funktion kuvaaja geometriaohjelmalla.
```

```
a = 0.1
```

```
b = 1
```

```
#Lasketaan piste c.
```

```
c = (2 * a + b) / 3
```

```
#Lasketaan välin pituus.
```

```
vali = abs(a - b)
```

```
#Lasketaan funktion arvo kohdassa a.
```

```
f_a = math.log(a) + a
```

```
#Lasketaan funktion arvo kohdassa b.
```

```
f_b = math.log(b) + b
```

```
#Lasketaan funktion arvo kohdassa c.
```

```
f_c = math.log(c) + c
```

```

#Tutkitaan, onko välin pituus liian suuri ja ettei välin
#keskipiste ole funktion nollakohta.
while vali >= 0.0000001 and f_c != 0:
    #Tutkitaan saako funktio erimerkkiset arvot välin
    #alkupisteessä ja keskipisteessä.
    if f_a * f_c < 0:
        #Asetetaan keskipiste uudeksi loppupisteeksi.
        b = c
    else:
        #Asetetaan keskipiste uudeksi alkupisteeksi.
        a = c
    #Lasketaan piste c.
    c = (2 * a + b) / 3
    #Lasketaan välin uusi pituus.
    vali = abs(a - b)
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa a.
    f_a = math.log(a) + a
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa c.
    f_c = math.log(c) + c

print("Nollakohta on noin", round(c, 6))

```

Suoritetaan ohjelma.

Nollakohta on noin 0.967

15.18

Muokataan yhtälö muotoon $x = g(x)$.

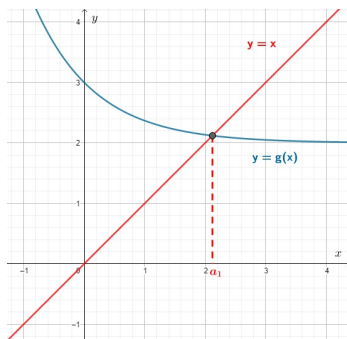
$$e^{-x} + 2 - x = 0$$

$$x = 2 + e^{-x}$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = 2 + e^{-x}$ kiintopisteet.

Piirretään funktion g kuvaaja ja suora $y = x$ samaan koordinaatistoon. Kuvan perusteella funktion g ainoa kiintopiste on välillä $]2, 3[$.

Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 2$. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.



	A
1	2
2	2,13533528...
...	
7	2,12002786...
8	2,12002828...

Iteroinnin perusteella funktion g ainoan kiintopisteen kuusidesimaalinen likiarvo on 2,120028.

Siis yhtälön $e^{-x} + 2 - x = 0$ ratkaisu on kuuden desimaalin tarkkuudella $x \approx 2,120028$.

Vastaus

2,120028

15.19

Muokataan yhtälö muotoon $x = g(x)$.

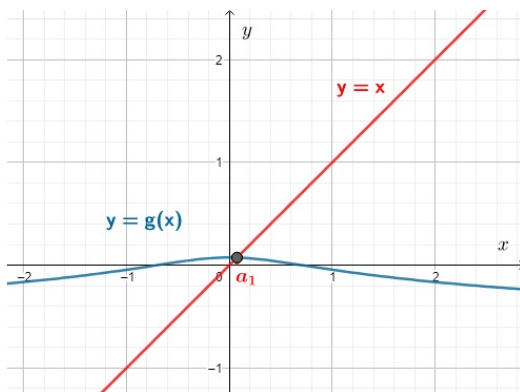
$$\lg(x^2 + \frac{1}{2}) + 4x = 0$$

$$4x = -\lg(x^2 + \frac{1}{2})$$

$$x = -\frac{1}{4}\lg(x^2 + \frac{1}{2})$$

Yhtälön ratkaisu on funktion $g(x) = -\frac{1}{4}\lg(x^2 + \frac{1}{2})$ kiintopiste.

Piirretään funktion g kuvaaja ja suora $y = x$ samaan koordinaatistoon. Kuvan perusteella funktion g ainoa kiintopiste on välillä $]0, 1[$.



Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 0$. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A
1	0
2	0,07525749...
3	0,07403455...
4	0,07407376...
5	0,07407251...
6	0,07407255...

Iteroinnin perusteella funktion g ainoan kiintopisteen kuusidesimaalinen likiarvo on 0,074073.

Yhtälön $\lg(x^2 + \frac{1}{2}) + 4x = 0$ ratkaisu on kuuden desimaalin tarkkuudella $x \approx 0,074073$.

Vastaus

0,074073

15.20

Muokataan yhtälö $x^2 + 7x - 11 = 0$ sopiviin muotoihin.

$$x^2 + 7x - 11 = 0 \quad | -7x + 11$$

$$x^2 = -7x + 11$$

$$x = -\sqrt{-7x + 11} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{-7x + 11}$$

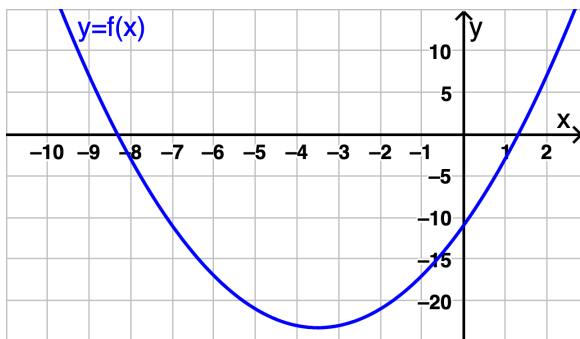
tai

$$x^2 + 7x - 11 = 0 \quad | -x^2 + 11$$

$$7x = -x^2 + 11 \quad | :7$$

$$x = \frac{-x^2 + 11}{7}$$

Kuvaajan perusteella funktion $f(x) = x^2 + 7x - 11$ nollakohdat ovat välillä $] -9, -8[$ ja $] 1, 2[$. Valitaan iteroinnin alkuarvoiksi -8 ja 1 .



Kirjoitetaan ohjelma ja testataan sitä eri kiintopistemuodoilla. Havaitaan, että sopivat muodot ovat $x = -\sqrt{-7x + 11}$ ja $x = \frac{-x^2 + 11}{7}$.

```

#Ohjelma etsii kiintopistemenetelmällä yhtälön
#x ** 2 - 7 * x - 11 = 0 ratkaisut viiden desimaalin
#tarkkuudella. Muokataan yhtälö muotoihin
# x = -(-7 * x + 11) ** (1/2) ja x = (-x ** 2 + 11) / 7.

#Asetetaan iteroinnin alkuarvo.
x = -8
#Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
g_x = -(-7 * x + 11) ** (1/2)

#Tutkitaan, onko arvo g_x liian kaukana arvosta x.
while abs(g_x - x) >= 0.000001:
    #Sijoitetaan muuttujan x uudeksi arvoksi g_x.
    x = g_x
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
    g_x = -(-7 * x + 11) ** (1/2)

print("Likiarvo on:", round(g_x, 5))

#Asetetaan iteroinnin alkuarvo.
x = 1
#Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
g_x = (-x ** 2 + 11) / 7.

#Tutkitaan, onko arvo g_x liian kaukana arvosta x.
while abs(g_x - x) >= 0.000001:
    #Sijoitetaan muuttujan x uudeksi arvoksi g_x.
    x = g_x
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
    g_x = (-x ** 2 + 11) / 7.

print("Likiarvo on:", round(g_x, 5))

```

Suoritetaan ohjelma.

```

Likiarvo on: -8.32183
Likiarvo on: 1.32183

```

15.21

Kirjoitetaan ohjelma.

```
#Ohjelma etsii funktion  $g(x) = \cos(1.2x) - 1.3$  kiintopisteitä  
#välillä ]-3, 0]. Ohjelma tutkii, mitkä kiintopisteet löytyvät  
#alkuarvoilla -3, -2, -1 ja 0.
```

```
import math
```

```
#Tutkitaan silmukan avulla, mitkä kiintopisteet  
#löytyvät alkuarvoilla -3, -2, -1 ja 0.  
#Asetetaan iteroinnin alkuarvo.  
for x in range(-3, 1):  
    print(f"Kiintopiste, kun  $x = \{x\}$ :")  
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa  $x$ .  
    g_x = math.cos(1.2 * x) - 1.3  
    #Tutkitaan, onko arvo g_x liian kaukana arvosta x.  
    while abs(g_x - x) >= 0.0000001:  
        #Sijoitetaan muuttujan x uudeksi arvoksi g_x.  
        x = g_x  
        #Lasketaan funktion arvo kohdassa x.  
        g_x = math.cos(1.2 * x) - 1.3  
  
    print(round(g_x, 5))
```

Suoritetaan ohjelma.

```
Kiintopiste, kun  $x = -3$ :  
-2.13988  
Kiintopiste, kun  $x = -2$ :  
-2.13988  
Kiintopiste, kun  $x = -1$ :  
-0.43049  
Kiintopiste, kun  $x = 0$ :  
-0.43049
```

Havaitaan, että ohjelma ei löydä keskimmäistä kiintopistettä.

15.22

Muokataan yhtälö $x = \log_3 x + 3x - x^3$ sopiviin muotoihin.

$$\begin{array}{lcl} x = \log_3 x + 3x - x^3 & | -3x & x^2 + 7x - 11 = 0 & | -x^2 + 11 \\ -2x = \log_3 x - x^3 & | :(-2) & 7x = -x^2 + 11 & | :7 \\ x = -\frac{\log_3 x - x^3}{2} & & x = \frac{-x^2 + 11}{7} \end{array}$$

Kirjoitetaan ohjelma.

```
#Ohjelma etsii kiintopistemenetelmällä funktion
#f(x) = log(x, 3) + 3 * x - x **3 kaksi positiivista
#kiintopistettä viiden desimaalin
#tarkkuudella. Muokataan kiintopisteyhtälö
#x = log(x, 3) + 3 * x - x **3 muotoihin
#x = -(math.log(x, 3) - x ** 3) / 2 ja
#x = (math.log(x, 3) + 2 * x ) ** (1/3).
```

```
import math
#Asetetaan iteroinnin alkuarvo.
x = 1
#Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
g_x = -(math.log(x, 3) - x ** 3) / 2

#Tutkitaan, onko arvo g_x liian kaukana arvosta x.
while abs(g_x - x) >= 0.000001:
    #Sijoitetaan muuttujan x uudeksi arvoksi g_x.
    x = g_x
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
    g_x = -(math.log(x, 3) - x ** 3) / 2

print("Kiintopiste:", round(g_x, 5))
```

```
#Asetetaan iteroinnin alkuarvo.
x = 1
#Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
g_x = (math.log(x, 3) + 2 * x ) ** (1/3)

#Tutkitaan, onko arvo g_x liian kaukana arvosta x.
while abs(g_x - x) >= 0.000001:
    #Sijoitetaan muuttujan x uudeksi arvoksi g_x.
    x = g_x
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
    g_x = (math.log(x, 3) + 2 * x ) ** (1/3)

print("Kiintopiste:", round(g_x, 5))
```

Suoritetaan ohjelma.

Kiintopiste: 0.42657
Kiintopiste: 1.49857

15.23

a) Muokataan yhtälö $x^3 + 2x - 4 = 0$ muotoon $x = 2 - \frac{1}{2}x^3$.

$$x^3 + 2x - 4 = 0 \quad | +4 - x^3$$

$$2x = 4 - x^3 \quad | : 2$$

$$x = 2 - \frac{1}{2}x^3$$

b) Muokataan yhtälö $x^3 + 2x - 4 = 0$ muotoon $x = \sqrt[3]{4 - 2x}$.

$$x^3 + 2x - 4 = 0 \quad | +4 - 2x$$

$$x^3 = 4 - 2x$$

$$x = \sqrt[3]{4 - 2x}$$

Yhtälön $x^3 + 2x - 4 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin a- ja b-kohdissa johdettujen yhtälöiden ratkaisut.

Iteroidaan funktioita

a) $g(x) = 2 - \frac{1}{2}x^3$ ja b) $g(x) = \sqrt[3]{4 - 2x}$

lähtien alkuarvosta $x_1 = 1$. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	a)	b)
1	1	1
2	1,5	1,25992105...
3	0,3125	1,13964436...
4	1,98474121...	1,19831041...
...		
10	3,21076E+47	1,17973783...
11	-1,655E+142	1,17939937...

Iteroinnin perusteella näyttää, että a-kohdan funktiolla suoritettu iterointi ei suppene kohti yhtälön juurta. b-kohdan funktiolla iteraatiot suppenevat kohti ratkaisua.

Vastaus

a) Ei suppene kohti yhtälön ratkaisua.

b) Suppenee kohti yhtälön ratkaisua.

15.24

a) Iteroidaan funktiota $g(x) = 2 + \ln x$ alkuarvauksella $x_0 = 1$.

x_n	Iteraation arvo
x_0	1
x_1	2
x_2	2,69314718...
...	
x_9	3,14602684...
x_{10}	3,14614033...

Iteroinnin perusteella $x_{10} \approx 3,146$.

b) Muokataan yhtälöä.

$$x = 2 + \ln x$$

$$x - 2 = \log_e x$$

$$x = e^{x-2}$$

Iteroidaan funktiota $h(x) = e^{x-2}$ alkuarvauksella $x_0 = 1$.

x_n	Iteraatio
x_0	1
x_1	0,36787944...
x_2	0,19551453...
...	
x_9	0,15859443...
x_{10}	0,15859435...

Iteroinnin perusteella toinen ratkaisu on $x_{10} \approx 0,159$.

Vastaus

a) $x_{10} \approx 3,146$

b) $x = e^{x-2}$, $x_{10} \approx 0,159$

15.25

Kirjoitetaan ohjelma.

```
#Ohjelma etsii funktion  $g(x) = 3.5 * x * (1 - x)$ 
#kiintopistettä alkuarvolla  $x = 0.7$ 

#Asetetaan iteroinnin alkuarvo.
x = 0.7
#Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
g_x = 3.5 * x * (1 - x)

#Tutkitaan, onko arvo g_x liian kaukana arvosta x.
while abs(g_x - x) >= 0.000001:
    #Sijoitetaan muuttujan x uudeksi arvoksi g_x.
    x = g_x
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
    g_x = 3.5 * x * (1 - x)
    #Tulostetaan funktion arvo kohdassa x.
    print(g_x)

print("Kiintopiste:", round(g_x, 5))
```

Suoritetaan ohjelma.

```
0.6817124999999999
0.7594319857031251
0.6394326567794671
0.8069548697819675
0.5452254777099738
0.8678412965806663
0.40142473185448996
0.8409902077851429
0.4680398736812578
0.8714249261399151
0.39215233484685524
0.8342910839235531
0.48387314923225594
0.8740897363951023
0.3851990419334499
0.8288725900945078
0.49644986819585457
0.8749558879746062
0.38292828725611094
0.8270297492632431
0.5006804008388711
0.8749983796914447
0.38281675330076886
...
```

Havaitaan, että iterointi ei suppene kohti positiivista kiintopistettä.

Tutkitaan iterointia eri alkuarvoilla. Havaitaan, että jos alkuarvoksi valitsee positiivisen kiintopisteen $\frac{5}{7}$ tai sen riittävän tarkan likiarvon (esim. kuusidesimaalisen likiarvon) iterointi suppenee kohti kiintopistettä. Vaikuttaa siltä, että muilla alkuarvoilla iterointi jää heilahtelemaan.

15.26

Kirjoitetaan ohjelma.

```
#Ohjelma etsii funktion  $f(x) = x^5 - 4x - 4$  ainoan
#nollakohdan kuusidesimaalisen likiarvon Newtonin menetelmällä
#käyttäen alkuarvoa  $x = 2$ .

#Asetetaan alkuarvo.
x = 2
#Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
f_x = x ** 5 - 4 * x - 4

#Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa x
f_dx = 5 * x ** 4 - 4

#Lasketaan iteroinnin arvo.
x_n = x - f_x / f_dx

#Tutkitaan, onko iteroinnin arvo x_n liian kaukana arvosta x.
while abs(x_n - x) >= 0.0000001:
    #Sijoitetaan muuttujan x uudeksi arvoksi x_n.
    x = x_n
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
    f_x = x ** 5 - 4 * x - 4
    #Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa x
    f_dx = 5 * x ** 4 - 4
    #Lasketaan iteroinnin arvo.
    x_n = x - f_x / f_dx

print("Nollakohta:", round(x_n, 6))
```

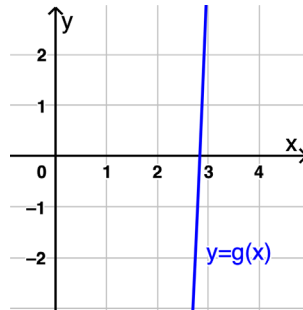
Suoritetaan ohjelma.

Nollakohta: 1.597006

15.27

Etsitään sopiva alkuarvo piirtämällä funktion $g(x) = x^3 - x - 20$ kuvaaja.

Valitaan alkuarvoksi $x_1 = 3$



Kirjoitetaan ohjelma.

```
#Ohjelma etsii funktion g(x) = x ** 3 - x - 20 ainoan
#nollakohdan kuusidesimaalisen likiarvon Newtonin menetelmällä.

#Asetetaan alkuarvo.
x = 3
#Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
g_x = x ** 3 - x - 20

#Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa x
g_dx = 3 * x ** 2 - 1

#Lasketaan iteroinnin arvo.
x_n = x - g_x / g_dx

#Tutkitaan, onko iteroinnin arvo x_n liian kaukana arvosta x.
while abs(x_n - x) >= 0.0000001:
    #Sijoitetaan muuttujan x uudeksi arvoksi x_n.
    x = x_n
    #Lasketaan funktion arvo kohdassa x.
    g_x = x ** 3 - x - 20
    #Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa x
    g_dx = 3 * x ** 2 - 1
    #Lasketaan iteroinnin arvo.
    x_n = x - g_x / g_dx

print("Nollakohta:", round(x_n, 6))
```

Suoritetaan ohjelma.

Nollakohta: 2.837139

15.28

a) Muokataan yhtälö muotoon $f(x) = 0$.

$$x^5 - x = 1$$

$$x^5 - x - 1 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^5 - x - 1$ nollakohtat.

Polynomifunktio f on kaikkialla jatkuva.

1) Osoitetaan ensin, että funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $[1, 2]$. Lasketaan funktion arvot kohdissa $x = 1$ ja $x = 2$.

$$f(1) = 1^5 - 1 - 1 = -1 < 0$$

$$f(2) = 2^5 - 2 - 1 = 29 > 0$$

Koska funktio on jatkuva välillä $[1, 2]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]1, 2[$.

2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla f on enintään yksi nollakohta. Tutkitaan funktion f kulkua derivaattafunktion avulla.

Derivaattafunktio $f'(x) = 5x^4 - 1$. Kun $1 \leq x \leq 2$, niin

$f'(x) = 5x^4 - 1 \geq 5 \cdot 1^4 - 1 = 4$. Koska funktion derivaatan arvot ovat välillä $[1, 2]$ positiivisia, on funktio aidosti kasvava koko välillä. Tällöin sillä voi olla enintään yksi nollakohta tällä välillä.

Kohtien 1 ja 2 perusteella funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta välillä $1 \leq x \leq 2$.

b) Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava funktiolle f .

$$f(x) = x^5 - x - 1$$

$$f'(x) = 5x^4 - 1$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^5 - x - 1}{5x^4 - 1}$$

Suoritetaan funktiolle g neljä iteraatioaskelta lähtien alkuarvosta $x_0 = 1$.

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1,25$$

$$x_2 = 1,17845939\dots$$

$$x_3 = 1,16753738\dots$$

$$x_4 = 1,16730408\dots$$

Viimeisen iteraation likiarvo kolmen desimaalin tarkkuudella on $1,167$.
Nollakohdan likiarvo on siis $x_4 \approx 1,167$.

Vastaus

b) $x_4 \approx 1,167$

15.29

Funktion f kuvaajalle kohtaan x_1 piirretty tangenttisuora kulkee pisteen $(x_1, f(x_1))$ kautta ja sen kulmakerroin on $f'(x_1)$. Muodostetaan tangenttisuoran yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

$$y - f(x_1) = f'(x_1)x - f'(x_1)x_1$$

$$y = f'(x_1)x - f'(x_1)x_1 + f(x_1)$$

Ratkaistaan tangenttisuoran ja x -akselin leikkauskohta yhtälöstä. Leikkauskohdassa $y = 0$.

$$0 = f'(x_1)x - f'(x_1)x_1 + f(x_1)$$

$$-f'(x_1)x = -f'(x_1)x_1 + f(x_1) \quad | : (-f'(x_1)) \quad (\neq 0)$$

$$x = \frac{-f'(x_1)x_1}{-f'(x_1)} + \frac{f(x_1)}{-f'(x_1)}$$

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Edellinen ratkaisu on pätevä, jos $f'(x_1) \neq 0$, eli jos kuvaajalle kohtaan x_1 piirretty tangentti ei ole vaakasuora. Tutkitaan, mitä tapahtuu tilanteessa $f'(x_1) = 0$.

$$0 = f'(x_1)x - f'(x_1)x_1 + f(x_1) \quad f'(x_1) = 0$$

$$0 = 0 \cdot x - 0 \cdot x_1 + f(x_1)$$

$$0 = f(x_1)$$

Tämä yhtälö toteutuu kaikilla x , eli tangenttisuora on x -akselin päällä, jos kohta x_1 on funktion f nollakohta. Jos $f(x_1) \neq 0$ ja $f'(x_1) = 0$, ei tangenttisuora leikkaa x -akselia lainkaan.

15.30

Luku $\sqrt{a}$ on funktion $f(x) = x^2 - a$ positiivinen nollakohta. Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava funktiolle f .

$$f(x) = x^2 - a$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

Muokataan kaavan oikeaa puolta.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \\ &= x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} + \frac{a}{2x_n} \\ &= x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{x_n} \\ &= \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{x_n} \\ &= \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \end{aligned}$$

Kaava on pyydetyn näköinen.