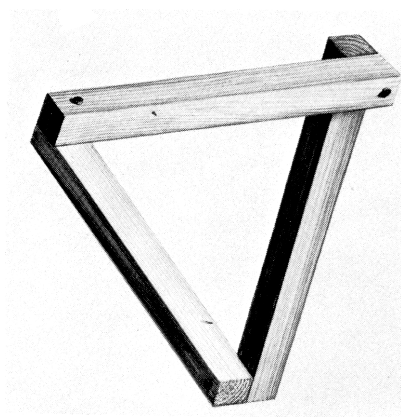


L'Infinito nell'Arte

Molti artisti hanno giocato con l'infinito sia dal punto di vista *grafico*, ad esempio **Maurits Cornelis Escher** (1898-1972) sia dal punto di vista *musicale*, ad esempio **Johann Sebastian Bach** (1685-1750).

Attività 10 – Il Triangolo Impossibile

Escher per le sue rappresentazioni ha utilizzato più volte una costruzione “impossibile”.
Si può costruire un triangolo con angoli di 90 gradi?
Chiedi ai docenti il materiale



Maurits Cornelis Escher

A partire dal 1955 Escher cominciò a lavorare per un diverso approccio all'infinito ed attraverso questa strada creò i suoi lavori più belli! Egli stesso affermava:



*“Che cosa è stato ottenuto
con la divisione periodica di una superficie?
Naturalmente non l'infinito,
ma certo un suo frammento...”*

Ed ecco la soluzione trovata successivamente da Escher: accanto a figure tutte uguali soltanto traslate, ruotate o simmetrizzate Escher utilizza anche la similitudine. Così una figura resta invariata come forma e **questo dà un'illusione di infinito.**

Attività 11 – L'Infinito nei disegni di Escher

Nella figura a fianco (Figura 1) è riprodotto lo schema utilizzato da M. C. Escher in alcune sue opere per ottenere la "suggestiva illusione" dell'infinito.

Figure, invarianti per la forma, che si rimpiccioliscono man mano che si prosegue nel procedimento:
limite delle infinitamente tante e infinitamente piccole

Scomponiamo la figura per poterla capire meglio (Figura 2 e Figura 3).

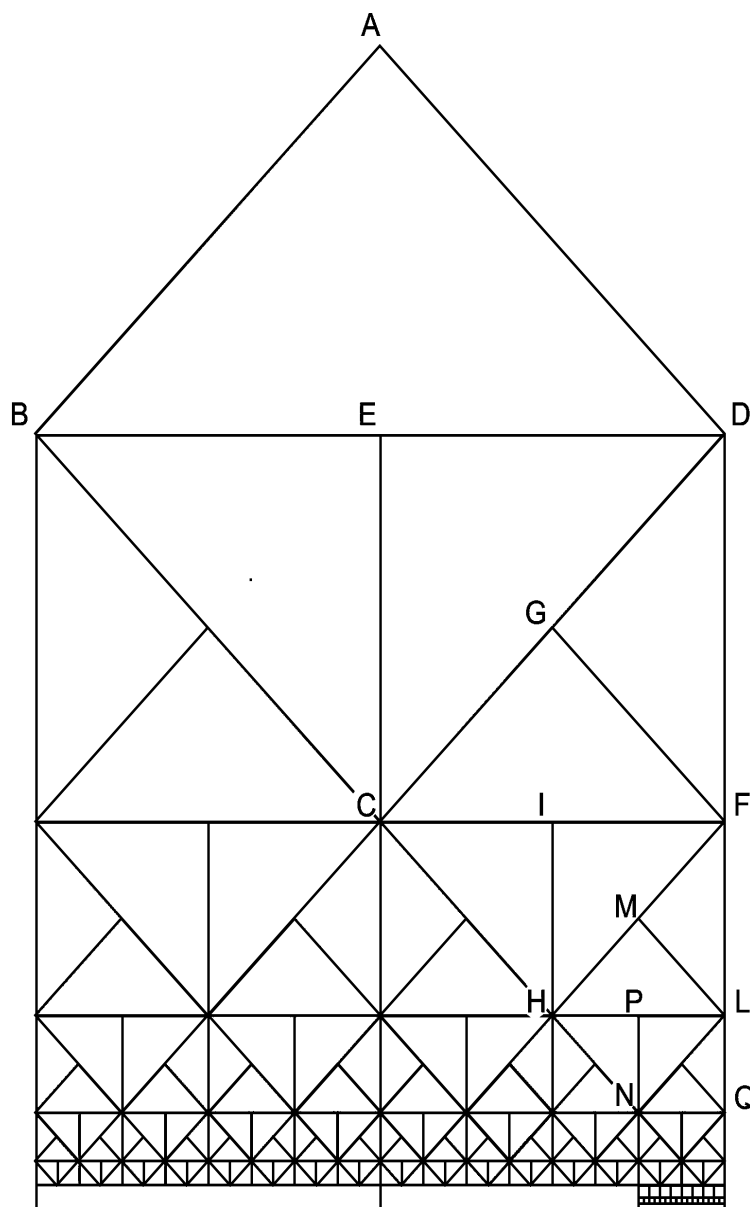


Figura 1

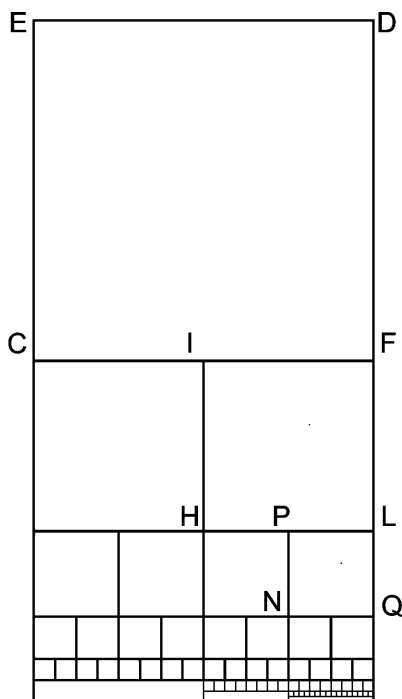


Figura 2

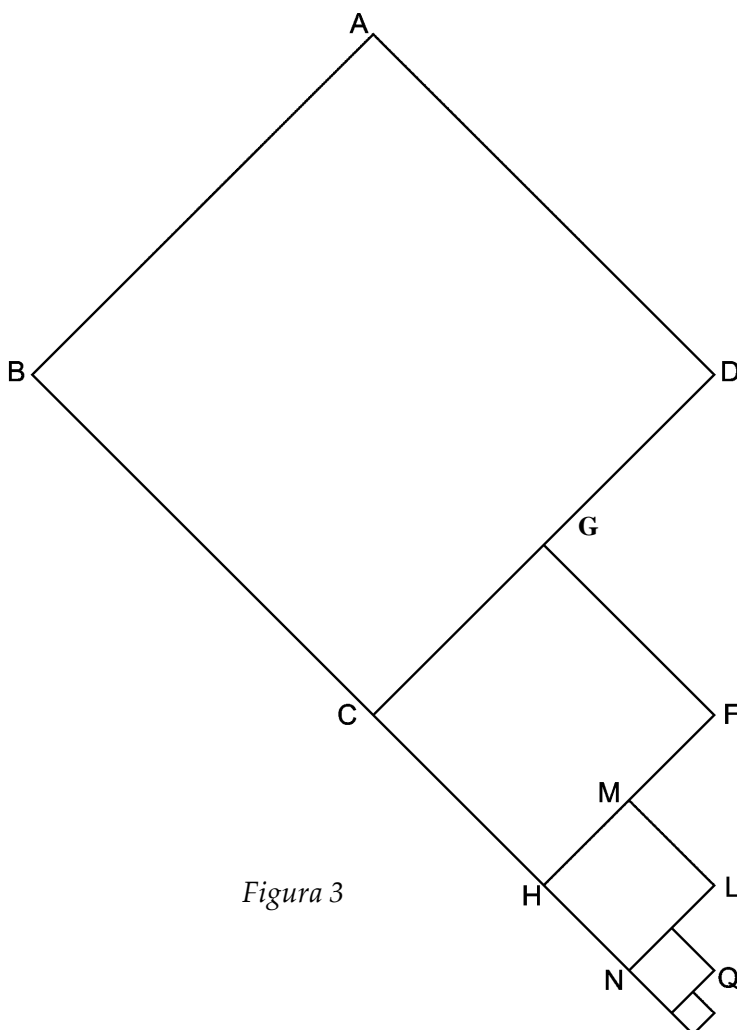


Figura 3

Se il lato del quadrato DECF della *Figura 2* misura a , il lato del quadrato FIHL misura e quello del successivo PNQL

Hai già capito che i lati dei quadrati sono in progressione di ragione

Anche nel disegno in *Figura 3* si possono individuare dei quadrati disposti analogamente.
 Se il quadrato più grande ha il lato che misura b , i quadrati più piccoli avranno i lati di misura

E ora possiamo tornare alla figura completa (*Figura 1*) in cui è possibile individuare delle successioni di quadrati ciascuno con il lato disposto lungo la diagonale del precedente.
 Precisamente ogni quadrato, eccetto il primo, è costruito
 E' possibile reiterare la costruzione fino a quando lo consentono i mezzi di scrittura, ma da matematici possiamo pensare che si possa reiterare

Se il lato del quadrato ABCD misura 1, il lato del quadrato DECF misura
 Continuando, si può passare dal lato di un quadrato a quello del successivo
 Ti diamo ancora un aiuto: ti è conveniente pensare che le aree dei quadrati sono successivamente una la della precedente, per cui i loro lati risulteranno uno dell'altro.

E non è ancora finita!

La Figura 1 si presta ad una nuova ed interessante interpretazione. Essa risulta costituita dal triangolo ABD (con AB di misura pari ad 1) e da un rettangolo con un lato fisso (BD), e l'altro che, procedendo nella costruzione, via via cresce

passando da DF che misura a DL

che misura a DQ

che misura

Iterando il procedimento all'infinito il lato variabile rappresenta, quindi, la somma della serie

.....

il cui valore (raccogliendo.....) è

.....

Il rettangolo diventa quindi

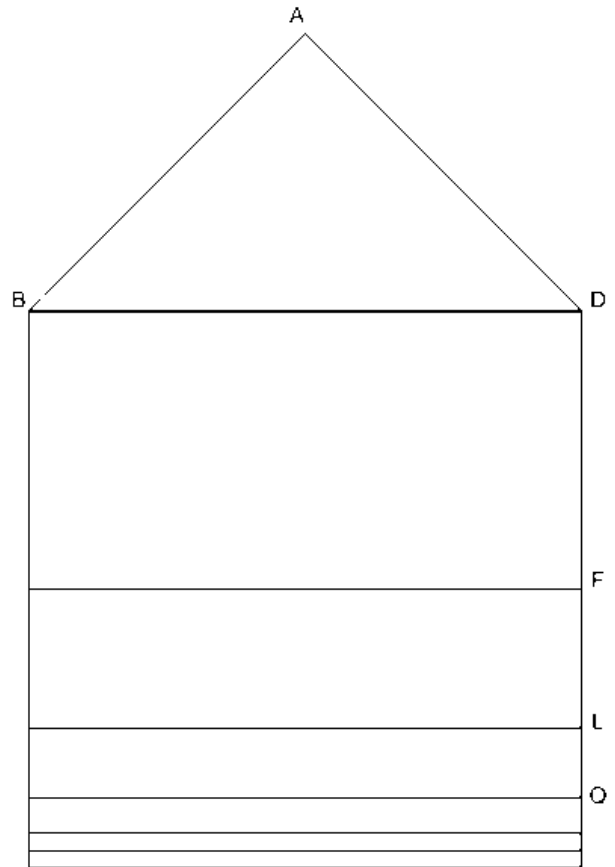


Figura 4

Ed ecco come Escher ha utilizzato i calcoli precedenti per realizzare le opere "Divisione Regolare del Piano" riprodotta in Figura 5a e "Limite del quadrato" in Figura 5b.

Figura 5a

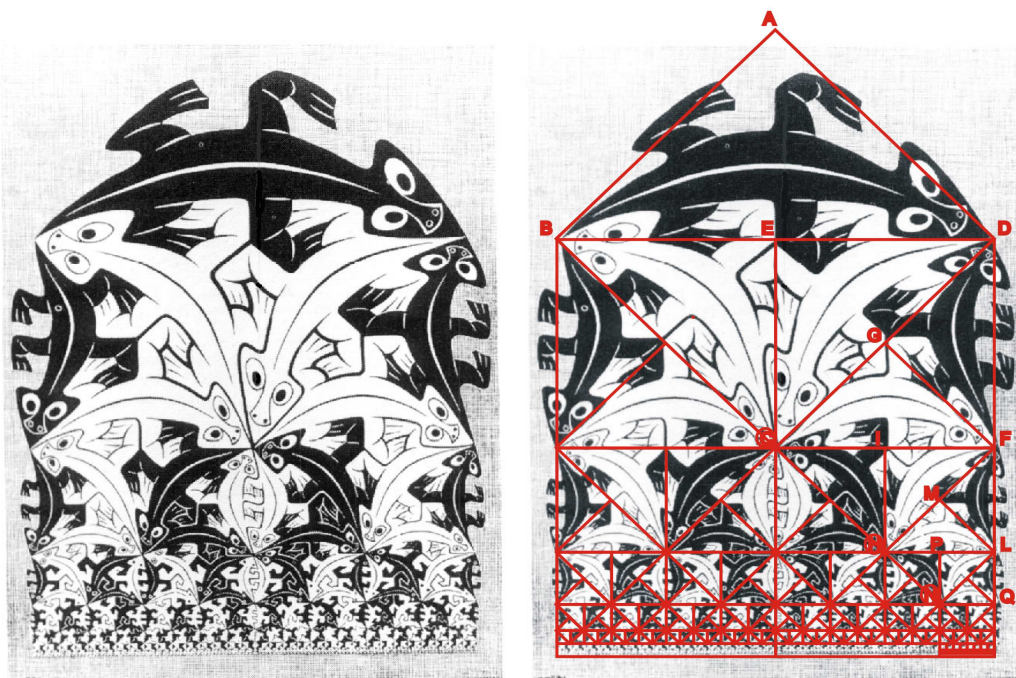
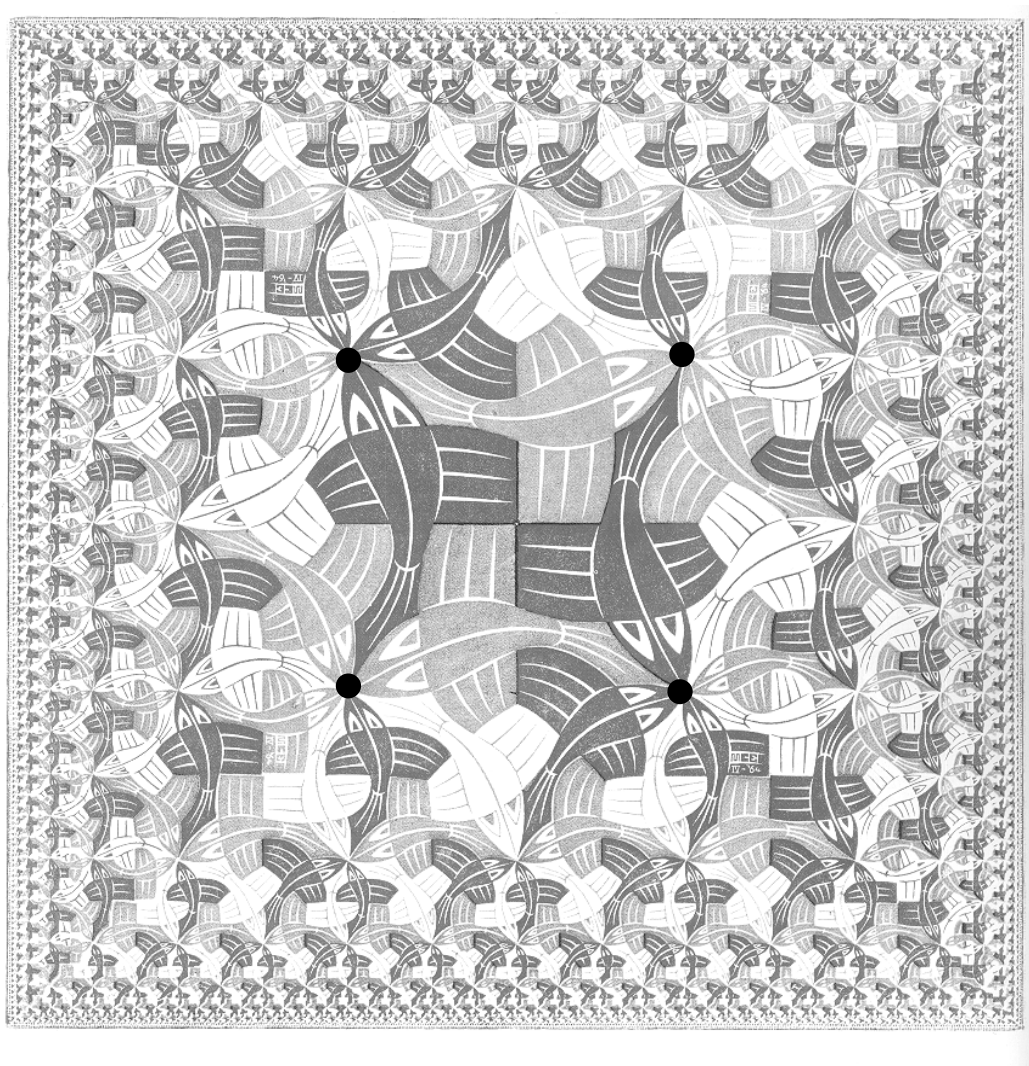


Figura 5b



Evidenziamo la matematica di Escher:

- Abbiamo segnato i punti dove si uniscono le bocche di quattro pesci
- **Unisci** i punti
- **Prolunga** una diagonale del quadrato che hai tracciato, fino al bordo del disegno
- **Evidenzia tu** altri punti dove si uniscono le bocche seguendo la direzione della diagonale
- **Traccia** i quadrati ottenuti

Osserva due quadrati con un vertice in comune. Che caratteristica hanno questi quadrati?.....

Attività 12 – Il problema della diagonale del quadrato

In matematica l'infinito appare presso i Greci nel VI sec. a.C.

I Greci furono i primi a riconoscere il problema dell'infinito, ma conobbero subito anche i tranelli ad esso collegati.

L'infinito così andava evitato ad ogni costo (*Pitagora*) oppure, se ciò non era possibile, almeno ridicolizzato attraverso paradossi (*Zenone*).

Di Zenone abbiamo già detto, occupiamoci ora di

Pitagora

Pitagora aveva una concezione particolare dei numeri: riteneva che i numeri servissero a comprendere, definire i fenomeni della natura, l'uomo, e tutto l'universo.

"Tutto è numero" diceva Pitagora, ma per **numeri** intendeva soltanto **i numeri interi** o **i rapporti tra essi, cioè i numeri**

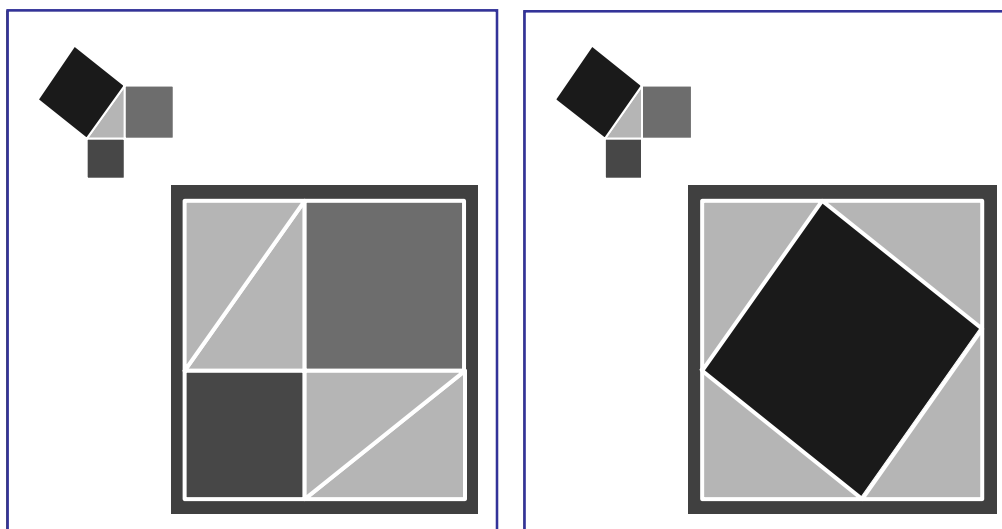
Dobbiamo inoltre a Pitagora il famoso teorema relativo ai triangoli rettangoli.

Ora queste due questioni, la concezione un po' particolare dei numeri ed il teorema trovato da Pitagora, fanno affiorare **il problema dell'infinito**.

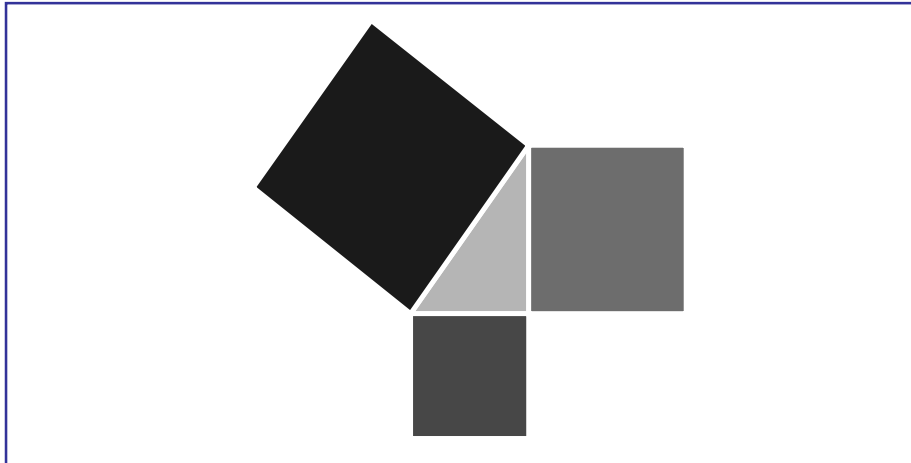


Alcuni storici raccontano che Pitagora per festeggiare la dimostrazione del suo teorema ordinò un'ecatombe, ovvero un sacrificio di 100 buoi: un numero decisamente rilevante. Nessuno però racconta come era condotta la sua dimostrazione. Siamo perciò liberi di immaginare ciò che vogliamo: ci piace pensare che Pitagora...

Racconta tu quello che potrebbe aver detto Pitagora tenendo conto delle due illustrazioni



Prendiamo due quadrati uguali e disponiamo al loro interno.....



Naturalmente tutto quello che abbiamo eseguito, osservato, calcolato rimane valido qualunque siano i due quadrati di partenza e qualunque siano i triangoli scelti: **basta che siano rettangoli**, in modo da poterli sistemare esattamente negli angoli del quadrato.

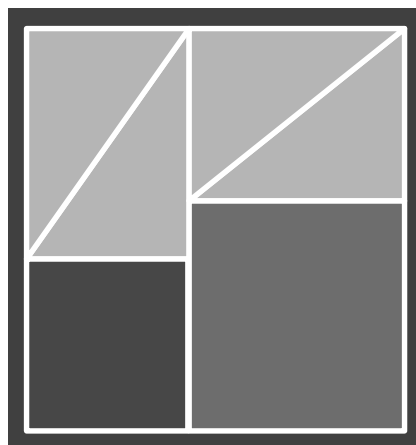
Possiamo quindi proprio affermare che:

Dato un qualunque triangolo rettangolo la somma dei due quadrati costruiti sui

.....

Siamo perfettamente convinti della validità del teorema e non abbiamo bisogno di altre prove, ma ci piacerebbe poter eseguire **materialmente** la *sovrapposizione* dei due quadrati più piccoli sul quadrato più grande.

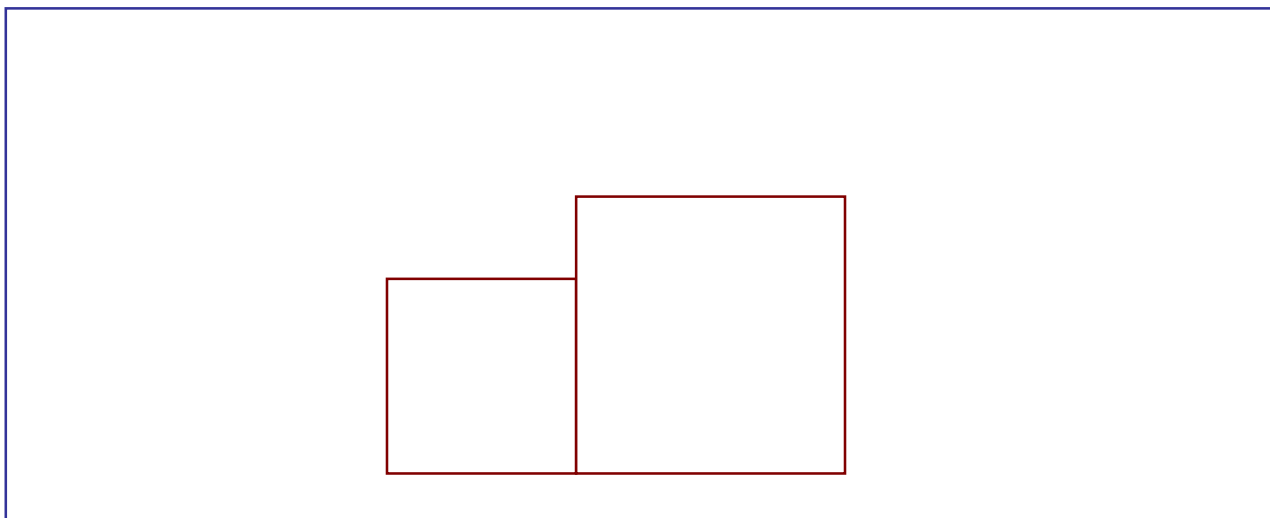
Iniziamo ad accostarli



La sovrapposizione dei due quadrati piccoli su quello grande, si può fare in tanti modi, ma naturalmente, da buon matematico, cercherai le situazioni che richiedono inizialmente un po' di ragionamento, ma poi ti fanno risparmiare lavoro pratico, ovvero meno tagli.

Immaginiamo di avere due quadrati piccoli uniti, con solo due tagli puoi ottenere un unico quadrato grande.

Prova su fogli di carta e poi riporta nel riquadro la tua soluzione.

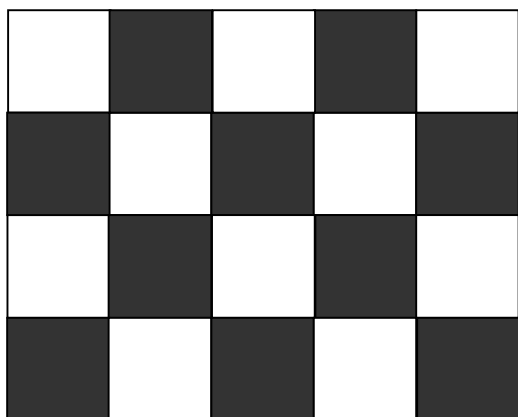


Richiedi ora il materiale relativo e confrontalo con la soluzione da te proposta.

Hai ritrovato la tua stessa soluzione?

Ritornando a Pitagora, alcuni storici hanno da poco ipotizzato che ad ispirarlo siano stati i disegni del pavimento della sua scuola. Pare che fosse un pavimento composto da quadrati bianchi e neri: la gente comune può guardare questi pavimenti e non scoprire nulla. Non è stato invece così per Pitagora che ha visto...

Che cosa avrà visto?



Una piastrella rotta proprio lungo la diagonale di un quadrato.

Rompi anche tu una piastrella ed osserva.

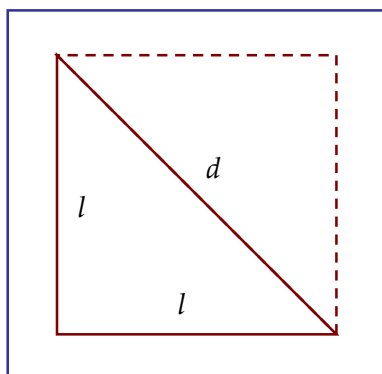


Potrebbero essere questi i due quadrati costruiti sui cateti di una mezza piastrella.

Ora come puoi tagliarli in modo da costruire il quadrato con il lato *costruito sull'ipotenusa* ?

Richiedi i quadrati di carta che potrebbero suggerirti la soluzione.

Il tuo taglio evidenzia che il nuovo quadrato avrà come lato



Ebbene, proprio la diagonale del quadrato si è rivelata fatale per Pitagora.

Prendiamo **il lato** come **unità di misura** cioè poniamo che esso misuri 1 (1 cm, 1 dm, 1m... non ha importanza)

Il teorema afferma che:

$$d^2 = l^2 + l^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Se si vuole conoscere la misura della diagonale, e non il quadrato costruito su questa, basta calcolare $\sqrt{2}$.

Fin qui non c'è nulla di strano. Se però indaghiamo su $\sqrt{2}$ ci accorgiamo che si tratta di un numero un po' particolare:

$\sqrt{2}$ non può essere un numero razionale

Parleremo perciò di **numero irrazionale**. Anche questo a noi sembra una cosa innocua, ma per Pitagora è stato diverso: crollava tutto **il suo modo di vedere il mondo**.

La scoperta della **irrazionalità di $\sqrt{2}$** lasciò sconcertati i Pitagorici; per un certo tempo si rifiutarono di considerare $\sqrt{2}$ come un numero (questo è accaduto ogni volta che è stato esteso il concetto di numero) e cercarono di tenere nascosta la scoperta.

Ma uno di loro, **Ippaso**, divulgò la notizia e finì male, morì infatti in un naufragio.

Ippaso rappresenta il modello di allievo che parla del suo insegnante. Ed è finito male! Meditate allievi.



A che cosa era dovuto lo sconcerto del grande maestro Pitagora?



Ricorda che Pitagora pensava che

1. tutto è numero,
2. ma i numeri ammessi sono solo i numeri naturali, che servono per contare, e i rapporti tra essi, cioè le frazioni che servono e sono sufficienti per misurare.

Con queste convinzioni, come poteva Pitagora accettare che non esiste una unità di misura per quanto piccola che possa essere contenuta un numero intero di volte nel lato e nella diagonale dello suo stesso quadrato, ovvero lato e diagonale sono **incommensurabili**.

Attività 13 – Dai Babilonesi alle calcolatrici



Ritorniamo a $\sqrt{2}$: si tratta dunque di un **numero irrazionale** ovvero di un numero **decimale illimitato non periodico**.
Sulle tavole è possibile trovare un numero decimale con 4 cifre dopo la virgola. Sulla calcolatrice puoi leggere fino a 10 o 11 cifre globalmente, in base alle potenzialità della calcolatrice.

Si è però scoperto che i Babilonesi avevano già calcolato il valore di $\sqrt{2}$ con una certa precisione.

Lo si può leggere dalle tavolette di argilla babilonesi che ci sono pervenute.

Proviamo ad immaginare il percorso che ha permesso di definire "l'algoritmo babilonese per il calcolo della $\sqrt{2}$ ".

Questa idea è stata presentata da Benoît Rittaud in "Storia e destino della $\sqrt{2}$ ", durante la conferenza del 15/12/2011 di Giovedì-Scienza.



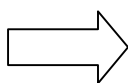
Consideriamo la relazione tra aree di quadrati e i loro lati.

Se abbiamo un quadrato di area 36, il lato sarà, se il quadrato ha area 9 il lato sarà, se il quadrato ha area 4 il lato sarà

Ma allora, se abbiamo un quadrato di area 2 il lato sarà

Ma come possiamo costruire un quadrato di area 2 ?

Proviamo per passi e partiamo da un rettangolo di area 2 i cui lati misurano 1 e 2 e cerchiamo di trasformarlo in un quadrato equivalente.



Per farlo dobbiamo “accorciare” il lato più lungo e allungare il lato più corto. Come?

Possiamo creare un rettangolo equivalente con un lato pari alla media dei due : $(2+1) : 2 = 3/2$.

Se l'area deve rimanere 2, indica x l'altro lato, hai $\frac{3}{2} \cdot x = 2$ quindi $x = \dots\dots\dots$

La figura che si ottiene non è ancora un quadrato: ripetiamo il procedimento.

Ora, un lato misurerà la media di $\frac{3}{2}$ e $\frac{4}{3}$ ovvero $\dots\dots\dots$, l'altro lato per mantenere area 2 dovrà necessariamente essere $\dots\dots\dots$

Se calcoli il valore decimale delle frazioni trovi che valgono $\dots\dots\dots$ e $\dots\dots\dots$, non è ancora un quadrato. Ripetiamo ancora.

Otteniamo un lato, calcolato dalla media dei due lati precedenti, che misura $\dots\dots\dots$ e l'altro lato, considerando che l'area deve essere 2, che misura $\dots\dots\dots$

Scrivi la misura del primo lato in forma decimale $\dots\dots\dots$ e la misura del secondo lato in forma decimale $\dots\dots\dots$

Come vedi la differenza tra i due lati è sempre minore, la figura si sta trasformando in un quadrato di area 2 e lato $\sqrt{2}$.

Ora riassumiamo in una sequenza di passi **l'algoritmo di origine babilonese**:

- 1) valuta in modo approssimato un valore che possa rappresentare la $\sqrt{2}$ ad es. il numero 1 (ma potresti partire da un numero qualunque, scelto a caso, ugualmente giungeresti ad un valore adeguato in pochi passaggi);
- 2) dividi il radicando, cioè il numero 2, per il valore di approssimazione scelto (nel nostro caso 2:1); *se il primo numero scelto è approssimato per difetto, come nel nostro caso, il quoziente sarà approssimato per eccesso e viceversa se si parte da un numero approssimato per eccesso. Il valore esatto si troverà tra i due valori individuati;*
- 3) calcola la media dei due valori; questo diventa la nuova approssimazione
- 4) riprendi a partire dalla seconda istruzione.



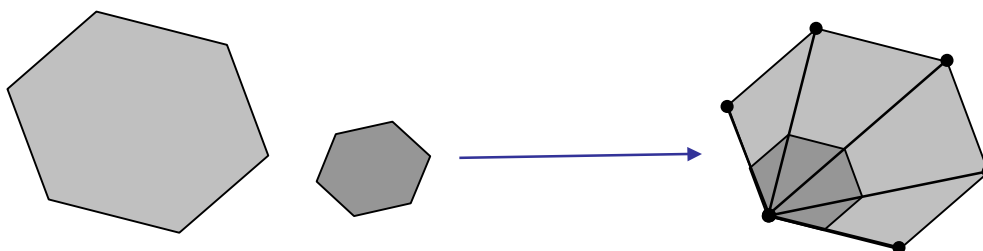
Domanda n°2

Abbiamo lavorato con la $\sqrt{2}$, ma nella vita quotidiana l'incontriamo?
 Prosegui con la prossima attività e lo scoprirai.

Attività 14 – I formati della carta

Osserva la figura:

Ti può suggerire una definizione intuitiva di **figure simili**.



Hai a tua disposizione quattro fogli: due rosa e due verdi. Richiedili ai docenti.
 Prendi un foglio verde e un foglio rosa e confrontali: sono semplicemente dei rettangoli.

Sono figure simili? Perché?

Dividi un foglio verde e un foglio rosa a metà piegando il lato più lungo, e confronta ciascuno dei nuovi rettangoli ottenuti con il foglio dello stesso colore che non hai piegato: sono simili? (per rispondere applica il procedimento precedente)

.....

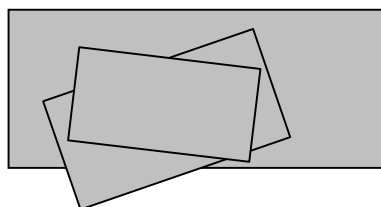
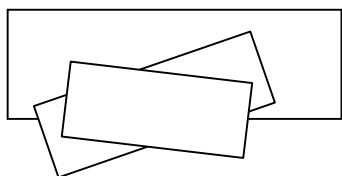
Continua a dividere per altre tre volte questi mezzi fogli, piegando ogni volta il lato più lungo. Avrai così 5 rettangoli per ciascun colore, aventi dimensioni diverse.

Numera tali fogli da 1 a 5, dal più grande (foglio intero) al più piccolo .

Che cosa puoi dire di ciascuno dei due insiemi di rettangoli ottenuti?

.....

.....



Considera l'insieme dei rettangoli tra loro simili. Confronta i rettangoli 5 e 3.

Puoi notare che tra i lati di queste figure c'è la seguente relazione:

.....

mentre tra le aree delle stesse due figure la relazione è

.....

Ciò non stupisce. Infatti si sa che se due rettangoli sono simili il rapporto tra le aree è del rapporto tra i due lati omologhi del rettangolo (tra i due lati più corti oppure tra i due lati più lunghi).

Viceversa il rapporto tra i lati omologhi è del rapporto delle aree.



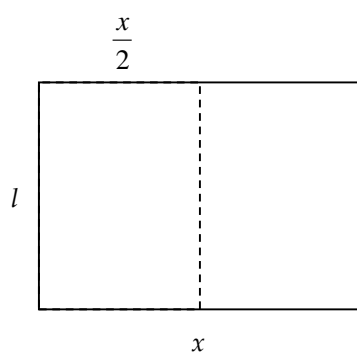
Considera i due rettangoli colorati numerati con 5 e 4. L'area del rettangolo 4 è dell'area del rettangolo 5 ($A_4 = \dots \cdot A_5$), quindi, poiché le due figure sono, il rapporto tra un lato del rettangolo 4 e il suo omologo del rettangolo 5 sarà
Quindi $l_4 = \dots l_5$

Supponi che il lato più corto del rettangolo 5 abbia misura 1 (cioè lo prendi come unità di misura) e scrivi di conseguenza sui cinque rettangoli colorati la misura di ciascun lato.

Il lato più lungo del rettangolo 1 misura

In modo del tutto sperimentale hai fatto una scoperta: i rettangoli che divisi a metà forniscono un rettangolo simile a quello di partenza sono quelli che hanno ad esempio lati e

oppure e cioè, in generale, sono quei rettangoli tali che



Allo stesso risultato si può facilmente arrivare con gli strumenti dell'algebra.

Se si vuole costruire un rettangolo che sia simile alla sua metà, indicando con l il lato minore e x il maggiore, dovrà risultare

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{l} \quad \text{e quindi} \quad l^2 = \dots \quad \text{e infine} \quad x^2 = \dots$$

Risolvendo si ottiene $x = \dots$

Il formato di carta standard è indicato con A4. Ma ci sono anche gli A3 (i fogli grandi), e gli A5 (i fogli dei quadernetti) ed anche A2, A1, A0 .

Cerchiamo di scoprire cosa si nasconde dietro queste sigle.

Misura con il righello i lati di un A4 e calcolane l'area in cm^2 :

L'area di un foglio A3 è quindi circa cm^2 . Quella di un A2 dovrebbe essere circa cm^2 e quella di un A1 circa cm^2 . Infine l'area di un A0 sarebbe cm^2 .

Bene, in realtà i **formati della carta** nascono proprio così: si parte da un rettangolo di lati proporzionali a 1 e $\sqrt{2}$, in modo che l'area sia 1m^2 (che è il formato A0) e poi si divide di volta in volta a metà ottenendo tutti i formati, che sono rettangoli fra loro simili.

Considera ora due rettangoli dell'altro colore: come si può ritagliare il più piccolo per renderli simili?

.....

Ed ora una domanda ecologica:

Se gli alberi potessero scegliere tra le due serie di rettangoli per il formato della carta, quale preferirebbero usare?

Perché?

.....
.....



Hai lavorato con $\sqrt{2}$, di numeri come questo ce ne sono tanti, ma proprio tanti, infiniti e di un infinito "grandissimo": ti proponiamo così di incontrarne altri.

Ma prima ancora una tappa per la Caccia al Tesoro.



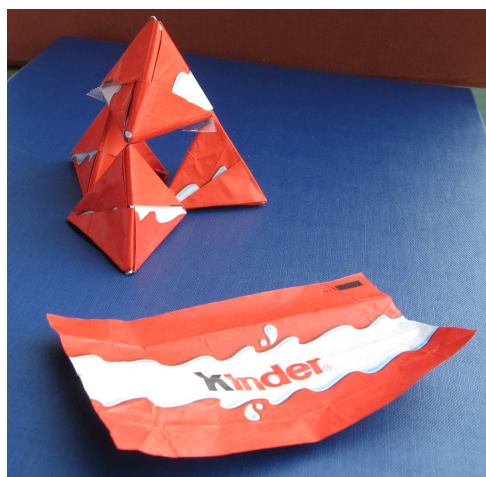
Domanda n°3

Attività 15 – Ti piace la cioccolata?

Chiedi ai docenti il materiale concreto.

Utilizziamo gli incarti per fare un'altra interessante scoperta matematica.

Attività con la carta del Kinder: costruzione di un tetraedro (modulo Macchi).



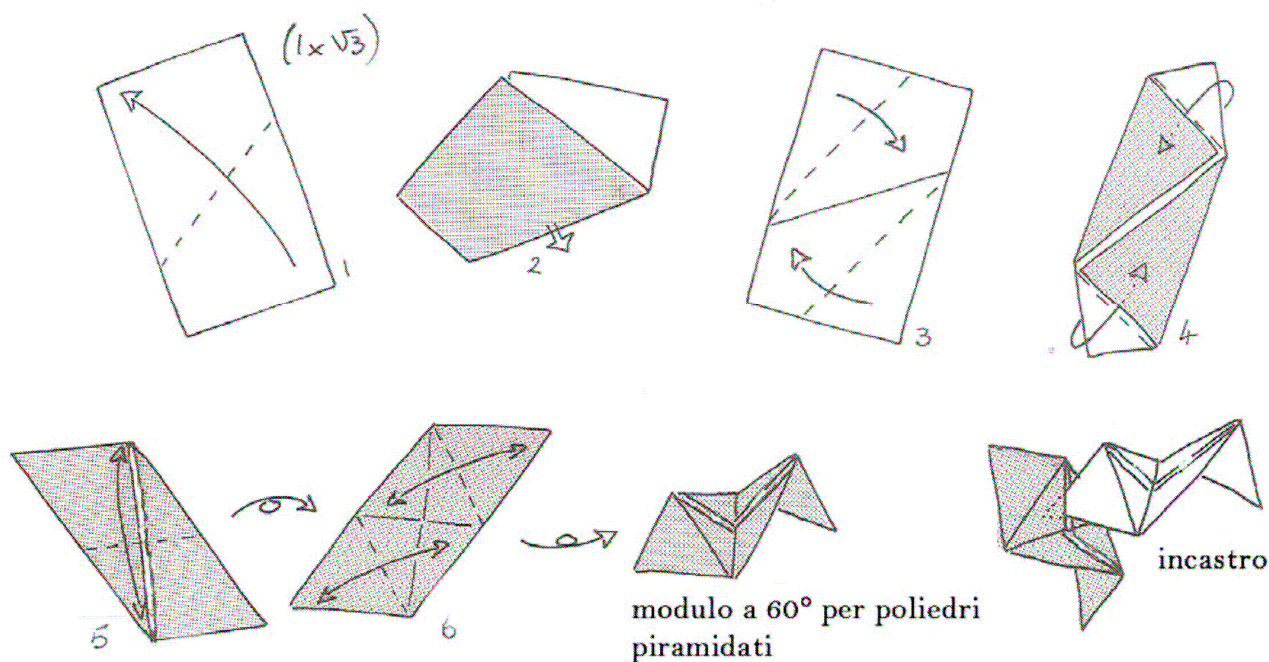
Con questo formato di carta è possibile costruire un tetraedro cioè un solido con 4 facce a forma di triangolo equilatero.

Con questi oggetti sarà possibile esplorare un altro aspetto dell'infinito.

Questi sono i passaggi per costruire il tetraedro con l'origami.

Modulo a 60°

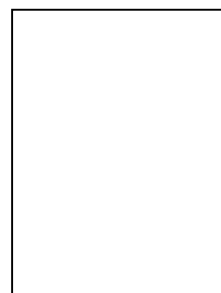
di Pietro Macchi



Per costruire molti tetraedri ti occorrono però molte carte e non è prudente mangiare troppa cioccolata.

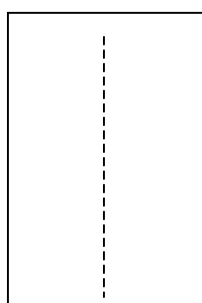
Pensiamo così di costruire i tetraedri utilizzando altra carta rettangolare che abbia le stesse caratteristiche della carta Kinder.

Iniziamo a costruire un triangolo equilatero.
Sei capace a farlo piegando un foglio di carta ?



Non preoccuparti ora lo facciamo insieme.¹

- Prendi un foglio di carta A6 e tieni in basso il lato corto.
- Chiama A il vertice inferiore sinistro e B il vertice inferiore destro.



- Piega il foglio a metà per il lungo, riapri e tienilo aperto davanti a te. La piega ottenuta è l'asse del segmento AB.
- Piega in modo che il vertice B tocchi l'asse e contemporaneamente la linea di piegatura passi per il vertice A.
- Riapri il foglio e chiama C il punto dell'asse che si sovrappone a B. Hai ottenuto il triangolo ABC: traccialo.

Hai un triangolo

Ogni affermazione va dimostrata!

Puoi sempre usare le piegature:

- la prima piega "fa capire" che $AC = \dots\dots\dots$ essendo C sull'asse di
- la seconda piega "fa capire" che $AB = \dots\dots\dots$

ABC è dunque un triangolo perciò fa al caso nostro.

Ora traccia l'altezza relativa alla base AB.

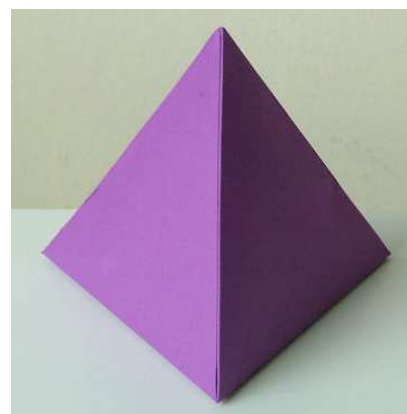
Il rettangolo che ha come misure questa altezza e metà base del triangolo equilatero ha esattamente i rapporti cercati .

Confronta il rettangolo con la carta Kinder.

Cosa osservi?....

Con questi rettangoli e solo con questi possiamo costruire i tetraedri perché il rapporto tra i lati è $1 : \sqrt{3}$.

Curiosità da matematici: perché altri formati della carta non ci danno lo stesso risultato?

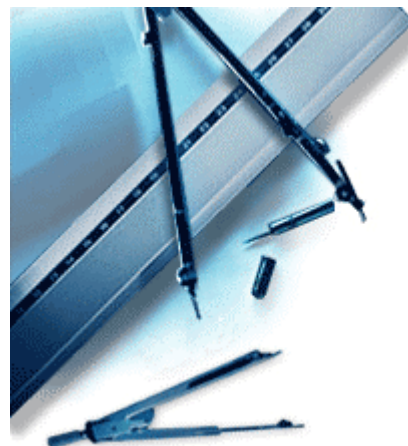
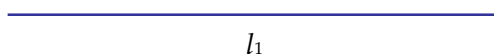


¹ Tratto da : A. Beutelspacher, M. Wagner, "Piega e spiega la matematica. Laboratorio di giochi matematici." Milano, Salani 2009

Ancora un altro numero irrazionale dalle caratteristiche piuttosto sorprendenti.

Attività 16 – Il numero aureo

Disegna un rettangolo che ti paia *ben proporzionato* e abbia come lato maggiore il segmento di lunghezza l_1



Utilizzando il compasso dividilo in due parti: un quadrato che ha per lato il suo lato minore (indicalo con l_2) e un nuovo rettangolo.

Misura con il righello i lati dei due rettangoli della figura e poi calcola il **rapporto tra il lato maggiore e il lato minore** del

rettangolo di partenza: $\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

rettangolo interno: $\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

Hai ottenuto lo stesso valore?..... *Se sì, complimenti!!*

Pare che già i Greci ritenessero che la *giusta proporzione* tra i lati di un rettangolo si realizza quando i due rapporti risultano uguali, cioè quando:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_2}{\dots\dots\dots}$$

ossia l_2 è *medio proporzionale* tra

Poiché questo significa che i due rettangoli sono, forse è proprio da questa regolarità che il nostro **“occhio-cervello”** ricava una impressione di piacevole armonia.

Pensando di costruire un rettangolo di questo tipo partendo dal lato maggiore di lunghezza l_1 , la lunghezza l_2 del lato minore deve essere dunque soluzione dell'equazione

$$\frac{l_1}{x} = \frac{x}{\dots\dots\dots} \quad \text{ossia} \quad x^2 + l_1x - \dots\dots\dots = 0.$$

Risolvendola ottieni: e

Scartando la soluzione negativa, hai trovato che il valore di l_2 deve essere

e quindi sostituendo e semplificando

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1}{l_1} = \frac{2}{\dots\dots\dots}$$

da cui razionalizzando e semplificando ottieni

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\dots\dots\dots}{2}$$

Si tratta di un numero **irrazionale**.

Il valore approssimato che fornisce la tua calcolatrice è

Questo numero, già chiamato nel Rinascimento “*Divina Proporzione*” (Luca Pacioli 1445 – 1517, è il “signore” col compasso in mano nella figura sottostante...) viene ora detto **rapporto aureo** e indicato dal XX secolo con la lettera greca φ (leggi ‘fi’).

Divina
proporzione
Opera a tutti gli ingegni perspicaci e curiosi necessaria, e necessaria a scienziato di filosofia: di prospettiva: di architettura: di musica: e di altre matematiche: sua utilissima: sottile: e ammirabile doctrina conseguire: e delectarass: con varie questioni de secretissima scientia.

Ricordi di aver già incontrato il numero φ nei tuoi studi?

.....

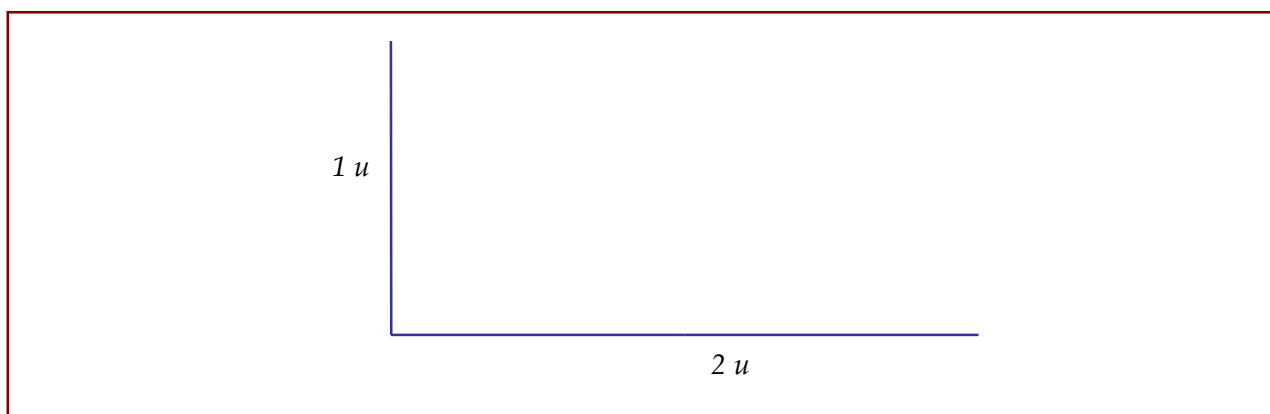
Se sì, precisa a proposito di quali questioni:

.....

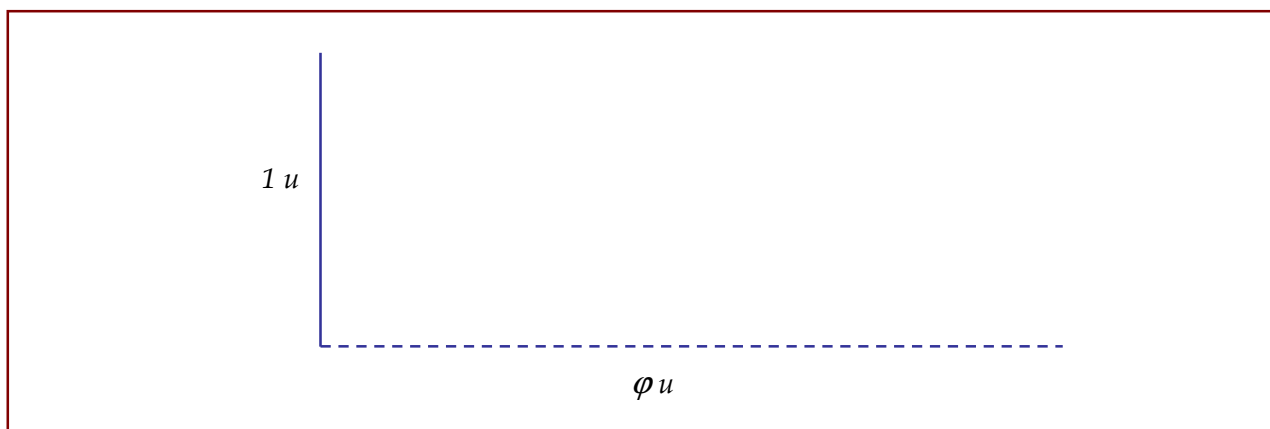


La lunghezza del segmento l_2 cioè $\frac{\sqrt{5}-1}{2}l_1$ viene detta **sezione aurea** (cioè parte aurea) di l_1

A questo punto sei in grado di costruire, utilizzando la riga e il compasso, un rettangolo di altezza $1 \cdot u$ e base $\varphi \cdot u$. Tenendo conto che $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ puoi iniziare costruendo un segmento di lunghezza $\sqrt{5} \cdot u$ che non è altro che la diagonale del rettangolo di lati $1 \cdot u$ e $2 \cdot u$

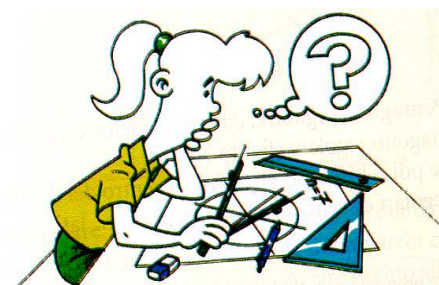


Il rettangolo richiesto è quindi (usa il compasso...):



Questo rettangolo i cui lati stanno in rapporto aureo viene detto anch'esso **rettangolo aureo**.

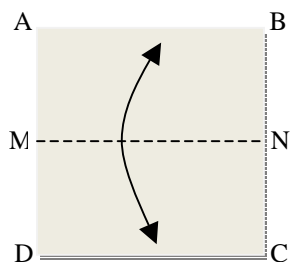
Ma è possibile costruire un rettangolo aureo solo piegando la carta come proposto nell'attività della pagina successiva.



Attività 17– Un origami aureo

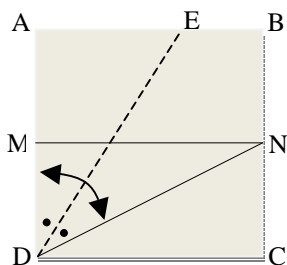
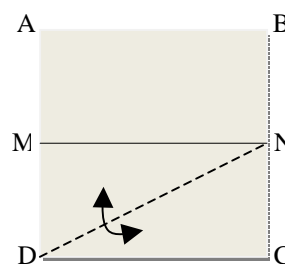
Prendi un foglio di carta quadrato e segui le istruzioni per costruire un rettangolo speciale.

Istruzioni passo passo



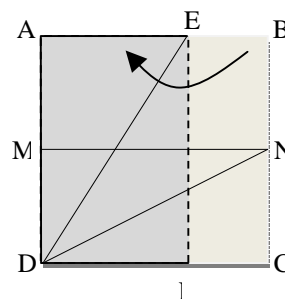
1. Hai un quadrato $ABCD$, quindi piega la mediana MN e riapri.

2. Piega la diagonale DN del rettangolo $CDMN$ e riapri.



3. Piega la bisettrice DE dell'angolo $\hat{A}DN$ (portando il lato DA sul lato DN) e riapri.

4. AE è la sezione aurea di AB : per ottenere un rettangolo aureo sovrapponi BE ad AE ed effettua la piega EF . Il rettangolo $AEFD$ che hai ottenuto è un **rettangolo aureo**.



Attività 18–Il triangolo aureo

Hai lavorato con il rettangolo aureo, ma esistono anche altri *poligoni aurei*.

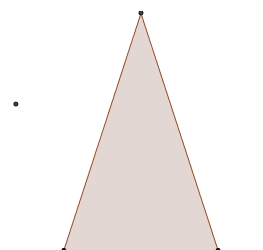
Ora ti proponiamo un'attività colorata con il triangolo aureo.

Prima, però, specifichiamo che cosa è, ti riportiamo la definizione tratta da wikipedia:

“Il **triangolo aureo** è un triangolo isoscele avente i due lati uguali in *rapporto aureo* con il terzo lato, $\varphi:1$ (1,618:1) e angoli di 36° , 72° e 72° .”

Ti diamo un triangolo aureo, segui le indicazioni .

- Piegando traccia la bisettrice di un angolo alla base
- Riapri



Osserva ora il risultato:

- Hai due triangoli, uno con angoli alla base di e un angolo al vertice di, ed è perciò un triangolo
- L'altro triangolo ha angoli alla base di e un angolo al vertice di ed è perciò un triangolo
- Ora piega nuovamente lungo la bisettrice di prima e traccia il segmento dove termina la parte sovrapposta
- Riapri.

Adesso i triangoli aurei sono, ed abbiamo ancora un triangolo ottusangolo con gli angoli alla base e l'angolo al vertice di

Ora piega ancora lungo la bisettrice di prima. La parte di carta sovrapposta è un triangolo aureo. Lavoriamo su questi triangoli aurei:

- devi piegare, la carta sovrapposta, lungo la bisettrice di un angolo alla base, ovvero di un angolo di 72° ,
- riapri e traccia i segmenti sulle pieghe.

Osserva: i triangoli aurei sono e hai anche triangoli isosceli ottusangoli.

Il nostro procedimento alterna due fasi di diversa tipologia:

- tipologia A (Aureo): lavora **su tutti** i triangoli aurei.
Per ogni triangolo aureo si piega la carta su una bisettrice di un angolo alla base, ottenendo due angoli da 36° .
- tipologia O (Ottusangolo): lavora **su tutti** i triangoli ottusangoli.
Per ogni triangolo ottusangolo piegando la carta si divide l'angolo al vertice di 108° in un angolo di 72° e uno di 36° .

Si può ripetere il procedimento ... fino all'infinito.

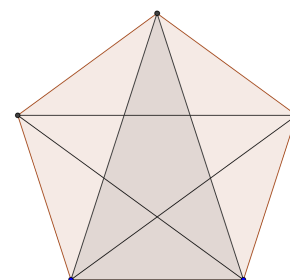
Ora con il materiale che ti diamo colora i triangoli aurei ed osserva l'effetto.

Ad ogni fase di tipologia diversa, conta quanti triangoli aurei e quanti triangoli ottusangoli ci sono, sarà facile perché sono di diverso colore. Riporta i dati in tabella.

fase	Triangoli aurei	Triangoli ottusangoli	
1	1	0	A partire dalla fase 3, ad ogni passo, che cosa ti ricordano le coppie di numeri dei triangoli aurei e ottusangoli ? e secondo te perché ?
2 (tipo A)	1	1	
3 (tipo B)	2	1	
4 (tipo A)	2	3	
5 (tipo B)	5	3	
6 (tipo A)	5	8	
7 (tipo B)	13	8	
8 (tipo A)	13	21	
9			
10			

Il triangolo aureo lo trovi anche in un poligono regolare, nel *pentagono*.

Infatti hai un triangolo aureo i cui lati obliqui corrispondono alle diagonali e la base al lato; il resto della figura viene completata da altri due triangoli, anch'essi isosceli e di *proporzioni auree* ma invertite nelle parti, detti *gnomoni aurei* proprio perché figure di completamento del pentagono.

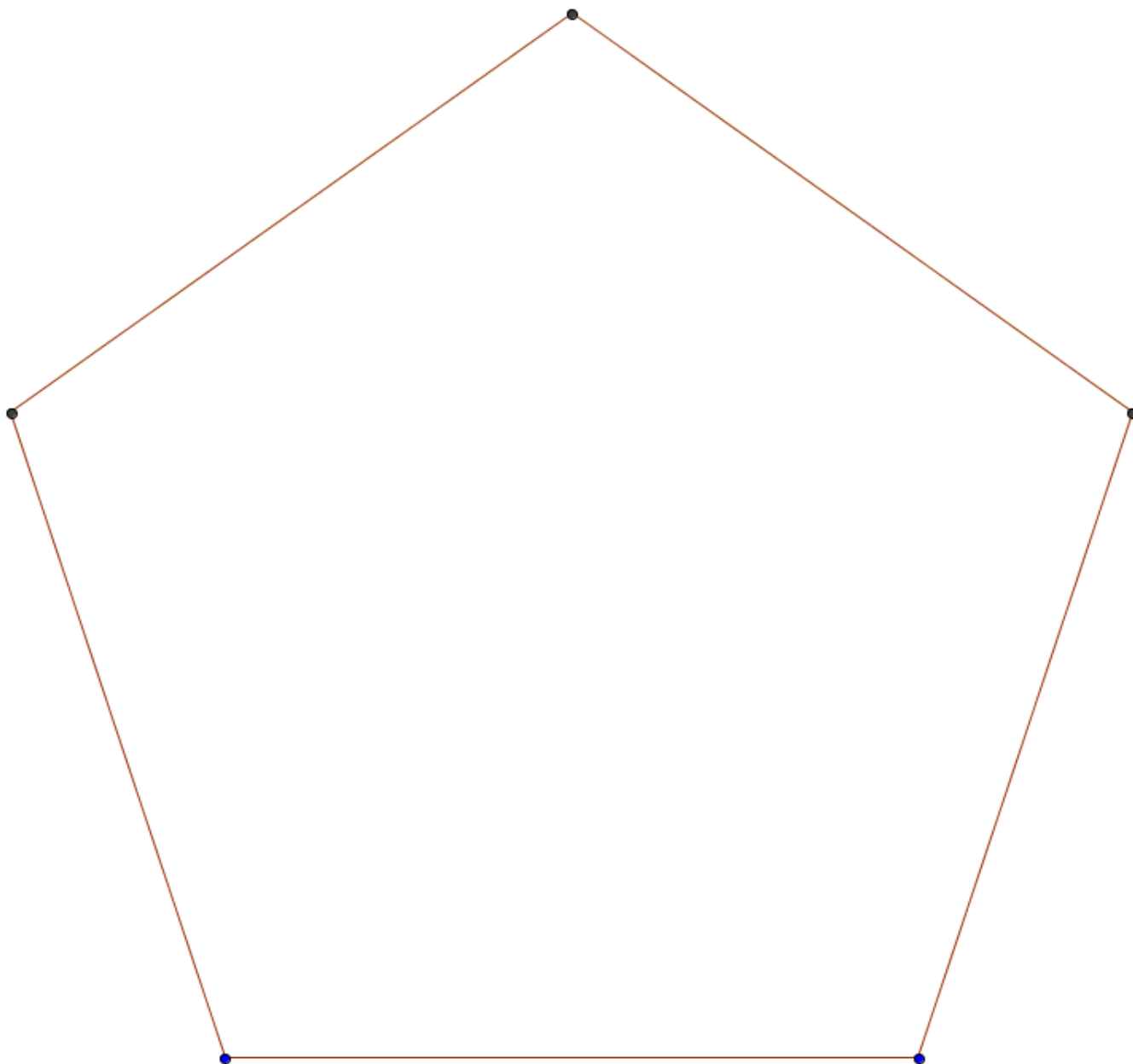


Non sempre è facile disegnare esattamente un pentagono con riga e compasso: facile invece è ottenerne uno con la tecnica dell'origami:

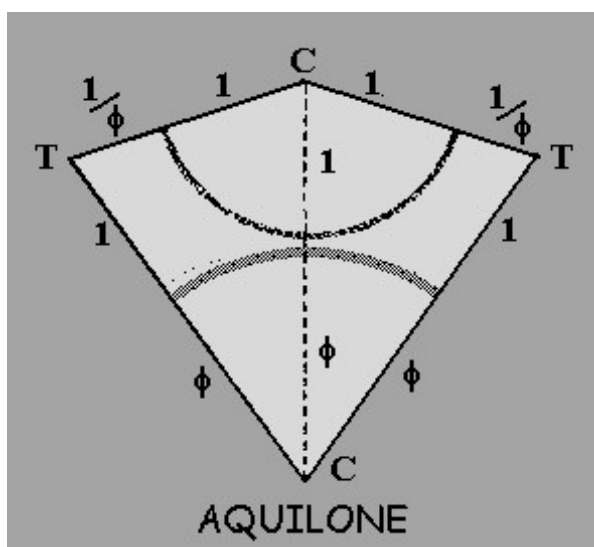
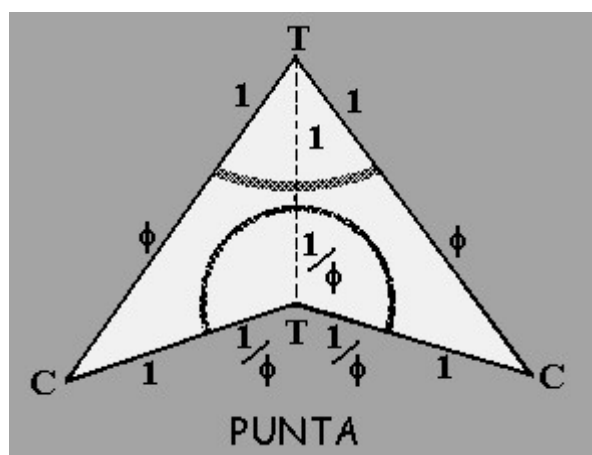
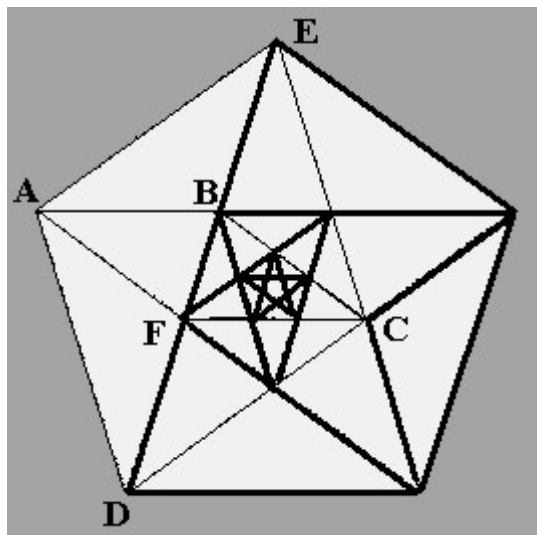
- fai un nodo con la striscia di carta traslucida
- schiaccia bene
- osserva in controluce

Il pentagono ci riporta all'inizio del nostro percorso perché era il simbolo con cui si identificavano i pitagorici. Ma ci riporta anche al nostro tema: all'infinito.

Nel pentagono sottostante traccia le diagonali, comparirà un altro pentagono interno, colora il contorno e traccia le diagonali, colora contorno del nuovo pentagono che hai creato e traccia le diagonali, colora il contorno del nuovo pentagono e



Anche Roger Penrose (matematico, fisico, cosmologo e filosofo britannico) ha utilizzato il pentagono da cui ne ha ricavato intuizioni per tassellare il piano.



Se vuoi approfondire puoi trovare il materiale su:

https://www.youtube.com/watch?v=5wl_M6c9gzQ (prima parte)

<https://www.youtube.com/watch?v=jQqNcur44Uk> (seconda parte)