

**PITKÄ MATEMATIIKKA 24.9.2019**

**MAY1 LUVUT JA LUKUJONOT, ratkaisut**

**A-OSA**

1. Yhdistä kukin lukujonon määritelmä 1.1.–1.6. siihen jonoon, joka määritelmän perusteella saadaan. Kaikki jonot alkavat jäsenestä  $a_1$  ja yksi vastausjono jää käyttämättä. Vastauksia ei tarvitse perustella. Vastaa kysymyksiin 1.1. – 1.6. sopivalla vaihtoehdolla A-G. (YO K2019)

1.1.  $a_n = 2n - 1$   (2 p.)

1.2.  $a_n = n^2$   (2 p.)

1.3.  $a_n = n^3$   (2 p.)

1.4.  $a_n = 2^n$   (2 p.)

1.5.  $a_1 = 2$  ja  $a_n = a_{n-1} + 2$ , kun  $n \geq 2$   (2 p.)

1.6.  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  ja  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , kun  $n \geq 3$    
(2 p.)

Vastausvaihtoehdot ovat:

- A. (1, 2, 3, 4, ...)
- B. (1, 2, 3, 5, ...)
- C. (1, 3, 5, 7, ...)
- D. (1, 4, 9, 16, ...)
- E. (1, 8, 27, 64, ...)
- F. (2, 4, 6, 8, ...)
- G. (2, 4, 8, 16, ...)

**Ratkaisu**

C, D, E, G, F, B

2. **2.1** Mihin lukualueeseen luku  $\pi - 4$  kuuluu?

**a** reaalilukuihin    **b** rationaalilukuihin    **c** kokonaislukuihin    **d** luonnollisiin lukuihin

**2.2** Mikä seuraavista väitteistä pitää paikkansa?

- a** Luvun ja sen käänteisluvun tulo on  $-1$ .
- b** Luvun ja sen vastaluvun summa on  $-1$ .
- c** Luvun ja sen käänteisluvun tulo on  $1$ .
- d** Luvun ja sen vastaluvun summa on  $1$ .

**2.3** Negatiivinen luku jaetaan positiivisella luvulla. Mikä seuraavista väitteistä pitää paikkansa?

- a** Osamäärä on negatiivinen.
- b** Osamäärä on positiivinen.
- c** Osoittaja on positiivinen.
- d** Nimittäjä on negatiivinen.

**2.4** Mikä lausekkeista on lausekkeen  $8 - 3^2$  sievennys?

- a**  $8 + 9$
- b**  $8 - 9$
- c**  $5^2$
- d**  $8 - 6$

**2.5** Eräs aritmeettinen summa laskettiin kaavalla  $S_{15} = 15 \cdot \frac{1+71}{2}$ . Mikä seuraavista väittämistä ei voi pitää paikkaansa?

- a** Yhteenlaskettavat olivat lukujonon  $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 5$  jäseniä.
- b** Yhteenlaskettavat olivat lukujonon  $a_n = 71 - 5(n - 1)$  jäseniä.
- c** Yhteenlaskettavat olivat lukujonon  $a_n = 5n - 4$  jäseniä.
- d** Yhteenlaskettavat olivat lukujonon  $a_n = 81 - 10n$  jäseniä.

**2.6** Geometrinen summa laskettiin kaavalla  $S_5 = \frac{3 \cdot (1 - 4^5)}{1 - 4}$ . Mikä oli kyseinen summa?

- a**  $3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4$
- b**  $3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^5$
- c**  $3 + 3 \cdot (-4) + 3 \cdot (-4)^2 + 3 \cdot (-4)^3 + 3 \cdot (-4)^4$
- d**  $3 \cdot (-4) + 3 \cdot (-4)^2 + 3 \cdot (-4)^3 + 3 \cdot (-4)^4 + 3 \cdot (-4)^5$

**2.7** Mikä seuraavista on eksponenttiyhtälö?

- $x^2 = 16$
- $2x = 16$
- $2^x = 16$
- $\frac{x}{2} = 16$

**2.8** Minkä lausekkeen arvo on sama kuin lausekkeen  $9 \cdot 3^5$  arvo?

- $27^5$
- $3^7$
- $9^5 \cdot 3^5$
- $9^5 \cdot 3$

**2.9** Miten merkitään 3-kantainen logaritmi luvusta 7?

- $3 \log 7$
- $\log_7 3$
- $\log_3 7$
- $\log 7^3$

2.10 Minkä eksponenttiyhtälön ratkaisu on  $\log_2 8$ ?

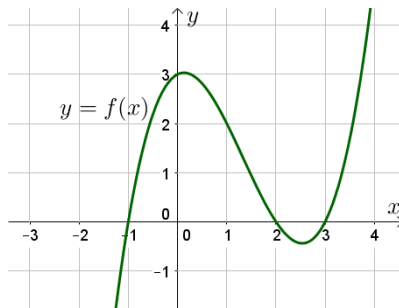
- $8^x = 2$
- $2^x = 2 \cdot 8$
- $2^x = \frac{16}{4}$
- $2^x = 2^2 \cdot 2$

### Ratkaisu

2.1 a, 2.2 c, 2.3 a, 2.4 b, 2.5 d, 2.6 a 2.7 c, 2.8 b, 2.9 c, 2.10 d

(1 p / kohta)

3. Tutki funktion  $f$  kuvaajaa ja täydennä väittämät niin, että ne ovat tosia.



- a) Funktiolla  $f$   +
- b)  $f(2) =$   +.
- c) Funktion arvo on negatiivinen, kun  +.
- d)  $f(0) =$   +.
- e) Kun  $x=1$ , niin  +.
- f)  $f(x)=2$ , kun  +.

### Ratkaisu

a)

Oikea Vastausvaihtoehto

- on kolme nollakohtaa. ✖
- on kaksi nollakohtaa. ✖
- on yksi nollakohta. ✖
- ei ole nollakohtia. ✖

b)

Oikea Vastausvaihtoehto

- $f(-1)$  ✖
- $-0.5$  tai  $1$  ✖
- $f(1)$  ✖
- $2$  ✖
- $-1$  tai  $3$  ✖
- $f(3,5)$  ✖

c)

- Oikea Vastausvaihtoehto
- $|2x-3| \text{ tai } x < -1$
  - $x > 2$
  - $x > -1$
  - $x < 4$
  - $x = 0$
  - $x \leq 0$

d)

- Oikea Vastausvaihtoehto
- 3
  - 1
  - 0
  - 1
  - 2
  - 4
  - 0,5

e)

- Oikea Vastausvaihtoehto
- $f(x) = 2$
  - $f(x) = 0$
  - $f(x) = 1$
  - $f(x) = -1$
  - $f(x) = 3$
  - $f(x) = 1,5$

f)

- Oikea Vastausvaihtoehto
- $|x| = -0,5 \text{ tai } x = 1 \text{ tai } x = 3,5$
  - $x = 0$
  - $x = -1 \text{ tai } x = 2 \text{ tai } x = 3$
  - $x = 2$

## B-OSA

4. Funktio  $E(m) = 0,69m + 66,7$  kuvaa likimain puolen tunnin imuroinnin kuluttamaa energiamäärää kilokaloreina (kcal) imuroijan massan  $m$  (kg) funktiona.
- a) Laske  $E(60)$ . Mitä tulos tarkoittaa?
- b) Ratkaise yhtälö  $E(m) = 100$ . Tulkitse tulosta.

### Ratkaisu

a)  $E(60) = 0,69 \cdot 60 + 66,7 = 108,1 \approx 110$

Funktio  $E$  kuvaa imuroinnin kuluttamaa energiamäärää. Funktion muuttuja on imuroijan massa  $m$ , eli kulutetun energian määrä lasketaan imuroijan massan perusteella. Tulos  $E(60) \approx 110$  tarkoittaa, että 60 kg painava henkilö kuluttaa puolen tunnin imuroinnin aikana noin 110 kcal energiaa.

b) Ratkaistaan muuttuja  $m$  yhtälöstä  $E(m) = 100$ .

$$\begin{aligned} 0,69m + 66,7 &= 100 \\ 0,69m &= 33,3 \quad || : 0,69 \\ m &= 48,26 \dots \\ m &\approx 48 \end{aligned}$$

Tulos tarkoittaa, että puolen tunnin imurointi kuluttaa 100 kcal energiaa, jos imuroijan massa on noin 48 kg.

5. Ratkaise yhtälö.

a)  $3^x = 3 \cdot 3^3$  (1 p)

b)  $\frac{4^x}{16^x} = \frac{1}{16}$  (2 p)

c)  $6 \cdot 3^x = 2 \cdot 9^{x-1}$  (3 p)

### Ratkaisu

a)  $3^x = 3 \cdot 3^3$   
 $3^x = 3^{3+1}$  (1 p)

$3^x = 3^4$   
 $x = 4$  (1 p)

b)

$$\frac{4^x}{16^x} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{4}{16}\right)^x = \frac{1}{4^2} \quad (1 \text{ p})$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$x = 2 \quad (1 \text{ p})$$

c)

$$6 \cdot 3^x = 2 \cdot 9^{x-1} \quad || :2$$

$$3 \cdot 3^x = (3^2)^{x-1}$$

$$3^{x+1} = 3^{2x-2} \quad (1 \text{ p})$$

$$x+1 = 2x-2$$

$$-x = -3$$

$$x = 3 \quad (1 \text{ p})$$

6. Jalkapallostadionilla on 33 penkkiriviä. Alimmalla on 800 istumapaikkaa ja ylimmällä 4 160. Istumapaikkojen lukumäärä lisääntyy rivi riviltä yhtä paljon. Kuinka monta istumapaikkaa on keskimmaisella rivillä ja paljonko istumapaikkoja on stadionilla kaikkiaan? (6 p)

### Ratkaisu

Istumapaikkojen lukumäärä muodostaa aritmeettisen lukujonon, sillä lukumäärä lisääntyy rivi riviltä yhtä paljon. Ja penkkirivien lukumäärät lasketaan yhteen, saadaan aritmeettinen summa.

Ensimmäinen jäsen  $a_1 = 800$

$n$ :s jäsen  $a_n = 4\,160$

Lasketaan yleisen jäsenen avulla  $d$ .

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$4160 = 800 + 33d - d$$

$$d = 105$$

Keskimmäinen rivi on 17. Tuolien lukumäärä 17. rivillä on

$$a_{17} = 800 + 105(17-1) = 2480.$$

Kaikkiaan tuoleja on

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_{33}}{2}$$

$$S_{33} = 33 \cdot \frac{800 + 4160}{2} = 81\,840$$

Vastaus: Keskimmaisella rivillä on 2 480 paikkaa ja kaikkiaan paikkoja on 81 840.

7. Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on 80, ja toisesta jäsenestä alkaen jonon jäsen on puolet edellisestä jäsenestä.

a) Laske kuudes jäsen.

b) Laske lukujonon 20 ensimmäisen jäsenen summa.

(6 p)

### Ratkaisu

a)

$$a_1 = 80$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

Lasketaan lukujonon kuudess jäsen käyttämällä geometrisen lukujonon yleisen jäsenen sääntöä.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_6 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}$$

$$= 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 2\frac{1}{2}$$

b) Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen  $a_1 = 80$  ja suhdeluku  $q = 0,5$ , joten 20 ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$S_{20} = \frac{80(1 - 0,5^{20})}{1 - 0,5}$$

$$= 159,9\dots$$

$$\approx 160$$

Vastaus:  $S_{20} \approx 160$ .

8. Paidan hinta oli 80 €. Hintaa alennettiin ensin 50 % ja sen jälkeen vielä 10 %.

a) Mikä oli paidan lopullinen hinta?

b) Kuinka monta prosenttia paidan hinta aleni?

### Ratkaisu

a) Hintaa 80 € alennettiin 50 %.

Uusi hinta on  $0,5 \cdot 80 \text{ €} = 40 \text{ €}$ .

Tätä hintaa alennetaan vielä 10 %.

Lopullinen hinta on  $0,9 \cdot 40 \text{ €} = 36 \text{ €}$ .

(1 p)

(1 + 1 p)

b)  $\frac{80 - 36}{80} \cdot 100\% = 55\%$

(2p + 1p)

Paidan hinta aleni 55 prosenttia.

9. a) Laske lukujen  $\frac{1}{2}$  ja  $\frac{1}{2}$  käänteislukujen summa. Kirjoita välivaiheet näkyviin. (3p)
- b) Kuinka monta prosenttia murtoluvun  $\frac{5}{7}$  nimittäjää pitää pienentää, jotta murtoluku kasvaa 20 %. (3p)

### Ratkaisu

a)  $\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{1} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} + \frac{5}{4} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$  (1p + 1p + 1 p)

b)

$$\frac{5}{q \cdot 7} = 1,2 \cdot \frac{5}{4} \quad \parallel : \frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{q} = 1,2$$

$$q = \frac{1}{1,2} = \frac{5}{6} = 0,8333333...$$

Kertoimesta  $q$  nähdään, että nimittäjästä pitää jäädä jäljelle noin 83,3 %.

Nimittäjää pitää pienentää  $100 \% - 83,3 \% = 16,7 \%$ . (1p + 1p + 1 p)

10. a) Jääkiekkoilevan juniorin harrastuksen vuosikustannukset ovat 2500 euroa. Vuosikustannukset nousevat vuosittain 10 % uusien varusteiden, pelimatkojen yms. vuoksi. Selvitä taulukkolaskentaohjelman avulla, kuinka paljon vuosikustannukset ovat kymmenen vuoden kuluttua.
- b) Piirrä funktion  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$  kuvaaja. Ota kuvankaappaus kuvaajasta. Määritä kuvaajan avulla, millä muuttujan arvoilla  $f(x) = 2$ . Piirrä kuvaan merkinnät miten selvitit ratkaisut tai perustele se sanallisesti. (3p) (6 p)

### Ratkaisu

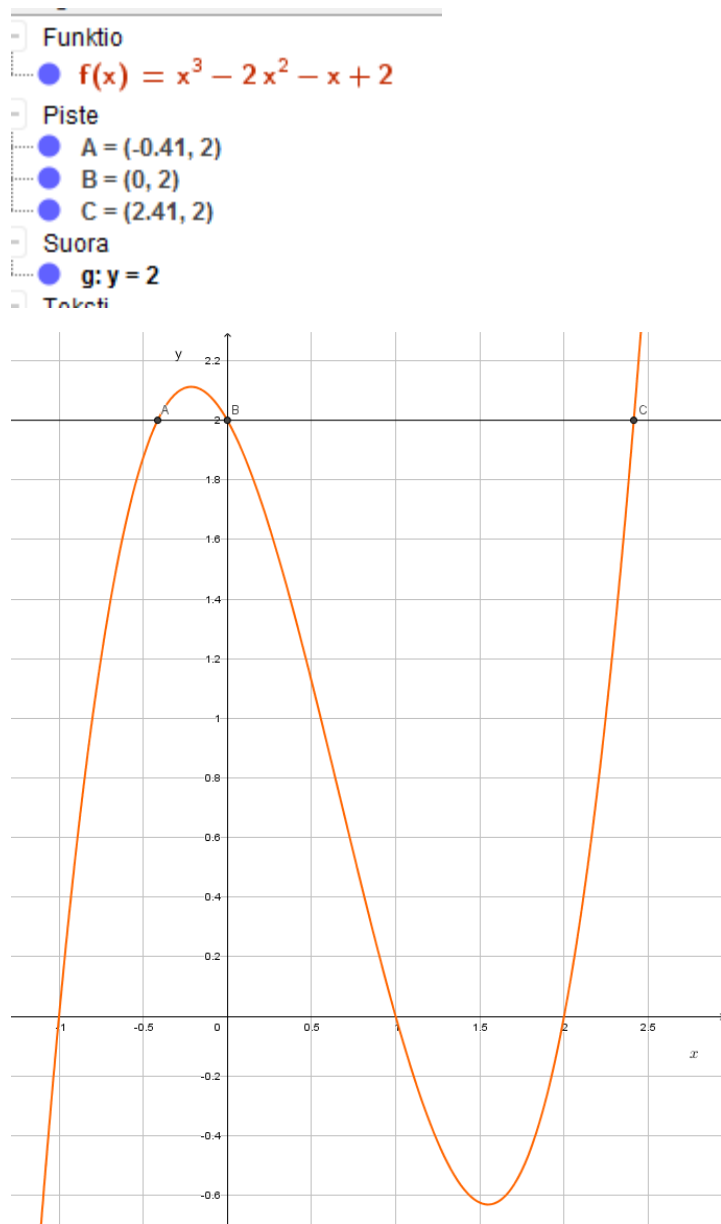
a) Syötetään soluun A1 luku 2500. (1 p)

Syötetään soluun A2 ”= A1\*1,1” ja kopioidaan solua soluun A10 asti. (2 p)

	A
1	2500
2	2750
3	3025
4	3327.5
5	3660.25
6	4026.28
7	4428.9
8	4871.79
9	5358.97
10	5894.87

Taulukosta saadaan, että kymmenen vuoden kuluttua kustannukset ovat noin 5900 euroa.

b)



Sanallisesti: Katsotaan kuvaajasta, missä kohtaa funktio saa arvon 2 ja luetaan  $x$ -akselilta arvot.

Vastaus: Funktio saa arvon 2 kohdissa  $x = -0,4$ ,  $x = 0$  ja  $x = 2,4$ .