

5 EKSPONENTTIYHTÄLÖ JA LOGARITMI

5.1 Eksponenttiyhtälö

LUO PERUSTA

- 501.** **A** ja III, koska kertolaskun $5 \cdot 2$ voi kirjoittaa summana $2+2+2+2+2$
B ja II, koska kummassakin luku 5 on kerrottu itsellään
C ja I, koska kummassakin on luku tulo, jossa on viisi kakkosta.

Vastaus: **A-III, B-II, C-I.**

502. a) $100\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$

- b)** Koska $100\,000 = 10^5$, niin yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $10^x = 10^5$. Koska potensseissa on samat kantaluvut, on eksponenttien oltava yhtä suuret. Tällä perusteella $x = 5$.

Vastaus: **a)** 10^5 **a)** $x = 5$

503. a) $7^x = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$
 $7^x = 7^4$
 $x = 4$

b) $7^x = 7^3 \cdot 7^5$
 $7^x = 7^{3+5}$
 $7^x = 7^8$
 $x = 8$

c) $7^x = (7^2)^4$
 $7^x = 7^{2 \cdot 4}$
 $7^x = 7^8$
 $x = 8$

Vastaus: **a)** $7^4, x = 4$ **b)** $7^8, x = 8$ **c)** $7^8, x = 8$

504. a) $5^x = 25$
 $5^x = 5^2$
 $x = 2$

b) $5^x = 25 \cdot 5^3$
 $5^x = 5^2 \cdot 5^3$
 $5^x = 5^{2+3}$
 $5^x = 5^5$
 $x = 5$

c) $5^x = 25^5$
 $5^x = (5^2)^5$
 $5^x = 5^{2 \cdot 5}$
 $5^x = 5^{10}$
 $x = 10$

Vastaus: **a)** 5^2 , $x = 2$ **b)** 5^5 , $x = 5$ **c)** 5^{10} , $x = 10$

505. a) $6^x = 6$
 $6^x = 6^1$
 $x = 1$

b) $3^x = \frac{3^9}{3^7}$
 $3^x = 3^{9-7}$
 $3^x = 3^2$
 $x = 2$

$$\begin{aligned} \text{c) } 8^x &= \frac{8^4}{64} \\ 8^x &= \frac{8^4}{8^2} \\ 8^x &= 8^{4-2} \\ 8^x &= 8^2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus: **a)** $x = 1$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = 2$

VAHVISTA OSAAMISTA

506. **a)** $x = 6$

b)

$$\begin{aligned} 3x &= 36 \quad \parallel :3 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

c) $3 + x = 36$
 $x = 36 - 3$
 $x = 33$

d)

$$\begin{aligned} 6^x &= 36 \\ 6^x &= 6^2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus: **a)** $x = 6$ **b)** $x = 12$ **c)** $x = 33$ **d)** $x = 2$

507. **a)** $10^6 = 1\,000\,000$, joten $x = 6$.

b) $0,1^2 = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$, joten $x = 2$.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, joten $x = 3$.

Vastaus: **a)** $x = 6$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = 3$

508. a)

$$2^x = 2^2 \cdot 2^5$$

$$2^x = 2^{2+5}$$

$$2^x = 2^7$$

$$x = 7$$

b)

$$2^x = 8 \cdot 2^4$$

$$2^x = 2^3 \cdot 2^4$$

$$2^x = 2^{3+4}$$

$$2^x = 2^7$$

$$x = 7$$

c)

$$2^x = (2^3)^4$$

$$2^x = 2^{3 \cdot 4}$$

$$2^x = 2^{12}$$

$$x = 12$$

Vastaus: a) $2^7, x = 7$ b) $2^7, x = 7$ c) $2^{12}, x = 12$

509. a)

$$7^x = 49^3$$

$$7^x = (7^2)^3$$

$$7^x = 7^{2 \cdot 3}$$

$$7^x = 7^6$$

$$x = 6$$

b)

$$36^x = 6^{10}$$

$$(6^2)^x = 6^{10}$$

$$6^{2x} = 6^{10}$$

$$2x = 10 \quad || : 2$$

$$x = 5$$

c)

$$4^x = 8^4$$

$$(2^2)^x = (2^3)^4$$

$$2^{2x} = 2^{3 \cdot 4}$$

$$2^{2x} = 2^{12}$$

$$2x = 12 \quad || : 2$$

$$x = 6$$

d)

$$25^x = 125^4 \cdot 25^3$$

$$(5^2)^x = (5^3)^4 \cdot (5^2)^3$$

$$5^{2x} = 5^{3 \cdot 4} \cdot 5^{2 \cdot 3}$$

$$5^{2x} = 5^{12} \cdot 5^6$$

$$5^{2x} = 5^{12+6}$$

$$5^{2x} = 5^{18}$$

$$2x = 18 \quad || : 2$$

$$x = 9$$

Vastaus: **a)** $x = 6$

b) $x = 5$

c) $x = 6$

d) $x = 9$

510. a) $10^x = 100$
 $10^x = 10^2$
 $x = 2$

b) $10^{x-1} = 100$
 $10^{x-1} = 10^2$
 $x - 1 = 2$
 $x = 2 + 1$
 $x = 3$

c) $3 \cdot 10^x = 300$ $\| : 3$
 $10^x = 100$
 $10^x = 10^2$
 $x = 2$

d) $3 + 10^{2x-4} = 103$
 $10^{2x-4} = 103 - 3$
 $10^{2x-4} = 100$
 $10^{2x-4} = 10^2$
 $2x - 4 = 2$
 $2x = 2 + 4$
 $2x = 6$ $\| : 2$
 $x = 3$

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = 2$ d) $x = 3$

511. a)

$$\frac{3^x}{3^2} = 27 \cdot 9$$
$$3^{x-2} = 3^3 \cdot 3^2$$
$$3^{x-2} = 3^{3+2}$$
$$3^{x-2} = 3^5$$
$$x - 2 = 5$$
$$x = 5 + 2$$
$$x = 7$$

b) $0,5^x \cdot 10^x = 25$
 $(0,5 \cdot 10)^x = 5^2$
 $5^x = 5^2$
 $x = 2$

c)

$$\begin{aligned}\frac{9^x}{3^x} &= 27 \\ \frac{(3^2)^x}{3^x} &= 3^3 \\ \frac{3^{2x}}{3^x} &= 3^3 \\ 3^{2x-x} &= 3^3 \\ 3^x &= 3^3 \\ x &= 3\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}8^x &= \frac{64 \cdot 4}{2^5} \\ (2^3)^x &= \frac{2^6 \cdot 2^2}{2^5} \\ 2^{3x} &= \frac{2^{6+2}}{2^5} \\ 2^{3x} &= \frac{2^8}{2^5} \\ 2^{3x} &= 2^{8-5} \\ 2^{3x} &= 2^3 \\ 3x &= 3 \quad || :3 \\ x &= 1\end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = 7$

b) $x = 2$

c) $x = 3$

d) $x = 1$

512. a) $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16 = 4^2$, mutta $-4^2 = -4 \cdot 4 = -16 \neq 16 = 4^2$.

b) Tutkitaan ensin tilanne, jossa x on parillinen positiivinen kokonaisluku.

Puretaan yhtälön $(-4)^x = 4^x$ vasemman puolen potenssilasku kertolaskuksi. Kertolaskussa on x kpl negatiivisia tekijöitä. Koska x on parillinen, on tulossa tekijöitä parillinen määrä, jolloin tulo on positiivinen ja yhtälö toteutuu.

Jos taas x on pariton, on tulossa pariton määrä negatiivisia tekijöitä, jolloin tulo on negatiivinen. Yhtälön vasen puoli on negatiivinen ja oikea puoli positiivinen, joten yhtälö ei toteudu.

Siis kaikki parilliset positiiviset kokonaisluvut toteuttavat yhtälön.

Vastaus: a) $(-4)^2 = 16 = 4^2$, mutta $-4^2 = -4 \cdot 4 = -16 \neq 16 = 4 \cdot 4 = 4^2$.

b) Kaikki parilliset positiiviset kokonaisluvut.

513. a) $\frac{4}{25} = \frac{2^2}{5^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$, joten yhtälön ratkaisu on $x = 2$.

b) $\frac{4}{5} = \frac{2^2}{5}$, joten yhtälön $\frac{2^x}{5} = \frac{4}{5}$ ratkaisu on $x = 2$.

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x = 2$

514. a) $3^x + 5 = 86$
 $3^x = 86 - 5$
 $3^x = 81$
 $3^x = 3^4$
 $x = 4$

b) $8 \cdot 5^x = 1000$ $\parallel : 8$
 $5^x = 125$
 $5^x = 5^3$
 $x = 3$

Vastaus: a) $x = 4$ b) $x = 3$

515. a) $4^n + 36 = 100$
 $4^n = 100 - 36$
 $4^n = 64$
 $4^n = 4$
 $n = 3$

Siis luku 100 on jonon kolmas jäsen.

b) $3 \cdot 5^n = 17 \quad || : 3$
 $5^n = \frac{17}{3}$

Yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisua n , joten luku 17 ei ole jonon jäsen.

Vastaus: **a)** $4^n + 36 = 100$, luku 100 on jonon kolmas jäsen.

b) $3 \cdot 5^n = 75$, luku 17 ei ole jonon jäsen.

516. Bakterien määrä kaksinkertaistuu 24 kertaa, joten se tulee 2^{24} -kertaiseksi.
 $2^{24} = 16\,777\,216$, joten bakteerien määrä ylittää miljoonan.

Vastaus: Kyllä ylittää.

517. a) Yhtä viikkoa aikaisemmin kuin koko lampi on peitossa, eli 27 viikon kuluttua.

b) Jos alussa on yksi kasvi, niin kahden viikon kuluttua on neljä kasvia ja sen jälkeen kuluu 26 viikkoa, jotta lampi on peittynyt.

Jos kasveja on alussa neljä, lammen peittämiseen aikaa kuluu kaksi viikkoa vähemmän kuin jos kasveja olisi alussa vain yksi. Aikaa kuluu siis 26 viikkoa.

Vastaus: **a)** 27 viikon kuluttua

b) 26 viikon kuluttua

518. a) Täytetään taulukon kaksi ensimmäistä riviä:

	A
1	7
2	=A1*7

Sen jälkeen kopioidaan sama laskukaava seuraaville riveille:

	A
1	7
2	49
3	343
4	2401
5	16807
6	117649
7	823543
8	5764801

Taulukosta nähdään, että luku 16 807 on lukujonon viides jäsen.

- b) Luku 1 538 021 ei ole lukujonon jäsen, koska lukujonon peräkkäiset jäsenet ovat
 $823\,543 < 1\,538\,021$ ja
 $5\,764\,801 > 1\,538\,021$,
ja lukujono on kasvava.

Vastaus: a) viides b) ei

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

519. $25^4 = (5^2)^4 = 5^8$

$$125^2 = (5^3)^2 = 5^6$$

$$5^2 \cdot 125 = 5^2 \cdot 5^3 = 5^5$$

$$4 \cdot 8 = 32 > 25 = 5^2 \text{ mutta } 32 < 125 = 5^3 < 5^5$$

$$100\,000\,000 = 10^8 > 5^8$$

Vastaus: $4 \cdot 8 < 5^2 \cdot 125 < 125^2 < 25^4 < 100\,000\,000$

520. a)

$$7^x = 49^{49}$$

$$7^x = (7^2)^{49}$$

$$7^x = 7^{2 \cdot 49}$$

$$x = 2 \cdot 49$$

$$x = 98$$

b)

$$36^{2x} = 6^{x+9}$$

$$(6^2)^{2x} = 6^{x+9}$$

$$6^{2 \cdot 2x} = 6^{x+9}$$

$$2 \cdot 2x = x + 9$$

$$4x = x + 9$$

$$4x - x = 9$$

$$3x = 9 \quad \parallel :3$$

$$x = 3$$

c) Yhtälöllä ei ole ratkaisua, koska $9^x > 0$ kaikilla reaaliluvuilla x .

d)

$$\frac{16^3 \cdot 2^x}{4^3} = 2^{10}$$

$$\frac{(2^4)^3 \cdot 2^x}{(2^2)^3} = 2^{10}$$

$$\frac{2^{12} \cdot 2^x}{2^6} = 2^{10}$$

$$2^{12+x} = 2^{10}$$

$$12 + x - 6 = 10$$

$$x + 6 = 10$$

$$x = 10 - 6$$

$$x = 4$$

Vastaus: a) $x = 98$ b) $x = 3$ c) ei ratkaisua d) $x = 4$

521. a) $5^x \cdot 5 \cdot 5^2 = 5^{x+1+2} = 5^{x+3}$

Jos $x = 0$, niin $5^{x+3} = 5^3 = 125 < 625$. Siis lausekkeen $5^x \cdot 5 \cdot 5^2$ arvo voi olla pienempi kuin 625.

b)

$$3^x \cdot 3^x \cdot 3^x \cdot 3^x = 81$$

$$3^{4x} = 3^4$$

$$4x = 4 \quad || :4$$

$$x = 1$$

c)

$$3^x + 3^x + 3^x = 81$$

$$3 \cdot 3^x = 3^4$$

$$3^{1+x} = 3^4$$

$$1 + x = 4$$

$$x = 4 - 1$$

$$x = 3$$

Vastaus: a) $5^x \cdot 5 \cdot 5^2 = 5^{x+3}$, voi olla b) $x = 1$ c) $x = 3$

522. a)

$$a^x \cdot a^3 = \frac{a^{11}}{a^2}$$

$$a^{x+3} = a^{11-2}$$

$$x + 3 = 11 - 2$$

$$x = 9 - 3$$

$$x = 6$$

b)

$$4a^3 \cdot 9a^5 = (6a^4)^x$$

$$4 \cdot 9a^3 a^5 = (6a^4)^x$$

$$36a^{3+5} = (6a^4)^x$$

$$6^2 a^8 = (6a^4)^x$$

$$(6a^4)^2 = (6a^4)^x$$

$$2 = x$$

$$x = 2$$

Vastaus: **a)** $x = 6$ **b)** $x = 2$

523. a) $c_1 = a_1 \cdot b_1 = 2^1 \cdot 5^1 = 2 \cdot 5 = 10$

$$c_2 = a_2 \cdot b_2 = 2^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100$$

$$c_3 = a_3 \cdot b_3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000$$

$$c_{10} = a_{10} \cdot b_{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = (2 \cdot 5)^{10} = 10^{10}$$

$$c_n = a_n \cdot b_n = 2^n \cdot 5^n = (2 \cdot 5)^n = 10^n$$

b) Luvussa 10^n on ykkönen ja n nollaa, joten Googol on lukujonon sadas jäsen.

Vastaus: **a)** $c_1 = 10$, $c_2 = 100$, $c_3 = 1\,000$, $c_n = 10^n$ **b)** sadas jäsen

524. a) Sievennetään yhtälön vasen puoli.

$$\begin{aligned} & \frac{8 \cdot 16^{3x}}{16 \cdot 8^{4x}} \\ &= \frac{2^3 \cdot (2^4)^{3x}}{2^4 \cdot (2^3)^{4x}} \\ &= \frac{2^3 \cdot 2^{4 \cdot 3x}}{2^4 \cdot 2^{3 \cdot 4x}} \\ &= \frac{2^{3+12x}}{2^{4+12x}} \\ &= 2^{3+12x-(4+12x)} \\ &= 2^{3+12x-4-12x} \\ &= 2^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Huomataan, että yhtälön vasen puoli on muuttujan x arvosta riippumatta $\frac{1}{2}$ ja oikea puoli 6, joten vasen ja oikea puoli eivät ole yhtä suuret millään muuttujan x arvolla.

b)

$$\begin{aligned} x^3 &= (5^3)^2 \\ x^3 &= 5^{3 \cdot 2} \\ x^3 &= 5^{2 \cdot 3} \\ x^3 &= (5^2)^3 \\ x^3 &= 25^3 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

c)

$$n^5 = 32^3$$

$$n^5 = (2^5)^3$$

$$n^5 = 2^{5 \cdot 3}$$

$$n^5 = 2^{3 \cdot 5}$$

$$n^5 = (2^3)^5$$

$$n^5 = 8^5$$

$$n = 8$$

Vastaus: **a)** Yhtälön vasen puoli on muuttujan x arvosta riippumatta $\frac{1}{2}$ ja oikea puoli 6, joten vasen ja oikea puoli eivät ole yhtä suuret millään muuttujan x arvolla. **b)** luvun 25 **c)** on, luku 8

5.2 Logaritmi

LUO PERUSTA

525. A-II, B-III, C-I

Vastaus: A-II, B-III ja C-I

526. a) $x = \log_5 25 = 2$, koska $5^2 = 25$

b) $x = \log_2 16 = 4$, koska $2^4 = 16$

c) $x = \log_3 27 = 3$, koska $3^3 = 27$.

Vastaus: a) $x = \log_5 25 = 2$ b) $x = \log_2 16 = 4$ c) $x = \log_3 27 = 3$

527. a) $x = \log_7 343 = 3$

b) $x = \log_3 729 = 6$

c) $x = \log_2 1024 = 10$

Vastaus: a) $x = \log_7 343 = 3$ b) $x = \log_3 729 = 6$ c) $x = \log_2 1024 = 10$

528. a) Merkitään $x = \log_6 36$. Tällöin luku $\log_6 36$ on eksponenttiyhtälön $6^x = 36$ ratkaisu. Kirjoitetaan yhtälön molemmat puolet luvun 6 potensseina ja ratkaistaan yhtälö.

$$6^x = 36$$

$$6^x = 6^2$$

$$x = 2$$

Joten $\log_6 36 = 2$.

b) Merkitään $x = \log_9 81$. Tällöin luku $\log_9 81$ on eksponenttiyhtälön $9^x = 81$ ratkaisu. Kirjoitetaan yhtälön molemmat puolet luvun 9 potensseina ja ratkaistaan yhtälö.

$$9^x = 81$$

$$9^x = 9^2$$

$$x = 2$$

Joten $\log_9 81 = 2$.

- c) Merkitään $x = \log_{10} 1\,000\,000$. Tällöin luku $\log_{10} 1\,000\,000$ on eksponenttiyhtälön $10^x = 1\,000\,000$ ratkaisu. Kirjoitetaan yhtälön molemmat puolet luvun 10 potensseina ja ratkaistaan yhtälö.

$$10^x = 1\,000\,000$$

$$10^x = 10^6$$

$$x = 6$$

$$\text{Joten } \log_{10} 1\,000\,000 = 6.$$

Vastaus: a) $6^x = 36, x = 2$ b) $9^x = 81, x = 2$ c) $10^x = 1\,000\,000, x = 6$

529. a) $2^x = 100$
 $x = \log_2 100$

b) $x = \log_2 100 = 6,643\dots \approx 6,64$

Vastaus: a) $x = \log_2 100$ b) 6,64

VAHVISTA OSAAMISTA

530.

Eksponttiyhtälö	Logaritmi
$2^x = 32$	$x = \log_2 32 = 5$
$10^x = 100$	$x = \log_{10} 100 = 2$
$3^x = 81$	$x = \log_3 81 = 4$
$5^x = 125$	$x = \log_5 125 = 3$

531. a) $\log_2 128 = 7$, koska $2^7 = 128$.

b) $\log_5 625 = 4$, koska $5^4 = 625$.

Vastaus: a) $\log_2 128 = 7$ b) $\log_5 625 = 4$

532. a) $4^x = 16\,384$
 $x = \log_4 16\,384$
 $x = 7$, reaalityluvut, rationaaliluvut, kokonaisluvut, luonnolliset luvut

b) $4^x = 16\,000$
 $x = \log_4 16\,000$
 $x = 6,982\dots$, reaalityluvut, irrationaaliluvut

c) $4^x = 2$
 $x = \log_4 2 = \frac{1}{2}$, reaalityluvut, rationaaliluvut

Vastaus: **a)** $x = 7$, reaalityluvut, rationaaliluvut, kokonaisluvut, luonnolliset luvut
b) $x = \log_4 16\,000 = 6,982\dots$, reaalityluvut, irrationaaliluvut

c) $x = \frac{1}{2}$, reaalityluvut, rationaaliluvut

533. a) 2,3 ja 2,4

b) $2^x = 5$
 $x = \log_2 5 = 2,3219\dots \approx 2,32$

Vastaus: **a)** 2,3 ja 2,4 **b)** $x = \log_2 5 \approx 2,32$

534. a) $\log_{13} 28\,561 = 4$

b) $\log_{10} 10^{100} = 100$

c) $\log_8 (32 \cdot 128) = \log_8 4\,096 = 4$

Vastaus: **a)** 4 **b)** 100 **c)** 4

535. a) $q = 4 : 2 = 2$ ja $a_1 = 2$.
 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{1+n-1} = 2^n$

b)

$$2^n = 4096$$

$$n = \log_2 4096$$

$$n = 12$$

Vastaus: a) $a_n = 2^n$ b) $2^n = 4096$, 12. jäsen

536. $q = \frac{9}{3} = 3$ ja $a_1 = 3$.
 $a_n = a_1 q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^{1+n-1} = 3^n$.

$$3^n = 10^{80}$$

$$n = \log_3 10^{80}$$

$$n = 167,672\dots$$

Koska lukujonon ensimmäinen jäsen on positiivinen ja $q > 1$, niin lukujono on kasvava.

Näin ollen jonon 168. jäsen on ensimmäinen, joka ylittää luvun 10^{80} .

Vastaus: 168. jäsen

537. A, koska määrä oli aluksi 0,75 miljoonaa ja se 1,03-kertaistuu t kertaa eli $1,03^t$ -kertaistuu.

III, koska

$$0,75 \cdot 1,03^t = 1,5 \quad || : 0,75$$

$$1,03^t = 2$$

$$t = \log_{1,03} 2$$

Vastaus: A ja III

$$\begin{aligned}538. \quad & 5 \cdot 2^n = 163\,840 \quad || : 5 \\ & 2^n = 32\,768 \\ & n = \log_2 32\,768 \\ & n = 15\end{aligned}$$

Vastaus: $5 \cdot 2^n = 163\,840$, on (15. jäsen)

539. a) Koska tulos vähenee joka vuosi 1 %, on tulos aina 99 % edellisen vuoden tuloksesta eli 0,99-kertainen.

Vähennemistä tapahtuu 40 kertaa, jolloin tulos on $100 \text{ kg} \cdot 0,99^{40} \approx 67 \text{ kg}$.

b)

$$\begin{aligned}100 \cdot 0,99^x &= 80 \quad || : 100 \\ 0,99^x &= 0,8 \\ x &= \log_{0,99} 0,8 \\ x &= 22,20\dots\end{aligned}$$

Tulos 80 kg on tehty noin 22 vuotta 30-vuotispäivän jälkeen eli noin 52-vuotiaana.

Vastaus: a) 67 kg b) noin 52-vuotiaana

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

540. a) 10 vuodessa väkiluku 1,011-kertaistuu 10 kertaa, jolloin se tulee $1,011^{10} = 1,1156\dots \approx 1,12$ -kertaiseksi.

Väkiluku kasvaa siis 12 %.

b) Lasketaan, milloin 8 miljardia ylittyy:

$$7 \cdot 1,011^x = 8 \quad || :7$$

$$1,011^x = \frac{8}{7}$$

$$x = \log_{1,011} \left(\frac{8}{7} \right) = 12,2058\dots$$

Vastaavasti 9 miljardin ylittyminen:

$$7 \cdot 1,011^x = 9 \quad || :7$$

$$1,011^x = \frac{9}{7}$$

$$x = \log_{1,011} \left(\frac{9}{7} \right) = 22,9722\dots$$

Ei tiedetä, mihin suuntaan tulokset pitää pyöristää, koska ei ole kerrottu missä vaiheessa vuotta 2011 väkiluku ylitti 7 miljardia.

Vastaus: **a)** n.12 % **b)** 8 miljardia ylittyy vuonna 2023 tai 2024 ja 9 miljardia vuonna 2033 tai vuonna 2034

541. $\log_2 16 = 4$

$$3 = \log_{10} 1000 < \log_{10} 2000 < \log_{10} 10000 = 4$$

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$$

$$-1,2 < -\frac{5}{6} < 0$$

Vastaus: $-1,2 < -\frac{5}{6} < 2 < \sqrt{5} < \log_{10} 2000 < \log_2 16$. Luvut $-1,2$; $-\frac{5}{6}$; 2 ja $\log_2 16$ ovat rationaalisia, luvut $\sqrt{5}$ ja $\log_{10} 2000$ irrationaalisia.

- 542.** Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 > 0$ ja suhdeluku $q = \frac{2}{3}$, joten lukujonon n :s jäsen on $a_n = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. Koska ensimmäinen jäsen on positiivinen ja $0 < q < 1$, lukujono on vähenevä.

Tuhannesosa ensimmäisestä jäsenestä on $\frac{1}{1000} a_1$.

$$a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1000} a_1 \quad || : a_1 (\neq 0)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1000}$$

$$n-1 = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{1000}$$

$$n = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{1000} + 1$$

$$n = 17,03\dots$$

Vastaus: 18. jäsen

543. a) $7^x = 10$
 $x = \log_7 10$

b) $5^x = 13$
 $x = \log_5 13$
Siis $13 = 5^{\log_5 13}$.

Vastaus: **a)** $x = \log_7 10$

b) $13 = 5^{\log_5 13}$

544. a) Ratkaistaan yhtälö

$$3^x = 7$$

$$x = \log_3 7$$

b) a-kohdan perusteella yhtälö $3^x = 7$ ratkaisu on $x = \log_3 7$.

$$\text{Siis } 3^{\log_3 7} = 7.$$

c) $\log_{10} 10^4 + 10^{\log_{10} 4} = 4 + 4 = 8$

Vastaus: a) $\log_3 7$ b) 7 c) 8

545. a)

a	b	ab	$\log_{10} a$	$\log_{10} b$	$\log_{10} ab$
100	1000	100 000	2	3	5
10 000	100	1 000 000	4	2	6
25	4	100	1,3979...	0,6020...	2
200	50	10 000	2,3010...	1,6989...	4

b) Huomataan, että tulon logaritmi on tulon tekijöiden logaritmien summa esimerkiksi ensimmäisellä rivillä $2 + 3 = 5$ eli yleisesti
 $\log_k ab = \log_k a + \log_k b$.

c) $\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6(3 \cdot 12) = \log_6 36 = 2$

d) $4 + \log_{10} 2,5$
 $= \log_{10} 10000 + \log_{10} 2,5$
 $= \log_{10} (10000 \cdot 2,5)$
 $= \log_{10} 25\ 000$

Vastaus: b) $\log_k ab = \log_k a + \log_k b$ c) 2

LUVUN 5 PÄÄTÖSSIVUN TEHTÄVÄT

1. $M_W = \frac{2}{3} \log_{10} (8,2 \cdot 10^{22}) - 6,07 = 9,205... \approx 9,2.$

Vastaus: 9,2

2. Taulukosta nähdään, että Chilen maanjäristyksen magnitudi M_W oli 9,5, jolloin järityksessä vapautui energiaa

$$E = 10^{1,5 \cdot 9,5 + 3,2} = 2,818... \cdot 10^{17} \text{ J.}$$

a) Taulukosta nähdään, että Lissabonin maanjäristyksen amplitudi M_W oli 8,7, jolloin järityksessä vapautui energiaa

$$E = 10^{1,5 \cdot 8,7 + 3,2} = 1,778... \cdot 10^{16} \text{ J.}$$

$$\frac{2,818... \cdot 10^{17}}{1,778... \cdot 10^{16}} = 15,848... \approx 16$$

b) Alajärven järityksen magnitudi M_W oli 3,8, jolloin energiaa vapautui

$$E = 10^{1,5 \cdot 3,8 + 3,2} = 7,943... \cdot 10^8 \text{ J}$$

$$\frac{2,818... \cdot 10^{17}}{7,943... \cdot 10^8} = 3,54... \cdot 10^8 \approx 3,5 \cdot 10^8$$

Vastaus: a) 16-kertaisesti

b) $3,5 \cdot 10^8$ -kertaisesti

3. $66\,600 \text{ MJ} = 66\,600 \cdot 10^6 \text{ J}$. Energiaa vapautui järityksessä

$$\frac{2,818... \cdot 10^{17}}{66600 \cdot 10^6} = 4,23... \cdot 10^6 \approx 4\,200\,000 \text{ asunnon vuotuisen energiantarpeen verran.}$$

Vastaus: 4 200 000 asunnon vuotuisen energiantarpeen verran.