4. SUMMA

4.1 Aritmeettinen summa

LUO PERUSTA

401. **a)** 9 kpl

b) Ensimmäinen yhteenlaskettava on 4 ja viimeinen on 28.

c) Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 4$, viimeinen $a_9 = 28$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 9$. Aritmeettisen summan kaavan mukaan

$$S_9 = 9 \cdot \frac{4+28}{2} = 144.$$

Vastaus: **a)** 9 kpl
b) Ensimmäinen yhteenlaskettava on 4 ja viimeinen on 28. **c)** $S_9 = 144$

402. Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 5$, viimeinen $a_{20} = 43$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 20. Aritmeettisen summan kaavan mukaan

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{5+43}{2} = 480.$$

Vastaus: $S_{20} = 480$

403. Osallistujien lukumäärät ovat aritmeettisen lukujonon jäseniä, koska osallistujien lukumäärä kasvoi likimäärin yhtä monella juoksijalla vuosittain.

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 352$, viimeinen $a_{10} = 6749$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 10. Aritmeettisen summan kaavan mukaan

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{352 + 6749}{2} = 35505 \approx 35500$$

Vastaus: Osallistujia oli n. 35 500.

404. **a)** Aritmeettisen lukujonon erotusluku $d = 97 - 101 = -4$.

Lukujonon kymmenes jäsen a_{10} saadaan tietojen $a_1 = 101$, $d = -4$ avulla yleisen jäsenen säännöstä.

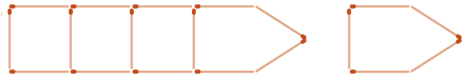
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$
$a_{10} = 101 + (10 - 1) \cdot (-4)$
$a_{10} = 65$.

b) Summa on $101 + 97 + 93 + \ldots + 65$, joten ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 101$, viimeinen $a_{10} = 65$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 10. Aritmeettisen summan kaavan mukaan

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{101 + 65}{2} = 830.$$

Vastaus: **a)** $a_{10} = 65$ **b)** $S_{10} = 830$

405. **a)**



b) 1. kuvio: 5
2. kuvio: $5 + 3 = 8$
3. kuvio: $8 + 3 = 11$
4. kuvio: $11 + 3 = 14$
5. kuvio: $14 + 3 = 17$

Viiteen ensimmäiseen kuvioon tarvittavien tikkujen lukumäärä saadaan summasta $5 + 8 + 11 + 14 + 17$, jonka tulos on 55.

c) Kuviossa tarvittavien tikkujen lukumäärät ovat aritmeettisen lukujonon 5, 8, 11, 14, 17, … jäseniä, koska erotusluku $d = 8 – 5 = 3$. Lukujonon jäsen saadaan siis lisäämällä edelliseen jäseneen 3.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 5$, joten lukujonon 20. jäsen a_{20} saadaan tietojen $a_1 = 5$ ja $d = 3$ avulla yleisen jäsenen säännöstä

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot d \\ a_{20} &= 5 + (20 - 1) \cdot 3 \\ &= 5 + 19 \cdot 3 \\ &= 5 + 57 \\ &= 62. \end{aligned}$$

20. ensimmäiseen kuvioon tarvittavien tikkujen lukumäärä saadaan aritmeettisen summan kaavalla ensimmäisen yhteenlaskettavan $a_1 = 5$, viimeisen yhteenlaskettavan $a_{20} = 62$ ja yhteenlaskettavien lukumäärän 20 perusteella.

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{5 + 62}{2} = 670.$$

Vastaus: **b)** Viidessä ensimmäisessä kuviossa on yhteensä 55 tikkua.
c) 20. kuvioon tarvitaan 62 tikkua ja 20 ensimmäiseen kuvioon yhteensä 670 tikkua.

VAHVISTA OSAAMISTA

406. **a)** Ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ ja viimeinen $a_{10} = 3 \cdot 10 + 1 = 31$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 10.

Aritmeettisen summan kaavan mukaan

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{4+31}{2} = 175.$$

b) Aritmeettisen lukujonon erotusluku $d = -8 - (-3) = -5$. Lukujonon viidestoista jäsen a_{15} saadaan tietojen $a_1 = -3$ ja $d = -5$ avulla yleisen jäsenen säännöstä.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$
$a_{15} = -3 + (15 - 1) \cdot (-5)$
$a_{15} = -73$

Ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -3$, viimeinen $a_{15} = -73$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 15.

Aritmeettisen summan kaavan mukaan

$$S_{15} = 15 \cdot \frac{-3+(-73)}{2} = -570.$$

Vastaus: **a)** $S_{10} = 175$ **b)** $S_{15} = -570$

407. Erotusluku $d = 0,5 - 0,2 = 0,3$. Yhteenlaskettavat näyttävät olevan aritmeettisen lukujonon peräkkäisiä jäseniä
0,2; 0,5; 0,8, ... , 2,0; 2,3; 2,6,
joten niiden summa saadaan ensimmäisen yhteenlaskettavan $a_1 = 0,2$, viimeisen yhteenlaskettavan $a_9 = 2,6$ ja yhteenlaskettavien lukumäärän $n = 9$ avulla.

$$S_9 = 9 \cdot \frac{0,2+2,6}{2} = 12,6$$

Vastaus: $S_9 = 12,6$

408. **a)** Ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 7 - 2 \cdot 1 = 5$, viimeinen $a_{50} = 7 - 2 \cdot 50 = -93$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 50.

Aritmeettisen summan kaavan mukaan

$$S_{50} = 50 \cdot \frac{5-93}{2} = -2200.$$

b) Ensimmäinen yhteenlaskettava $a_{20} = 7 - 2 \cdot 20 = -33$, viimeinen $a_{50} = 7 - 2 \cdot 50 = -93$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 31.

Aritmeettisen summan kaavan mukaan

$$S = 31 \cdot \frac{-33-93}{2} = -1953$$

Vastaus: **a)** $S_{50} = -2200$ **b)** $S = -1953$

409. **a)** Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2$ ja $d = 4 - 2 = 2$, joiden avulla voidaan määrittää lukujonon yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 2 + (n-1) \cdot 2 \\ &= 2n \end{aligned}$$

b) Lasketaan, kuinka mones lukujonon jäsen 82 on aritmeettisessa lukujonossa 2, 4, … , 82.

Jäsenen 82 järjestysluku n toteuttaa yhtälön $2n = 82$, josta $n = 41$. Summassa on siis 41 yhteenlaskettavaa.

c) Ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 2$, viimeinen $a_{41} = 82$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 41.

Aritmeettisen summan kaavan mukaan

$$S_{41} = 41 \cdot \frac{2+82}{2} = 1722$$

Vastaus: **a)** $a_n = 2n$ **b)** $2n = 82$, $n = 41$ **c)** $S_{41} = 1722$

410. **a)** Aritmeettisen summan 0,2 + 0,5 + 0,9 + … + 29,9 yhteenlaskettavat ovat aritmeettisen lukujonon 0,2; 0,5; 0,9; … , 29,9 jäseniä.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 0{,}2$ ja erotusluku $d = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$. Niiden avulla voidaan määrittää lukujonon yleinen jäsen
$a_n = 0{,}2 + (n - 1) \cdot 0{,}3 = 0{,}3n - 0{,}1$.

Lasketaan, kuinka mones lukujonon jäsen 29,9 on aritmeettisessa lukujonossa 0,2, 0,5, 0,9, … , 29,9. Jäsenen 29,9 järjestysluku n toteuttaa yhtälön $0{,}3n - 0{,}1 = 29{,}9$.

$$
\begin{aligned}
0{,}3n - 0{,}1 &= 29{,}9 \\
0{,}3n &= 29{,}9 + 0{,}1 \\
0{,}3n &= 30 \quad \| : 0{,}3 \\
n &= 100
\end{aligned}
$$

Summassa on siis 100 yhteenlaskettavaa. Koska $a_1 = 0{,}2$, $a_{100} = 29{,}9$ ja $n = 100$, niin

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{0{,}2 + 29{,}9}{2} = 1505.$$

b) Aritmeettisen summan –5 – 1 + 3 + … + 51 yhteenlaskettavat ovat aritmeettisen lukujonon –5, –1, 3, …, 51 jäseniä.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = -5$ ja $d = -1 - (-5) = 4$, joiden avulla voidaan määrittää lukujonon yleinen jäsen
$a_n = -5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 9$.

Lasketaan, kuinka mones lukujonon jäsen 51 on aritmeettisessa lukujonossa –5, –1, 3, … , 51. Jäsenen 51 järjestysluku n toteuttaa yhtälön $4n - 9 = 51$.

$$
\begin{aligned}
4n - 9 &= 51 \\
4n &= 51 + 9 \\
4n &= 60 \quad \| : 4 \\
n &= 15
\end{aligned}
$$

Summassa on siis 15 yhteenlaskettavaa. Koska $a_1 = -5$, $a_{15} = 51$ ja $n =$ 15, niin

$$S_{15} = 15 \cdot \frac{-5+51}{2} = \frac{15 \cdot \overset{23}{\cancel{46}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 15 \cdot 23 = 345.$$

Vastaus: **a)** $S_{100} = 1505$ **b)** $S_{15} = 345$

411. Aamuyöllä klo 1 seinäkello lyö yhden kerran,
klo 2 kaksi kertaa
jne. aina klo 12 saakka, jolloin seinäkello lyö 12 kertaa.
Tämän jälkeen klo 13 alkaen seinäkello lyö taas yhden kerran,
kunnes klo 24 se lyö taas 12 kertaa.

Lyöntien lukumäärä kasvaa aina yhdellä, joten lyöntien lukumäärät ovat aritmeettisen lukujonon 1, 2, 3, ..., 12 jäseniä. Klo 12:een mennessä kellon lyöntien kokonaislukumäärä saadaan summasta 1 + 2 + 3 + ... + 12.

Koska on $a_1 = 1$ ja $a_{12} = 12$ ja $n = 12$, niin

$$S_{12} = 12 \cdot \frac{1+12}{2} = \frac{\overset{6}{\cancel{12}} \cdot 13}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 6 \cdot 13 = 78.$$

Samalla tavalla summa 1 + 2 + 3 + ... + 12 = 78 kuvaa kaikkien lyöntien lukumäärää aikavälillä klo 13–24. Vuorokauden aikainen seinäkellon lyöntien lukumäärä on siis yhteensä 78 + 78 = 156.

Vastaus: 156 lyöntiä

412. **a)** Lukujono 1, 3, 6, ... kuvaa sinisten ympyröiden lukumääriä ensimmäisissä kuvioissa. Koska peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio, lukujono ei ole aritmeettinen. Hahmotellaan lukujonoa säännönmukaisuuden löytämiseksi:

$a_1 = 1$
$a_2 = 3 = 1 + 2 = a_1 + 2$
$a_3 = 6 = 3 + 3 = a_2 + 3$

Edellisten perusteella
$a_4 = a_3 + 4 = 6 + 4 = 10$
$a_5 = a_4 + 5 = 10 + 5 = 15$
$a_6 = a_5 + 6 = 15 + 6 = 21$
$a_7 = a_6 + 7 = 21 + 7 = 28$
$a_8 = a_7 + 8 = 28 + 8 = 36$
$a_9 = a_8 + 9 = 36 + 9 = 45$
$a_{10} = a_9 + 10 = 45 + 10 = 55$

Kuviojonon 10. kuviossa on 55 sinistä ympyrää.

b) Lukujono 9, 12, 15, ... kuvaa vihreiden ympyröiden lukumääriä ensimmäisissä kuvioissa. Nyt peräkkäisten jäsenten erotus $d = 15 – 12 = 3$ näyttää olevan vakio, joten lukujono on aritmeettinen.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 9$ ja $d = 3$, joiden avulla voidaan määrittää lukujonon 10. jäsen

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 + (n - 1) \cdot d \\ &= 9 + (10 - 1) \cdot 3 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Kymmenen ensimmäisen kuvion vihreiden ympyröiden yhteismäärä saadaan summasta on $9 + 12 + 15 + \ldots + 36$.

Koska $a_1 = 9$, $a_{10} = 36$ ja $n = 10$, niin

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{9 + 36}{2} = 225$$

Vastaus: **a)** 10. kuviossa on 55 sinistä ympyrää. **b)** 10. kuviossa on 36 vihreää ympyrää, 10 ensimmäisessä on 225 vihreää ympyrää.

413. I tapa:

Ilta	1	2	3	4	5	6	7	8
Kynttilöiden lkm	2	3	4	5	6	7	8	9

Jokaisella kerralla otetaan uusi kynttilä.
$(1 + 1) + (2 + 1) + (3 + 1) + (4 + 1) + (5 + 1) + (6 + 1) + (7 + 1) + (8 + 1)$
$= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$

Lasketaan summa
$(2 + 3 + 5) + (4 + 6) + (7 + 8) + 9$
$= 10 + 10 + 15 + 9 = 44$

II tapa:
Kynttilöistä muodostuu aritmeettinen summa
$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$,
sillä peräkkäisten jäsenten erotus on 1. Ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 2$, viimeinen $a_8 = 9$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 8.

Aritmeettisen summan kaavan mukaan

$$S_8 = 8 \cdot \frac{2+9}{2} = 44$$

Vastaus: 44 kynttilää

414. **a)** Parittomat, positiiviset kokonaisluvut muodostavat lukujonon
1, 3, 5, 7, … , missä erotusluku on $d = 3 - 1 = 2$.
100. jäsen saadaan laskettua, kun tiedetään $a_1 = 1$, $d = 2$ ja $n = 100$.

$$\begin{aligned} a_{100} &= a_1 + (n - 1) \cdot d \\ &= 1 + (100 - 1) \cdot 2 \\ &= 199 \end{aligned}$$

Sadas pariton luku on 199.

Parilliset, positiiviset kokonaisluvut muodostavat lukujonon
2, 4, 6, 8, … , missä erotusluku on $d = 4 - 2 = 2$.
100. jäsen saadaan laskettu, kun tiedetään $a_1 = 2$, $d = 2$ ja $n = 100$.

$$\begin{aligned} a_{100} &= a_1 + (n - 1) \cdot d \\ &= 2 + (100 - 1) \cdot 2 \\ &= 200 \end{aligned}$$

Sadas parillinen luku on 200.

b) Parittomat luvut muodostavat summan $1 + 3 + 5 + \ldots + 199$.
Ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$, viimeinen $a_{100} = 199$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 100.

Aritmeettisen summan kaavan mukaan

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{1+199}{2} = 10\ 000.$$

Parilliset luvut ovat muodostavat summan $2 + 4 + 6 + \ldots + 200$.
Ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 2$, viimeinen $a_{100} = 200$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 100.

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{2+200}{2} = 10\ 100.$$

Summien erotus on $10\ 100 - 10\ 000 = 100$. Parillisten lukujen summa on 100 suurempi.

Vastaus: **a)** 199 ja 200 **b)** Eroaa.

415. **a)** Koska lukujono on aritmeettinen, sen jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen erotusluku d. Hahmotellaan tilannetta kaavion avulla.

$$a_1 \qquad a_2 \qquad a_3 \qquad a_4 \qquad a_5 \qquad a_6 \qquad a_7 \xrightarrow{+d} a_8 \xrightarrow{+d} a_9 \xrightarrow{+d} a_{10}$$

Aritmeettisen lukujonon sääntöä $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ varten on selvitettävä ensimmäinen jäsen a_1 ja erotusluku d.

Kaaviosta nähdään, että lisäämällä seitsemänteen jäseneen $a_7 = 6$ erotusluku d kolme kertaa, saadaan 10. jäsen $a_{10} = 30$ eli $6 + 3d = 30$.

Ratkaistaan yhtälöstä erotusluku d.

$$\begin{aligned} 6+3d &= 30 \\ 3d &= 30-6 \\ 3d &= 24 \quad \| :3 \\ d &= 8 \end{aligned}$$

Lisäämällä ensimmäiseen jäseneen a_1 erotusluku d kuusi kertaa saadaan 7. jäsen $a_7 = 6$. Toisin sanoen $a_1 + 6d = 6$. Koska erotusluku d tiedetään, yhtälöstä voidaan ratkaista ensimmäinen jäsen a_1.

$$\begin{aligned} a_1 + 6 \cdot 8 &= 6 \\ a_1 &= 6 - 48 \\ a_1 &= -42 \end{aligned}$$

Lukujonon sääntö on näin ollen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ a_n &= -42 + (n-1) \cdot 8 \\ &= -42 + 8n - 8 \\ &= 8n - 50 \end{aligned}$$

b) Ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -42$.
Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{35} = 8 \cdot 35 - 50 = 230$.
Yhteenlaskettavien lukumäärä on 35.

Summa on

$$S_{35} = 35 \cdot \frac{-42 + 230}{2} = 3290$$

c) Lukujonon n. jäsen on $a_n = 8n - 50$. Lasketaan jäsenet a_{20} ja a_{40}.
$a_{20} = 8 \cdot 20 - 50 = 110$
$a_{40} = 8 \cdot 40 - 50 = 270$

Summassa lasketaan yhteen lukujonon jäsenet $a_{20}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{40}$.
Koska mukaan ei lasketa 19 ensimmäistä jäsentä $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{19}$, yhteenlaskettavia jäseniä on yhteensä $40 - 19 = 21$.

Aritmeettisen summan kaavan mukaan

$$S = 21 \cdot \frac{110 + 270}{2} = 3990$$

Vastaus: **a)** $a_n = 8n - 50$ **b)** $S_{35} = 3290$ **c)** $S = 3990$

416. **a)** Esitetään kuvioiden murtoviivat summina.

kuvio 1: $1 + 1 = 2$
kuvio 2: $1 + 1 + 2 + 2 = 6$
kuvio 3: $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12$
kuvio 4: $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 20$
kuvio 5: $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 = 30$

Murtoviivojen pituudet ovat 2, 6, 12, 20 ja 30.

b) 10. kuvion murtoviivan pituus on
$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + ... + 10 + 10$
$= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 10)$

Sulkeiden sisällä on aritmeettinen summa,
missä $a_1 = 1$, $a_{10} = 10$ ja $n = 10$, joten

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{1+10}{2} = 55.$$

Aritmeettinen summa kerrotaan vielä kahdella eli
$2 \cdot 55 = 110$.

Vastaus: **a)** 2, 6, 12, 20 ja 30 **b)** 110

417. **a)** $1 + 2 + 3 + \ldots$

Yhteensä pinossa on 500 tölkkiä. Luetellaan taulukossa tölkkien lukumääriä kerroksittain.
Sarakkeessa A on rivien järjestysnumero,
sarakkeessa B rivillä olevien tölkkien lukumäärä ja
sarakkeessa C tölkkien lukumäärä yhteensä.

Sarakkeeseen B laitetaan ensimmäiseen soluun 1, sitten seuraavaan soluun 2 ja raahataan mustasta neliöstä oikeasta alakulmasta. C-sarakkeessa komennolla ”C2 = C1+B2” ja kaava kopioidaan raahaamalla pienestä mustasta neliöstä oikeasta alakulmasta.

1	1	1
2	2	3
3	3	6
4	4	10
5	5	15
6	6	21
7	7	28
8	8	36
9	9	45
10	10	55
11	11	66
12	12	78
13	13	91
14	14	105
15	15	120
16	16	136
17	17	153
18	18	171
19	19	190
20	20	210
21	21	231
22	22	253
23	23	276
24	24	300
25	25	325
26	26	351
27	27	378
28	28	406
29	29	435
30	30	465
31	31	496

Taulukkolaskentaohjelman avulla huomataan, että 31 kerrokseen tarvitaan 496 tölkkiä.

b) 500 – 496 = 4

Siis 4 tölkkiä jää yli.

Vastaus: **a)** 31 kerrosta **b)** 4 tölkkiä jää yli.

418. **a)** Taulukoidaan arvoja. Sarakkeessa A on Leon säästöt ja taulukossa B on Linuksen säästöt.

Taulukossa sarakkeessa A on A1 alkupääoma 210, A2-soluun kirjoitetaan ”=A1+4” ja vedetään oikeasta alakulmasta alas. Taulukossa sarakkeessa B on B1 alkupääoma 120, B2-soluun kirjoitetaan ”=B1+6” ja vedetään oikeasta alakulmasta alas.

	A	B
1	210	120
2	214	126
3	218	132
4	222	138
5	226	144
6	230	150
7	234	156
8	238	162
9	242	168
10	246	174
11	250	180
12	254	186
13	258	192
14	262	198
15	266	204
16	270	210
17	274	216
18	278	222
19	282	228
20	286	234
21	290	240
22	294	246
23	298	252
24	302	258
25	306	264
26	310	270
27	314	276
28	318	282
29	322	288
30	326	294
31	330	300
32	334	306
33	338	312
34	342	318
35	346	324
36	350	330
37	354	336
38	358	342
39	362	348
40	366	354
41	370	360
42	374	366
43	378	372
44	382	378
45	386	384
46	390	390
47	394	396
48	398	402
49	402	408
50	406	414
51	410	420
52	414	426
53	418	432
54	422	438
55	426	444
56	430	450

Taulukosta huomataan, että 45 viikon kuluttua eli viikolla 46 pojilla on yhtä paljon rahaa säästössä.

b) Linus pystyy ostamaan 450 euroa maksavan laitteen 55 viikon kuluttua eli viikolla 56.

Vastaus: **a)** 45 viikon kuluttua **b)** Linus, 55 viikon kuluttua

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

419. **a)** Kirjoitetaan summamerkintä $\sum_{k=1}^{4} \frac{2}{k}$ yhteenlaskuna.

$$\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}=2+1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=4\frac{1}{6}$$

b) Kirjoitetaan summamerkintä $\sum_{i=1}^{10}(3i+2)$ yhteenlaskuna.

$$(3\cdot 1+2)+(3\cdot 2+2)+(3\cdot 3+2)+(3\cdot 4+2)+\ldots+(3\cdot 10+2)$$
$$=5+8+11+14+\ldots+32$$

Aritmeettisessa summassa $a_1 = 5$, $a_{10} = 32$ ja $n = 10$, joten
$S_{10}=10\cdot\frac{5+32}{2}=185$.

Kirjoitetaan summamerkintä $\sum_{k=3}^{19}(1-7k)$ yhteenlaskuna.

$$(1-7\cdot 3)+(1-7\cdot 4)+(1-7\cdot 5)+\ldots+(1-7\cdot 19)$$
$$=-20-27-34-\ldots-132$$

Summassa lasketaan yhteen lukujonon jäsenet a_3, a_4, ... ja a_{19}. Koska mukaan ei lasketa kahta ensimmäistä jäsentä a_1 ja a_2, yhteenlaskettavia jäseniä on yhteensä 19 – 2 = 17.

Ensimmäinen yhteenlaskettava on –20, viimeinen –132 ja yhteenlaskettavien lukumäärä 17, joten summa on
$S=17\cdot\frac{-20-132}{2}=-1\,292$.

Vastaus: **a)** $\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}=4\frac{1}{6}$ **b)** $S_{10} = 185$, summa on –1 292.

420. **a)** Kysytyt murtoluvut ovat $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ ja $\frac{4}{5}$.

Lasketaan näiden murtolukujen summa

$$S_4 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

b) Kysytyt murtoluvut ovat

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, ... ,$\frac{7}{10}$,$\frac{8}{10}$ ja $\frac{9}{10}$, joiden summa on

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{7}{10} + \frac{8}{10} + \frac{9}{10} \\
&= \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + (\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}) \\
&\quad + \ldots + (\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{6}{10} + \frac{7}{10} + \frac{8}{10} + \frac{9}{10}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1+2}{3} + \frac{1+2+3}{4} + \ldots + \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{10}
\end{aligned}$$

Huomataan, että yhdellä murtoluvulla on nimittäjä 2, kahdella murtoluvulla on nimittäjä 3 jne. Murtolukuja on
(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) kpl = 45 kpl.

Lasketaan osasummia.

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = 2$$

…

$$\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{6}{10} + \frac{7}{10} + \frac{8}{10} + \frac{9}{10} = \frac{45}{10} = 4\frac{1}{2}$$

Murtolukujen summat muodostavat aritmeettisen summan:

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \ldots + 4\frac{1}{2}.$$

Ensimmäinen jäsen on $\frac{1}{2}$ ja viimeinen jäsen on $4\frac{1}{2}$ ja erotusluku $d = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Osasummia on 9 kpl.

Lasketaan osasummien summa.

$$S_9 = 9 \cdot \frac{\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}}{2} = 22\frac{1}{2}$$

c) *Ne murtoluvut, joiden nimittäjä on 100:*

Murtolukuja ovat $\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \ldots$ ja $\frac{99}{100}$.

Lasketaan näiden lukujen keskiarvo.
Lukujen summa on $\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \ldots + \frac{99}{100}$.

Lasketaan yhteen samannimisten murtolukujen osoittajat. Lukuja, joiden nimittäjä on enintään 100, on 1, 2, 3, …, 99, ja näiden summa on 1 + 2 +...+ 99.

Ensimmäinen jäsen on 1, viimeinen jäsen on 99 ja kaikkiaan lukuja on 99 kpl. Peräkkäisten jäsenten erotus on $d = 2 - 1 = 1$. Osoittajassa on siis aritmeettinen summa.

$$S_{99} = 99 \cdot \frac{1 + 99}{2} = 4950$$

Lasketaan summan S_{99} jäsenten keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \ldots + \frac{99}{100}}{99} = \frac{\frac{1 + 2 + 3 + \ldots + 99}{100}}{99} = \frac{4950}{9900} = 0{,}5$$

Näiden lukujen keskiarvo on 0,5.

Ne murtoluvut, joiden nimittäjä on enintään 100:

Murtolukuja ovat

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{7}{10},\ \frac{8}{10},\ \frac{9}{10},\ \ldots,\ \frac{1}{100},\ \frac{2}{100},\ \frac{3}{100},\ldots \text{ ja } \frac{99}{100}.$$

Lasketaan näiden lukujen keskiarvo. Lukujen summa on

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{7}{10}+\frac{8}{10}+\frac{9}{10} \\
&\quad +\ldots+\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{99}{100} \\
&= \frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}) \\
&\quad +\ldots+(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}+\frac{8}{10}+\frac{9}{10}) \\
&\quad +\ldots+(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{99}{100}) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1+2}{3}+\frac{1+2+3}{4} \\
&\quad +\ldots+\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{10} \\
&\quad +\ldots+\frac{1+2+3+\ldots+99}{100}
\end{aligned}$$

Hyödynnetään yllä valmiiksi saatua tulosta 4950.Viimeinen osasumma on $\frac{4950}{100}=49\frac{1}{2}$.

Osasummien summat muodostavat aritmeettisen summan:

$$\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\ldots+4\frac{1}{2}+\ldots+49\frac{1}{2}.$$

Ensimmäinen jäsen on $\frac{1}{2}$ ja viimeinen jäsen on $49\frac{1}{2}$ ja erotusluku $d=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Osasummia on 99 kpl.

Lasketaan osasummien summa

$$S_{99} = 99 \cdot \frac{\frac{1}{2} + 49\frac{1}{2}}{2} = 2\,475.$$

Keskiarvo on

$$S_{99} = \frac{2475}{4950} = 0,5$$

Molemmissa tapauksissa keskiarvo on 0,5.

Vastaus: **a)** $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ ja $\frac{4}{5}$, summa 2 **b)** 45 murtoluvun, summa $22\frac{1}{2}$
c) Molemmissa tapauksissa keskiarvo on 0,5.

421. Summan 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + … + 100 ensimmäinen yhteenlaskettava on 1, viimeinen 100 ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 100, joten

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{1+100}{2} = 5\,050.$$

Summassa olevat kolmella jaolliset luvut ovat 3, 6, 9, …, 96 ja 99. Luvut ovat aritmeettisen lukujonon jäseniä, jossa $d = 6 - 3 = 3$. Jotta tiedetään, kuinka mones lukujonon jäsen 99 on, tarvitaan lukujonon yleisen jäsenen a_n lauseke.

Yleisen jäsenen lauseke saadaan kaavasta $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, kun $a_1 = 3$ ja $d = 3$.

$a_n = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3 + 3n - 3 = 3n.$

Jäsenen 99 järjestysluku n toteuttaa yhtälön $3n = 99$:
$3n = 99$
$n = 33$

Koska $a_1 = 3$ ja $a_{33} = 33$ ja $n = 33$, niin

$$S_{33} = 33 \cdot \frac{3 + 99}{2} = 1\,683$$

Kun summasta 1 + 2 + 3 +… + 100
poistetaan kolmella jaollisten lukujen summa, saadaan jäljelle jääneiden lukujen summa eli
5050 – 1683 = 3367.

Vastaus: 3367

422. Lasketaan ensin paperirullan ulkoympyrän kehän pituus:
$2\pi r = d \cdot \pi = 110 \cdot \pi$.

Lasketaan sen jälkeen sisäympyrän kehän pituus:
$2\pi r = d \cdot \pi = 45 \cdot \pi$.

Jokaisella kierroksella paperin pituus pienenee saman verran, joten kierrosten paperin pituudet muodostavat aritmeettisen lukujonon. Kun kierrosten paperien pituudet lasketaan yhteen, saadaan summaksi
12,3 m = 12 300 mm.

Lasketaan yhteenlaskettavien lukumäärä eli kierrosten lukumäärä n, kun tiedetään ensimmäinen yhteenlaskettava 110π, viimeinen yhteenlaskettava 45π ja summa 12 300.

$$\frac{110\pi + 45\pi}{2} \cdot n = 12\,300 \qquad \| \cdot 2$$
$$(110\pi + 45\pi) \cdot n = 24\,600 \qquad \| : (110\pi + 45\pi)$$
$$n = \frac{24\,600}{110\pi + 45\pi} = 50{,}5$$

Vastaus: Paperirullassa on noin 50 kierrosta.

423. **a)** Kokeillaan lukua 16 soluun A1 ja kirjoitetaan seuraavaan soluun kaava "=A1+3". Kirjoitetaan viereisen sarakkeen johonkin soluun "=SUMMA(C1:C15)". Vedetään 2. solun oikeasta alareunasta niin pitkälle, että summa on 600 tuolia.

Jos summaksi ei saada lukua 600, muutetaan ensimmäiseen soluun uusia lukuarvoja ja seurataan, millä lähtöarvolla summasoluun tulee 600.

Kun ensimmäisessä solussa on 19, summaksi tulee 600.

19	
22	
25	
28	
31	
34	
37	
40	
43	
46	
49	
52	
55	
58	
61	600

b) Merkitään ensimmäisen rivin tuolien lukumäärää kirjaimella x.

$a_1 = x$
$a_2 = a_1 + 3 = x + 3$
$a_3 = a_3 + 3 = x + 3 + 3 = x + 2 \cdot 3$
$a_4 = a_3 + 3 = x + 2 \cdot 3 + 3 = x + 3 \cdot 3$
…
$a_{15} = x + 14 \cdot 3$

I tapa:
Summa $x + (x + 3) + (x + 2 \cdot 3) + (x + 3 \cdot 3) + \ldots + (x + 14 \cdot 3)$ ilmaisee tuolien lukumäärän. Koska ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = x$, viimeinen yhteenlaskettava on $a_{15} = x + 14 \cdot 3 = x + 42$ ja yhteenlaskettavia on 15 kpl, saadaan summa

$$S_{15} = 15 \cdot \frac{x + x + 42}{2} = 15 \cdot \frac{2x + 42}{2} = 15 \cdot \frac{\cancel{2}(x + 21)}{\cancel{2}} = 15(x + 21).$$

Tuolien lukumäärä on oltava 600. Tästä saadaan yhtälö
$15(x+21)=600$.

$$
\begin{aligned}
15\cdot(x+21) &= 600 \quad \| :15 \\
x+21 &= 40 \\
x &= 40-21=19
\end{aligned}
$$

II tapa:
Lasketaan rivien tuolien lukumäärät yhteen.

$$
\begin{aligned}
x + x + 3 + x + 2\cdot 3 + x + 3\cdot 3 + \ldots + x + 14\cdot 3 &= 600 \\
15x + (1 + 2 + 3 + \ldots + 14)\cdot 3 &= 600
\end{aligned}
$$

Lasketaan sulkeissa oleva summa. Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa $d = 1$

$$S_{14} = 14\cdot\frac{1+14}{2} = \frac{\overset{7}{\cancel{14}}\cdot 15}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 7\cdot 15 = 105$$

$$
\begin{aligned}
15x + 105\cdot 3 &= 600 \\
15x &= 600 - 315 \\
15x &= 285 \\
x &= 19
\end{aligned}
$$

Vastaus: **a)** Ensimmäisellä penkkirivillä on 19 tuolia.
b) 19 tuolia

424. **a)** Kuvio 6: 15 + 6 = 21. Kolmiolukujen kuusi ensimmäistä jäsentä ovat 1, 3, 6, 10, 15 ja 21.

b) Muodostetaan kolmiolukujen jonon sääntö tutkimalla ensimmäisiä jäseniä.
$a_1 = 1$
$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$
$a_3 = a_2 + 3 = 3 + 3 = 6$
$a_3 = a_2 + 4 = 6 + 4 = 10$
…

Lukujonon jäsen saadaan, kun edelliseen jäseneen lisätään jäsenen järjestysluku n eli $a_1 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

c) Muodostetaan sadas kolmioluku.
$a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + n$
$a_2 = 1 + 2$
$a_3 = 1 + 2 + 3$
$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4$
…
$a_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$

Sadannen kolmioluvun summassa ensimmäinen jäsen on 1, viimeinen jäsen 100 ja jäseniä on 100 kpl. Lasketaan summa

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{1+100}{2} = 100 \cdot \frac{101}{2} = 100 \cdot 50{,}5 = 5050.$$

Sadas kolmioluku on 5050.

Muodostetaan n. kolmioluku.
$a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$

n:nnen kolmioluvun summassa ensimmäinen jäsen on 1, viimeinen jäsen n ja jäseniä on n kpl. Lasketaan summa.

$$S_n = n \cdot \frac{1+n}{2} = \frac{n+n^2}{2}$$

n. kolmioluku on $\frac{n+n^2}{2}$.

Vastaus: **a)** 1, 3, 6, 10, 15 ja 21. **b)** $a_1 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + n$
c) $a_{100} = 5050$ ja $a_n = \frac{n^2+n}{2}$

425. Lasketaan peräkkäisten jäsenten summa. Kyseessä on aritmeettinen summa.

Peräkkäisten jäsenten erotus on vakio d.
Ensimmäinen jäsen on a_1,
toinen jäsen on $a_1 + d$
jne.
Näin muodostetaan summa n. jäseneen asti.

Muodostetaan tämän jälkeen samanlainen summa, mutta kirjoitetaan se niin, että viimeinen jäsen on ensimmäisenä ja toiseksi viimeinen jäsen toisena jne. Lasketaan yhteen sarakkeittain jäsenet. Esimerkiksi
$a_1 + a_1 + (n-1)\cdot d = 2a_1 + (n-1)\cdot d$
ja näin jatketaan joka sarakkeen kohdalla.

$$
\begin{array}{rl}
S_n = & a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d) \\
S_n = & (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \\
\hline
S_n = & \underbrace{(2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \ldots + (2a_1 + (n-1)d)}_{\text{n kpl}} \quad \| :2
\end{array}
$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_1 + (n-1)d)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

4.2 Geometrinen summa

LUO PERUSTA

426. Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 5$, suhdeluku $q = 3$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 10$.

Geometrisen summan kaavan mukaan

$$S_{10} = \frac{5(1-3^{10})}{1-3} = \frac{5-5\cdot 3^{10}}{-2} = 147\,620.$$

Vastaus: $S_{10} = 147\,620$

427. **a)** Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 1$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 9$. Suhdeluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten osamäärä eli $q = \frac{2}{1} = 2$.

b) $S_9 = \dfrac{1\cdot(1-2^9)}{1-2} = 511$.

Vastaus: **a)** ensimmäinen 1, lukumäärä 9 kpl ja $q = 2$ **b)** $S_9 = 511$

428. **a)** $a_1 = 5 \cdot 2^1 = 10$
$a_2 = 5 \cdot 2^2 = 20$
$a_3 = 5 \cdot 2^3 = 40$
…
$a_n = 5 \cdot 2^n$

b) Peräkkäisten jäsenten suhde on $q = \dfrac{20}{10} = 2$.

c) Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 10$, suhdeluku $q = 2$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 10$.

Geometrisen summan kaavan mukaan

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (1-2^{10})}{1-2} = 10\,230$$

Vastaus: **a)** $a_1 = 10$, $a_2 = 20$ ja $a_3 = 40$ **b)** $q = 2$ **c)** $S_{10} = 10\,230$

429. **a)** Yhteenlaskettavia on 6 kpl.

b) Yhteenlaskettavissa on mukana luvun 2 potenssit eksponentin arvoilla 0, 1, 2, … ja 15. Yhteenlaskettavia on siis 16 kpl.

c) Kohdan a summaan tarvittava suhdeluku on $q = \frac{3 \cdot 2}{3} = 2$.

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 3$, suhdeluku $q = 2$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 6$.

Geometrisen summan kaavan mukaan

$$S_6 = \frac{3(1-2^6)}{1-2} = 189$$

Kohdan b summaan tarvittava suhdeluku on $q = \frac{3 \cdot 2}{3} = 2$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 3$, suhdeluku $q = 2$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 16$.

Geometrisen summan kaavan mukaan

$$S_{16} = \frac{3(1-2^{16})}{1-2} = 196\,605$$

Vastaus: **a)** 6 **b)** 16 **c)** $S_6 = 189$ ja $S_{16} = 196\,605$.

430. Lääkeannokset ovat:

1. päivä: 100g

2. päivä: $\frac{100\,\text{g}}{2} = 50\,\text{g}$

3. päivä: $\frac{50\,\text{g}}{2} = 25\,\text{g}$

jne.

Annos puolitetaan joka päivä. Kyseessä on geometrinen lukujono 100, 50, 25, … , jonka suhdeluku on $q = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 100$, suhdeluku $q = \frac{1}{2}$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 7$.

Lasketaan tarvittavan lääkkeen määrä käyttämällä geometrisen summan kaavaa.

$$S_7 = \frac{100(1-(\frac{1}{2})^7)}{1-\frac{1}{2}} = 198,44 \approx 200$$

Vastaus: Lääkettä tarvitaan n. 200 grammaa.

VAHVISTA OSAAMISTA

431. Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 4$, suhdeluku $q = \frac{20}{4} = 5$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 15$.

Geometrisen summan kaavan mukaan

$$S_{15} = \frac{4(1-5^{15})}{1-5} \approx 3,05 \cdot 10^{10}$$

Vastaus: $S_{15} = 3,05 \cdot 10^{10}$

432. Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 0{,}1$ ja yhteenlaskettavia on 8 kpl.

Suhdeluku $q = 6$, sillä $q = \frac{0{,}6}{0{,}1} = 6$.

Varmistetaan vielä suhdeluku kertomalla edellinen jäsen kuudella.

$a_3 = 6 \cdot a_2 = 6 \cdot 0{,}6 = 3{,}6$
$a_4 = 6 \cdot a_3 = 6 \cdot 3{,}6 = 21{,}6$
$a_5 = 6 \cdot a_4 = 6 \cdot 21{,}6 = 129{,}6$

$a_6 = 6 \cdot a_5 = 6 \cdot 129{,}6 = 777{,}6$
$a_7 = 6 \cdot a_6 = 6 \cdot 777{,}6 = 4665{,}6$
$a_8 = 6 \cdot a_7 = 6 \cdot 4665{,}6 = 27{,}993{,}6$

Laskua voidaan sanoa geometriseksi summaksi, koska kaikkien peräkkäisten yhteenlaskettavien osamäärä on vakio, eli suhdeluku $q = 6$.

Geometrisen summan kaavan mukaan

$$S_8 = \frac{0{,}1 \cdot (1 - 6^8)}{1 - 6} = 33\,592{,}3$$

Vastaus: $S_8 = 33\ 592{,}3$

433. $a_n = -2 \cdot 3^{n-1}$

$a_1 = -2 \cdot 3^{1-1} = -2 \cdot 3^0 = -2 \cdot 1 = -2$
$a_2 = -2 \cdot 3^{2-1} = -2 \cdot 3 = -6$
$a_3 = -2 \cdot 3^{3-1} = -2 \cdot 3^2 = -2 \cdot 9 = -18$

Suhdeluku on $q = \frac{-6}{-2} = 3$.

Ensimmäinen yhteenlaskettava on -2, suhdeluku $q = 3$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 10.

Summa $S_{10} = \frac{-2(1 - 3^{10})}{1 - 3} = -59\,048$

Vastaus: $S_{10} = -59\ 048$

434. $a_n = 3^n$
$a_{10} = 3^{10}$
$a_{11} = 3^{11}$
…
$a_{20} = 3^{20}$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_{10} = 3^{10}$. Lukujonon 9 ensimmäistä jäsentä ei ole summassa, joten yhteenlaskettavia on 20 – 9 = 11.

Suhdeluku $q = \frac{3^{11}}{3^{10}} = 3$

Summa $S_{11} = \frac{3^{10}(1-3^{11})}{1-3} = 5\,230\,147\,077$

Vastaus: 5 230 147 077

435. Geometrisen summan suhdeluku on

$$q = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{3}_{1}} = 2.$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = \frac{3}{4}$. Luetellaan geometrisen lukujonon jäseniä, jotta saadaan selville, kuinka mones jäsen 96 on.

$a_1 = \frac{3}{4}$
$a_2 = \frac{3}{2}$
$a_3 = 3$
$a_4 = 3 \cdot 2 = 6$
$a_5 = 6 \cdot 2 = 12$
$a_6 = 12 \cdot 2 = 24$
$a_7 = 24 \cdot 2 = 48$
$a_8 = 48 \cdot 2 = 96$

Koska 96 on kahdeksas jäsen, lukujonossa on 8 jäsentä.

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = \frac{3}{4}$, suhdeluku $q = 2$ ja yhteenlaskettavia on $n = 8$.

Geometrisen summan kaavan mukaan

$$S_8 = \frac{\frac{3}{4}(1-2^8)}{1-2} = \frac{765}{4} = 191\frac{1}{4}.$$

Vastaus: $S_8 = \frac{765}{4} = 191\frac{1}{4}$

436. **a)** Luetellaan ensimmäisten päivien kävelymatkat
1. päivänä: 50 m
2. päivänä: $1{,}1 \cdot 50$ m
3. päivänä: $1{,}1 \cdot (1{,}1 \cdot 50)$ m $= 1{,}1^2 \cdot 50$ m
4. päivänä: $1{,}1 \cdot 1{,}1^2 \cdot 50$ m $= 1{,}1^3 \cdot 50$ m
…

Kävelymatkat muodostavat geometrisen lukujonon, jossa $a_1 = 50$ ja $q = 1{,}1$.

Toipilas kävelee 30. päivänä
$1{,}1^{29} \cdot 50$ m $= 793{,}1546$ m ≈ 800 m.

b) Päivittäiset kävelymatkat muodostavat geometrisen summan $50 + 1{,}1 \cdot 50 + 1{,}1^2 \cdot 50 + 1{,}1^3 \cdot 50 + \ldots + 1{,}1^{29} \cdot 50$, jossa $a_1 = 50$, $q = 1{,}1$ ja $n = 30$.

Summa

$$S_{30} = \frac{50(1-1{,}1^{30})}{1-1{,}1} = 8224{,}701 \approx 8200$$

n. 8200 m = n. 8,2 km

Vastaus: **a)** 30. päivän kuluttua toipilas kävelee n. 800 metriä.
b) n. 8,2 kilometriä.

437. **a)** Luetellaan ensimmäisten työssäolovuosien palkkoja:
1. vuosi: 25 000 €
2. vuosi: $1{,}015 \cdot 25\,000$ €
3. vuosi $1{,}015 \cdot (1{,}015 \cdot 25\,000 \text{ €}) = 1{,}015^2 \cdot 25\,000$ €
4. vuosi: $1{,}015^3 \cdot 25\,000$ €
…

Vuosiansiot muodostavat geometrisen lukujonon, jossa $a_1 = 25\,000$ ja $q = 1{,}015$.

35. vuoden vuosiansio on siten $1{,}015^{34} \cdot 25\,000$ €
$= 41\,474{,}90 \text{ €} \approx 41\,500$ €

b) Saadaan summa
$25\,000 + 1{,}015 \cdot 25\,000 + 1{,}015^2 \cdot 25\,000 + \ldots + 1{,}015^{34} \cdot 25\,000.$

Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 25\,000$, $q = 1{,}015$ ja $n = 35$.

Summa
$$S_{35} = \frac{25000(1-1{,}015^{35})}{1-1{,}015} = 1\,139\,802{,}197 \approx 1\,140\,000$$

Vastaus: **a)** 35 vuoden kuluttua palkka on n. 41 500 euroa.
b) Kokonaisansio 35 vuoden ajalta on 1 140 000 euroa.

438. **a)** Yrityksen tulos ensimmäisenä vuonna on 1,5 miljoonaa euroa. Tulos kasvaa 3 prosenttia vuosittain, joten seuraavan vuoden tulos on 1,03-kertainen edellisen vuoden tulokseen verrattuna.

Lasketaan ensimmäisiä 3 prosentin kasvulla saatuja tuloksia. Jätetään 10^6 eli miljoona pois ja lisätään se vastaukseen.

Ensimmäinen kasvanut tulos:
$a_1 = 1{,}03 \cdot 1{,}5$

Toinen kasvanut tulos:
$a_2 = 1{,}03^2 \cdot 1{,}5$
…
10. kasvanut tulos:
$a_{10} = 1{,}03^{10} \cdot 1{,}5$

Lasketaan 10 kasvaneen tuloksen summa
$1{,}03 \cdot 1{,}5 + 1{,}03^2 \cdot 1{,}5 + \ldots + 1{,}03^{10}$.

Kyseessä on geometrinen summa, sillä yhteenlaskettava saadaan, kun edellinen kerrotaan luvulla 1,03 eli $q = 1{,}03$.

Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1{,}03 \cdot 1{,}5$, $q = 1{,}03$ ja $n = 10$.

Summa
$$S_{10} = \frac{1{,}03 \cdot 1{,}5(1-1{,}03^{10})}{1-1{,}03} = 17{,}711\,693{,}54 \approx 17{,}7$$

Eli 17,7 miljoonaa euroa.

b) Yrityksen tulos alussa on $1{,}5 \cdot 10^6$. Tulos vähenee 3 prosenttia vuosittain, joten seuraavan vuoden tulos on 0,97-kertainen edellisen vuoden tulokseen verrattuna.

Lasketaan ensimmäisiä 3 prosentin vähennyksellä saatuja tuloksia. Jätetään 10^6 eli miljoona pois ja lisätään se vastaukseen.

Ensimmäinen vähentynyt tulos:
$a_1 = 0{,}97 \cdot 1{,}5$

Toinen vähentynyt tulos:
$a_2 = 0{,}97^2 \cdot 1{,}5$
…
Kymmenes vähentynyt tulos:
$a_{10} = 0.97^{10} \cdot 1{,}5$

Muodostetaan tuloksista summa

$0{,}97 \cdot 1{,}5 + 0{,}97^2 \cdot 1{,}5 + 0.97^3 \cdot 1{,}5 + \ldots + 0.97^9 \cdot 1{,}5$.

Kyseessä on geometrinen summa, sillä yhteenlaskettava saadaan, kun edellinen kerrotaan luvulla 0,97 eli $q = 0{,}97$.

Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 0{,}97 \cdot 1{,}5$, $q = 0{,}97$ ja $n = 10$.

Summa

$$S_{10} = \frac{0,97 \cdot 1,5(1-0,97^{10})}{1-0,97} = 12,73492985 \approx 12,7$$

Eli 12,7 miljoonaa euroa.

Vastaus: **a)** 17,7 miljoonaa euroa **b)** 12,7 miljoonaa euroa

439. **a)** Lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 4. Näin ollen saadaan edellinen jäsen jakamalla jäsen luvulla 4.

$$a_1 = \frac{20}{4} = 5$$

Lukujono 5, 20, 80, … on geometrinen, jossa $q = 4$.
Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 5$, $q = 4$ ja $n = 10$.

Summa

$$S_{10} = \frac{5(1-4^{10})}{1-4} = 1\,747\,625$$

b) Lukujonon jäsen saadaan vähentämällä edellisestä jäsenestä luku 4. Näin ollen saadaan edellinen jäsen lisäämällä jäseneen luku 4.

$a_1 = 20 + 4 = 24$

Lukujono 24, 20, 16, 12, … on aritmeettinen, jossa erotusluku $d = 4$.
Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 24$, viimeinen jäsen $a_{10} = –12$ ja $n = 10$.

Summa

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{24+(-12)}{2} = 60$$

Vastaus: **a)** $S_{10} = 1\ 747\ 625$ **b)** $S_{10} = 60$

440. **a)** Vehnänjyvien määrä kaksinkertaistuu aina seuraavalla shakkilaudan ruudulla. Ruuduille laitettavien jyvien lukumäärät ovat geometrisen lukujonon 1, 2, 4, 8, 16, … jäseniä. Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$ ja suhdeluku $q = 2$. Viimeisen eli 64. ruudun jyvien lukumäärää kuvaa lukujonon jäsen $a_{64} = 2^{64-1} = 2^{63}$.

Palkkio on summan $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63}$ tulos, joka voidaan laskea geometrisen summan kaavan avulla.
$= 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$.

Summa

$$S_{64} = \frac{1(1-2^{64})}{1-2} = 1{,}8 \cdot 10^{19}$$

b) Yhden vehnänjyvän massa on 50 mg = 0,05 g = 0,00005 kg.

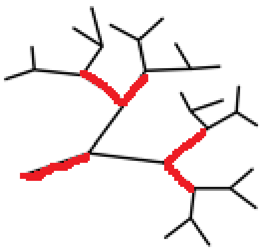
$1{,}8 \cdot 10^{19} \cdot 0{,}00005$ kg $= 9{,}2 \cdot 10^{14}$ kg $= 9{,}2 \cdot 10^{11}$ tonnia eli 920 000 miljoonaa tonnia vehnää.

Verrataan koko maailman vuosittaiseen satoon:

$$\frac{9200\cancel{00}}{7\cancel{00}} \approx 1314 \approx 1300$$

Vastaus: **a)** n. $1{,}8 \cdot 10^{19}$ vehnänjyvää
b) Hovimiehen saama palkkio oli 1300-kertainen maailman vuotuiseen vehnäsatoon verrattuna.

441. **a)** Punaisella värillä on merkitty 1. vaiheen verso ja 3. vaiheen versot.



b) Summa 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 on geometrinen, sillä peräkkäisten jäsenten osamäärä $q=\frac{2}{1}=2$ on vakio.
Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 1$, $q = 2$ ja $n = 10$.

Summa
$$S_{10}=\frac{1\cdot(1-2^{10})}{1-2}=1023$$

Vastaus: 1023

442. **a)** Jätetään miljoona tonnia pois taulukosta.

1. sarake A:
Kirjoitetaan ensimmäiseen soluun A2 numero 1, toiseen soluun A3 numero 2 ja loput numerot 3-24 saada muihin soluihin B4-B24 oikean alakulman mustasta neliöstä raahaamalla.

2. sarake B:
Kirjoitetaan ensimmäiseen soluun B2 numero 60, sitten toiseen soluun B3 kaava ”=B2*0.95”. Kaava kopioidaan kaikkiin soluihin B4-B24 oikean alakulman mustasta neliöstä raahaamalla.

3. sarake C:
Kirjoitetaan ensimmäiseen soluun C2 numero 60, sitten toiseen soluun C3 kaava ”=C2+B3”. Kaava kopioidaan kaikkiin soluihin C4-C24 oikean alakulman mustasta neliöstä raahaamalla.

	A	B	C
1	vuodet	päästöt	yhteensä
2	1	60	60
3	2	57,0	117,0
4	3	54,2	171,2
5	4	51,4	222,6
6	5	48,9	271,5
7	6	46,4	317,9
8	7	44,1	362,0
9	8	41,9	403,9
10	9	39,8	443,7
11	10	37,8	481,5
12	11	35,9	517,4
13	12	34,1	551,6
14	13	32,4	584,0
15	14	30,8	614,8
16	15	29,3	644,1
17	16	27,8	671,8
18	17	26,4	698,3
19	18	25,1	723,3
20	19	23,8	747,2
21	20	22,6	769,8
22	21	21,5	791,3
23	22	20,4	811,8
24	23	19,4	831,2

Huomataan, että 22 peräkkäisen vuoden päästöt ylittävät 800 miljoonaa tonnia.

Päästöt ovat tällöin vuositasolla 20,4 miljoonaa tonnia.

Vastaus: 22 peräkkäisen vuoden kuluessa, noin 20 miljoonaa tonnia

443. **a)** Ensimmäisenä vuonna:
Soluun A1 merkitään 2 000. Kiinnitetään soluun B1 luku 1,02, mikä on vuotuinen korko lähdeveron pidättämisen jälkeen. Tämän jälkeen soluun A2 merkitään ”=B1*A1”. Kaava kopioidaan kaikkiin soluihin A3-A8 oikean alakulman mustasta neliöstä raahaamalla.

Toisena vuonna:
Lasketaan B-sarakkeeseen samalla tavalla kuin ensimmäisenä vuonna.. Aloitetaan kuitenkin solusta B3. Soluun B3 merkitään ”=B1*A1”. Kaava kopioidaan kaikkiin soluihin B4-B8 oikean alakulman mustasta neliöstä raahaamalla.

Näin jatketaan aloittaen solusta C4, D5, E6, F7 ja G8. Lopuksi lasketaan sarakkeiden A-G rivit 8 yhteen.

Tämä summa ei kuitenkaan ylitä vielä 20 000 euroa. Sijoitetaan eri lukuja soluun A1.

Merkitään soluun A1 luku 2638. Tällä luvulla taulukko toimii ja lopullinen summa on 20 0003,87 euroa.

A	B	C	D	E	F	G
2638	1,02					
2690,76						
2744,575	2690,76					
2799,467	2744,575	2690,76				
2855,456	2799,467	2744,575	2690,76			
2912,565	2855,456	2799,467	2744,575	2690,76		
2970,816	2912,565	2855,456	2799,467	2744,575	2690,76	
3030,233	2970,816	2912,565	2855,456	2799,467	2744,575	2690,76
20003,87						

b) Taulukkolaskentaohjelmalla kokeilemalla saadaan noin 2640 euroa.

Vastaus: **b)** n. 2640 euroa

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

444. **a)** Kirjoitetaan summa $\sum_{n=1}^{9} 81 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$ yhteenlaskuna:

$$\sum_{n=1}^{9} 81 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$$
$$= 81 \cdot (\frac{2}{3})^{1-1} + 81 \cdot (\frac{2}{3})^{2-1} + \ldots + 81 \cdot (\frac{2}{3})^{9-1}$$
$$= 81 \cdot (\frac{2}{3})^{0} + 81 \cdot (\frac{2}{3})^{1} + \ldots + 81 \cdot (\frac{2}{3})^{8}$$
$$= 81 + 81 \cdot \frac{2}{3} + \ldots + 81 \cdot (\frac{2}{3})^{8}$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 81$ ja yhteenlaskettavia $n = 9$.
Lukujonon toinen jäsen on $a_2 = 81 \cdot \frac{2}{3}$, joten suhdeluku on

$$q = \frac{\cancel{81} \cdot \frac{2}{3}}{\cancel{81}} = \frac{2}{3}.$$

Lasketaan geometrinen summa

$$S_9 = \frac{81(1-(\frac{2}{3})^9)}{1-\frac{2}{3}} = 236\frac{55}{81}.$$

b) Kirjoitetaan summa $\sum_{n=4}^{15} -3 \cdot 2^n$ yhteenlaskuna:

$$\sum_{n=4}^{15} -3 \cdot 2^n = -3 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^5 - \ldots -3 \cdot 2^{15} = -48 - 96 - \ldots -3 \cdot 2^{15}$$

Summa on geometrinen, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -48$ ja yhteenlaskettavia $n = 12$. Lukujonon toinen jäsen on $a_2 = -96$, joten suhdeluku on

$$q = \frac{-96}{-48} = 2\,.$$

Lasketaan geometrinen summa

$$S = \frac{-48(1-2^{12})}{1-2} = -196\,560$$

Vastaus: **a)** $S_9 = 236\frac{55}{81}$ **b)** $-196\,560$

445. **a)** $\sum_{n=1}^{10} (2n + 2^n)$

$$= (2 \cdot 1 + 2^1) + (2 \cdot 2 + 2^2) + (2 \cdot 3 + 2^3) + \ldots + (2 \cdot 10 + 2^{10})$$
$$= (2 + 2) + (4 + 4) + (6 + 8) + (8 + 16) + (10 + 32) + (12 + 64)$$
$$+ (14 + 128) + (16 + 256) + (18 + 512) + (20 + 1024)$$
$$= 4 + 8 + 14 + 24 + 42 + 76 + 142 + 272 + 530 + 1044$$

Kyseessä ei ole geometrinen summa, sillä $q = \frac{8}{4} = 2$, mutta

$$q = \frac{14}{8} = 1\frac{3}{4}\,.$$

Eikä myöskään aritmeettinen, sillä peräkkäisten jäsenten erotus ei ole sama.

Sulkeissa olevista luvuista voidaan muodostaa kahdet summat. Sulkeiden ensimmäiset luvut 2, 4, 6, ... , 20 muodostavat summan 2 + 4 + 6 + ... + 20. Sulkeiden toiset luvut vastaavasti summan 2 + 4 + 8 + ... + 1024.

Ensimmäisen sulkulausekkeen summa on aritmeettinen, jossa $a_1 = 2$, $a_{10} = 20$ ja $n = 10$.

Lasketaan ensimmäinen summa

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{2+20}{2} = 110.$$

Toinen summa on geometrinen, jossa $a_1 = 2$, $q = 2$ ja $n = 10$.

Lasketaan toinen summa

$$S_{10} = \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = 2046$$

Lasketaan summat yhteen, saadaan 110 + 2 046 = 2 156

b) Lukujono ei ole geometrinen. Kirjoitetaan lukujonon jäsenet summana.

$$\begin{aligned}
5 &= 2 + 3 \\
9 &= 3 + 6 \\
16 &= 4 + 12 \\
29 &= 5 + 24 \\
54 &= 6 + 48 \\
103 &= 7 + 96 \\
200 &= 8 + 192 \\
393 &= 9 + 384 \\
778 &= 10 + 768 \\
1547 &= 11 + 1536 \\
3084 &= 12 + 3072 \\
6157 &= 13 + 6144 \\
12\,302 &= 14 + 12\,288 \\
24\,591 &= 15 + 24\,576 \\
49\,168 &= 16 + 49\,152 \\
98\,321 &= 17 + 98\,304 \\
196\,626 &= 18 + 196\,608 \\
393\,235 &= 19 + 393\,216 \\
786\,452 &= 20 + 786\,432 \\
1\,572\,885 &= 21 + 1\,572\,864
\end{aligned}$$

Käytetään hyväksi edellä olleita lukujen summamuotoja.

Lasketaan ensin lukujen 2, 3, 4, 5, 6, …, 21 summa ja sitten lukujen 3, 6, 12, … , 1 572 864 summa.

Ensimmäisessä summassa 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + … + 21, jossa $d = 3 - 2 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{20} = 21$ ja $n = 20$. Aritmeettisen summan kaavan avulla

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{2 + 21}{2} = 230$$

Toisessa summassa 3 + 6 + 12 + … + 1 572 864, jossa $q = \frac{6}{3} = 2$ ja $a_1 = 3$ ja $n = 20$. Geometrisen summan kaavan avulla

$$S_{20} = \frac{3(1-2^{20})}{1-2} = 3\,145\,725\,.$$

Lasketaan jonojen summat yhteen.
230 + 3 145 725 = 3 145 955

Vastaus: **a)** $(2+2)+(4+4)+(6+8)+(8+16)+(10+32)+(12+64)+(14+128)+(16+256)+(18+512)+(20+1024)$
$= 2\,156$ **b)** $S_{20} = 3\,145\,955$

446. **a)** $a_1 = 5$
$a_2 = 2^1 \cdot 5 + 5$
$a_3 = 2 \cdot (2^1 \cdot 5 + 5) + 5 = 2^2 \cdot 5 + 2^1 \cdot 5 + 5$
$a_4 = 2 \cdot (2^2 \cdot 5 + 2^1 \cdot 5 + 5) + 5 = 2^3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 + 2^1 \cdot 5 + 5$
$a_5 = 2(2^3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 + 2^1 \cdot 5 + 5) + 5$
$= 2^4 \cdot 5 + 2^3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 + 2^1 \cdot 5 + 2^0 \cdot 5$

b) a_{10}
$= 2^9 \cdot 5 + 2^8 \cdot 5 + 2^7 \cdot 5 + 2^6 \cdot 5 + 2^5 \cdot 5 + 2^4 \cdot 5 + 2^3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 + 2^1 \cdot 5 + 5$
$= 5(2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1)$
$= 5(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9)$

Summa $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9$ on geometrinen, jossa suhdeluku on

$q = \frac{2^2}{2} = 2$, ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$ ja lukumäärä $n = 10$.

Geometrisen summan kaavan mukaan

$$S_{10} = \frac{2(1-2^9)}{1-2} = 1022.$$

$5 \cdot 1\,022 = 5\,115$

Vastaus: **a)** $a_4 = 2 \cdot (2^2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 5) + 5 = 2^3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 5$
ja $a_5 = 2(2^3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 5) + 5 = 2^4 \cdot 5 + 2^3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 5$
b) $a_{10} = 5\,115$

447. **a)** Ensimmäinen summa

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= {}^{16)}\frac{1}{2} + {}^{8)}\frac{1}{4} + {}^{4)}\frac{1}{8} + {}^{2)}\frac{1}{16} + \frac{1}{32} \\ &= \frac{16}{32} + \frac{8}{32} + \frac{4}{32} + \frac{2}{32} + \frac{1}{32} \\ &= \frac{31}{32} \end{aligned}$$

on viiden ensimmäisen pinta-alan summa.

Toinen summa

$$S_{100} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{100}}_{100}$$

on 100:n ensimmäisen pinta-alan summa.

Kyseessä on geometrinen summa, jossa $a_1 = \frac{1}{2}$, suhdeluku

$$q = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cancel{4}_2} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} = \frac{1}{2}$$ ja $a_{100} = (\frac{1}{2})^{100}$.

Yhteenlaskettavien lukumäärä on 100.

Summa on

$$S_{100} = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^{100})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1-(\frac{1}{2})^{100}) = 1-(\frac{1}{2})^{100} = 1\,.$$

Kolmas summa

$$S_{1000} = \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+(\frac{1}{2})^{1000}}_{1000}$$

on 1000:n ensimmäisen pinta-alan summa.

Kyseessä on geometrinen summa, jossa $a_1 = \frac{1}{2}$, suhdeluku $q = \frac{1}{2}$ ja

$a_{1000} = (\frac{1}{2})^{1000}$.

Yhteenlaskettavien lukumäärä on 1000.

Summa on

$$S_{100} = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^{1000})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1-(\frac{1}{2})^{1000}) = 1-(\frac{1}{2})^{1000} = 1\,.$$

b) Kyseessä on geometrinen summa, jossa $a_1 = \frac{1}{2}$, suhdeluku

$q = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$. Yhteenlaskettavien lukumäärä on n, mikä on äärettömän suuri.

Summa on

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1-(\frac{1}{2})^n) = 1-(\frac{1}{2})^n.$$

Kun lukua $\frac{1}{2} = 0,5$ kerrotaan itsellään, sen arvo pienenee:
0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; …
Kun eksponentti n on hyvin suuri, on $(\frac{1}{2})^n$ hyvin lähellä nollaa, jolloin summan arvo lähenee koko ajan lukua 1.

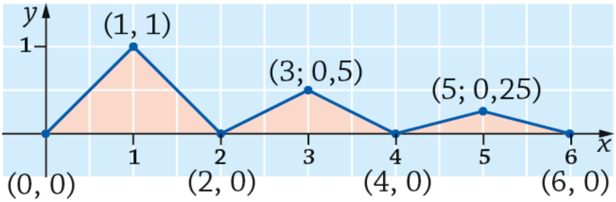
Summan $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \ldots$ täsmällinen arvo edellä olleen perusteella päätellään olevan 1.

Vastaus: **a)** $S_5 = \frac{31}{32}$, $S_{100} \approx 1$ ja $S_{1000} \approx 1$ **b)** 1

448. Henkilö ei putoa ollenkaan, mutta hänen etäisyytensä rotkon reunasta, saadaan miten pieneksi tahansa, kun liikutaan samaan tapaan riittävän kauan.

Vastaus: Henkilö ei putoa rotkoon.

449. **a)**



Kaikkien kolmioiden kanta on 2 ja korkeus on toisesta kolmiosta alkaen puolet edellisestä.

Korkeudet:

Ensimmäisen kolmion korkeus on 1.

Toisen kolmion korkeus on $\frac{1}{2}$.

Kolmannen kolmion korkeus on $\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Pinta-alat:

Ensimmäisen kolmion pinta-ala on $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

Toisen kolmion pinta-ala on $\frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

Kolmannen kolmion pinta-ala on $\frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4}$.

Huomataan, että kolmion pinta-ala on aina sama kuin sen korkeus. Koska korkeus puolittuu uudessa kolmiossa edelliseen verrattuna, myös pinta-ala puolittuu uudessa kolmiossa edelliseen verrattuna.

Uuden kolmion korkeus ja pinta-ala on 50 % pienempi edelliseen verrattuna.

b) Kolmioiden pinta-alat muodostavat geometrisen lukujonon $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots,$

jossa $q = \frac{1}{2}$. Lasketaan geometrisen summat S_5, S_{10}, S_{100}, S_{1000} ja $S_{1000000}$.

$$S_5 = \frac{(1-(\frac{1}{2})^5)}{1-\frac{1}{2}} = 1,9375$$

$$S_{10} = \frac{(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}} = 1,99805$$

$$S_{100} = \frac{(1-(\frac{1}{2})^{100})}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$S_{1000} = \frac{(1-(\frac{1}{2})^{1000})}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$S_{1000000} = \frac{(1-(\frac{1}{2})^{1000000})}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Kolmioiden lisääminen kasvattaa yhä vähemmän kolmioiden yhteispinta-alaa. Yhteispinta-alan tulos lähenee koko ajan lukua 2. Millään kolmioiden lukumäärällä yhteispinta-ala ei kuitenkaan saavuta tulosta 2.

Vastaus: **a)** Korkeus ja pinta-ala ovat 50 % pienempiä.
b) $S_5 = 1,9375$, $S_{10} \approx 1,9980$, $S_{100} \approx 2$, $S_{1000} \approx 2$ ja $S_{1000000} \approx 2$. Yhteispinta-ala näyttää lähestyvän lukua 2.

450. Perustellaan geometriselle summalle laskukaava.

Peräkkäisten jäsenten osamäärä on erotusluku q. Ensimmäinen jäsen on a_1, toinen jäsen on $q \cdot a_1$ jne. Näin muodostetaan summa n. jäseneen asti. Muodostetaan samanlainen summa, mutta kirjoitetaan se niin, että viimeinen jäsen on ensimmäisenä ja toiseksi viimeinen jäsen toisena jne. Kerrotaan tämän jälkeen jono vielä $(-q)$:lla.

Lasketaan yhteen sarakkeittain jäsenet. Esimerkiksi ensimmäinen sarake $a_1 + 0 = a_1$, toinen sarake $q \cdot a_1 - q \cdot a_1 = 0$ ja näin jatketaan joka sarakkeen kohdalla. Kaikkien muiden sarakkeiden laskusta tulee 0, paitsi ensimmäisestä ja viimeisestä.

$$\begin{array}{lllr}
S & = a_1 + q \cdot a_1 + q^2 \cdot a_1 + \ldots + q^{n-1} \cdot a_1 & & \| \cdot (-q) \\
\underline{-qS} & \underline{= \quad -q \cdot a_1 - q^2 \cdot a_1 + \ldots - q^{n-1} \cdot a_1} & \underline{- q^n \cdot a_1} & \\
S - q \cdot S & = a_1 & - q^n \cdot a_1 & \\
(1-q) \cdot S & = (1-q^n) \cdot a_1 & & \| : (1-q)
\end{array}$$

Tästä päätellään, että $S = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

LUVUN 4 PÄÄTÖSSIVUN TEHTÄVÄT

1 **a)**

C	D
1	3
2	12
3	48
4	192

Kirjoitetaan toiseen sarakkeeseen soluun D1 ”=3”, soluun D2 ”=D1*4” ja kopioidaan kaava soluihin D3-D4 oikean alakulman mustasta neliöstä raahaamalla.

Muodostuva lukujono 3, 12, 48, 192 on geometrinen, jonka suhdeluku

$$q = \frac{12}{3} = 4$$
.

Käyrien pituudet:

1. kuvio: $3 \cdot 1 = 3$

2. kuvio: $12 \cdot \frac{1}{3} = 4$

3. kuvio: $\overset{16}{\cancel{48}} \cdot \frac{1}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{16}{3}$

4. kuvio: $\overset{64}{\cancel{192}} \cdot \frac{1}{\underset{9}{\cancel{27}}} = \frac{64}{9}$

Kuvio	Janojen luku-määrä	Janan pituus	Käyrän pituus
1	3	1	3
2	12	$\frac{1}{3}$	4
3	48	$\frac{1}{9}$	$\frac{16}{3}$
4	192	$\frac{1}{27}$	$\frac{64}{9}$

Käyrien pituudet muodostavat geometrisen lukujonon, jonka suhdeluku $q = \frac{4}{3}$.

b) Ensimmäisen kuvion pinta-ala on A.

Ensimmäiseen kuvioon lisättävän pienen kolmion pinta-ala on $\frac{1}{9}$ ison kolmion pinta-alasta A eli lisäys on yhteensä $3 \cdot \frac{1}{9}$ A.

Pinta-alat:

1. fraktaalikuvio: A

2. fraktaalikuvio:

Toisessa vaiheessa yhden lisättävän pikkukolmion pinta-ala on $\frac{1}{9}$ isosta kolmiosta eli pinta-ala on

$$A+3\cdot\frac{1}{9}A=A+\frac{1}{3}A=\frac{4}{3}A.$$

3. fraktaalikuvio:

Kolmannessa vaiheessa yhden lisättävän pikkukolmion pinta-ala on $\frac{4}{9}$ isosta kolmiosta eli pinta-ala on

$$A+\frac{3}{9}A+\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{9}A$$

4. fraktaalikuvio:

Neljännessä vaiheessa yhden lisättävän pikkukolmion pinta-ala on $\frac{4}{9}$ isosta kolmiosta eli pinta-ala on

$$A+\frac{3}{9}A+\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{9}A+\frac{3}{9}\cdot(\frac{4}{9})^2 A$$

c) Pinta-ala $A_n = A + \frac{3}{9}A + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{9}A + \frac{3}{9}\cdot(\frac{4}{9})^2 A + \ldots + \frac{3}{9}\cdot(\frac{4}{9})^{n-2} A$.

Pinta-ala on $A + S_3$, missä S_3 on geometrinen summa, jonka ensimmäinen jäsen on $\frac{3}{9}A$, suhdeluku $\frac{4}{9}$ ja jäseniä on 3 kpl.

Vastaus: **a)** geometrisen lukujonon **b)** A, $A + \frac{3}{9}A$, $A + \frac{3}{9}A + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{9}A$, $A + \frac{3}{9}A + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{9}A + \frac{3}{9}\cdot(\frac{4}{9})^2 A$