3. PROSENTTI JA GEOMETRINEN LUKUJONO

3.1 Prosenttikerroin

LUO PERUSTA

301. **a)** 56 % = 0,56

b) 0,1 % = 0,001

c) 2,9 % = 0,029

d) 110 % = 1,1

Vastaus: **a)** 0,56 **b)** 0,001 **c)** 0,029 **d)** 1,1

302. A: $100\ \% + 5\ \% = 105\ \% = 1{,}05 = \frac{105}{100}$. Vaihtoehdot III ja IV.

B: $100\ \% - 5\ \% = 95\ \% = 0{,}95$. Vaihtoehto II.

C: $5\ \% = 0{,}05 = \frac{5}{100}$. Vaihtoehtot I ja V.

D: 95 % = 0,95. Vaihtoehto II.

E: $105\ \% = 1{,}05 = \frac{105}{100}$. Vaihtoehdot III ja IV.

Vastaus: A: III, IV, B: II, C: I, V, D: II, E: III, IV

303. **a)** Alkuperäistä lukua vastaa 100 %.

Kun luku kasvaa 40 %, niin saatu luku on 100 % + 40 % = 140 % alkuperäisestä luvusta.

Koska 140 % = 1,4, niin luku kerrotaan prosenttikertoimella 1,4.

b) Alkuperäistä lukua vastaa 100 %.

Kun luku vähenee 30 %, niin saatu luku on 100 % – 30 % = 70 % alkuperäisestä luvusta.

Koska 70 % = 0,7, niin luku kerrotaan prosenttikertoimella 0,7.

c) Alkuperäistä lukua vastaa 100 %.

Kun luku kasvaa 15,5 %, niin saatu luku on 100 % + 15,5 % = 115,5 % alkuperäisestä luvusta.

Koska 115,5 % = 1,155, niin luku kerrotaan prosenttikertoimella 1,155.

Vastaus: **a)** 1,4 **b)** 0,7 **c)** 1,155

304. **a)** Kerrointa 1,7 vastaa prosenttiluku 170 %.

Koska 170 % – 100 % = 70 %, niin hinta on noussut 70 %.

b) Kerrointa 0,6 vastaa prosenttiluku 60 %.

Koska 100 % – 60 % = 40 %, niin hinta on laskenut 40 %.

c) Kerrointa 0,1 vastaa prosentti luku 10 %.

Koska 100 % – 10 % = 90 %, niin hinta on laskenut 90 %.

d) Kerrointa 1,652 vastaa prosenttiluku 165,2 %.

Koska 165,2 % – 100 % = 65,2 %, niin hinta on noussut 65,2 %.

Vastaus: **a)** nousee 70 % **b)** laskee 40 % **c)** laskee 90 %
d) nousee 65,2 %

305. **a)** Toinen jäsen on 20 % suurempi kuin ensimmäinen, jolloin prosenttikerroin on
100 % + 20 % = 120 % = 1,2.

$a_2 = 1{,}2 \cdot 5 = 6$

b) Toinen jäsen on 60 % pienempi kuin ensimmäinen, jolloin prosenttikerroin on
100 % – 60 % = 40 % = 0,4.

$a_2 = 0{,}4 \cdot 5 = 2$

Vastaus: **a)** 1,2 ja $a_2 = 6$ **b)** 0,4 ja $a_2 = 2$

306. **a)** 4 pistettä verrataan 5 pisteeseen, joten $\frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\ \%$.

Koska 4 pistettä on 80 % 5 pisteestä, niin 4 pistettä on 20 % vähemmän kuin 5 pistettä.

b) 5 pistettä verrataan 4 pisteeseen, joten $\frac{5}{4} = 1{,}25 = 125\ \%$.

Koska 5 pistettä on 125 % 4 pisteestä, niin 5 pistettä on 25 % enemmän kuin 4 pistettä.

Vastaus: **a)** 20 % vähemmän **b)** 25 % enemmän

VAHVISTA OSAAMISTA

307. **a)** Alkuperäinen luku on 100 %, ja kun se kasvaa 100 %, niin uusi luku on 100 % + 100 % = 200 %.

Alkuperäinen luku on kerrottava prosenttikertoimella 2.

b) Alkuperäinen luku on 100 %, ja kun se kasvaa 250 %, niin uusi luku on 100 % + 250 % = 350 %.

Alkuperäinen luku on kerrottava prosenttikertoimella 3,5.

c) Alkuperäinen luku on 100 %, ja kun se vähenee 90 %, niin uusi luku on 100 % – 90 % = 10 %.

Alkuperäinen luku on kerrottava prosenttikertoimella 0,1.

Vastaus: **a)** 2 **b)** 3,5 **c)** 0,1

308. **a)** Opiskelija käyttää oppitunnista opiskeluun 100 % – 20 % = 80 %, jota vastaa prosenttikerroin 0,8.

Oppitunnista jää opiskeluun aikaa 0,8 · 75 min = 60 min.

b) Muuhun kuin opiskeluun kuluu yhdellä oppitunnilla 70 min – 60 min = 15 min.

Koko lukioajan oppitunneista kuluu aikaa muuhun kuin opiskeluun 75 · 18 · 15 min = 20 250 min.

Aika tunteina on $\frac{20250}{60} = 337{,}5$.

Vastaus: **a)** 60 min **b)** 337 h 30 min

309. **a)** Lasketaan, kuinka monta prosenttia kevytjuuston rasva on tavallisen juuston rasvasta.

$$\frac{17\text{ g}}{29\text{ g}} = 0{,}586... \approx 0{,}59 = 59\ \%$$

Kevytjuustossa on siten 100 % – 59 % = 41 % vähemmän rasvaa kuin tavallisessa juustossa.

b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia tavallisen juuston rasva on kevytjuuston rasvasta.

$$\frac{29\text{ g}}{17\text{ g}} = 1{,}705... \approx 1{,}71 = 171\ \%$$

Tavallisessa juustossa on siten 171 % – 100 % = 71 % enemmän rasvaa kuin kevytjuustossa.

Vastaus: **a)** noin 41 % vähemmän **b)** noin 71 % enemmän

310. Koska jäsenten erotus on 2, niin aritmeettisen lukujonon jäsenet ovat 3, 5, 7, 9,...

a) Lasketaan, kuinka monta prosenttia toinen jäsen on ensimmäisestä jäsenestä.

$$\frac{5}{3} = 1{,}666... \approx 1{,}67 = 167\ \%$$

Toinen jäsen on 167 % – 100 % = 67 % suurempi kuin ensimmäinen jäsen.

b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia kolmas jäsen on ensimmäisestä jäsenestä.

$$\frac{7}{3} = 2{,}333... \approx 2{,}33 = 233\ \%$$

Kolmas jäsen on 233 % – 100 % = 133 % suurempi kuin ensimmäinen jäsen.

c) Lasketaan, kuinka monta prosenttia ensimmäinen jäsen on kolmannesta jäsenestä.

$$\frac{3}{7}=0{,}428...\approx 0{,}43=43\,\%$$

Ensimmäinen jäsen on 100 % – 43 % = 57 % pienempi kuin kolmas jäsen.

Vastaus: **a)** n. 67 % suurempi **b)** n. 133 % suurempi
c) n. 57 % pienempi

311. **a)** Lukujen erotus on $^{2)}\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{6}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$.

b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia luku $\frac{3}{2}$ on luvusta $\frac{3}{4}$.

$$\frac{3}{2}:\frac{3}{4}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}=2=200\,\%$$

Luku $\frac{3}{2}$ on 200 % – 100 % = 100 % suurempi kuin luku $\frac{3}{4}$.

Vastaus: **a)** $\frac{3}{4}$ **b)** 100 %

312. Kun liuos on kylläinen, liuosta on 100 g + 35,7 g = 135,7 g.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia suolan määrä on koko liuoksen määrästä.

$$\frac{35{,}7\text{ g}}{135{,}7\text{ g}}=0{,}2630...\approx 0{,}263=26{,}3\ \%$$

Vastaus: n. 26,3 %

313. Osamaksulla maksettaessa hintaan lisätään avausmaksu ja kolme kertaa laskutuslisä, joten osamaksulla hinta on
162 € + 9,90 € + 3 · 3,95 € = 183,75 €.

Lasketaan, kuinka prosenttia osamaksulla maksettu hinta on käteismaksun hinnasta.

$$\frac{183{,}75\ €}{162\ €} = 1{,}134... \approx 1{,}13 = 113\ \%.$$

Osamaksulla hinta on 113 % – 100 % = 13 % suurempi.

Vastaus: n. 13 %

314. Koska polttoaineen kulutus pienenee 15 %, niin uusi polttoaineen kulutus on 100 % – 15 % = 85 % alkuperäisestä kulutuksesta. Uusi polttoaineen kulutus saadaan kertomalla alkuperäistä kulutusta 6,8 l / 100 km prosenttikertoimella 0,85.

Uusi kulutus on 0,85 · 6,8 l / 100 km = 5,78 l / 100 km.

Polttoaineen kulutus vuodessa on kilometrien määrä kerrottuna keskikulutuksella.

Alkuperäinen kulutus on $15\,000\ \text{km} \cdot \dfrac{6{,}8\ \text{l}}{100\ \text{km}} = 1020$ litraa.

Uusi kulutus on $15\,000\ \text{km} \cdot \dfrac{5{,}78\ \text{l}}{100\ \text{km}} = 867$ litraa.

Kasvihuonepäästöjen määrä on kulutetun bensiinin määrä kerrottuna yhdestä litrasta syntyvän kasvihuonepäästöjen määrä.

Alkuperäisestä kulutuksesta syntyvät kasvihuonepäästöt ovat
1020 l · 2,85 kg / l = 2907 kg.

Uudesta kulutuksesta syntyvät kasvihuonepäästöt ovat
867 l · 2,85 kg / l = 2470,95 kg.

Kasvihuonepäästöt vähenevät taloudellisessa ajotavalla
2907 kg – 2470,95 kg = 436,05 kg ≈ 440 kg.

Vastaus: n. 440 kg

315. **a)** Kolmessa vuodessa bonus kasvaa 3 · 5 = 15 prosenttiyksikköä, eli vakuutuksen hinta alenee 15 prosenttiyksikköä.

b) Liikennevakuutuksen vuosimaksusta maksetaan nyt 45 % bonuksella
100 % – 45 % = 55 %, joten vakuutusmaksu on
0,55 · 772,90 € = 425,095 € ≈ 425,10 €.

Kolmen vahingottoman vuoden jälkeen bonus on 45 % + 15 % = 60 %, jolloin maksettavaksi jää 40 % vuosimaksusta.
0,40 · 772,90 € = 309,16 €

Lasketaan, kuinka monta prosenttia uusi vakuutusmaksu on aikaisemmasta vakuutusmaksusta.

$$\frac{309{,}16\ €}{425{,}10\ €} = 0{,}727... \approx 0{,}73 = 73\,\%$$

Vakuutuksen hinta kolmen vuoden jälkeen on noin
100 % – 73 % = 27 % pienempi.

Vastaus: **a)** 15 prosenttiyksikköä **b)** n. 27 %

316. **a)** Lasketaan, kuinka prosenttia puolueen äänimäärä muuttui edellisiin vaaleihin verrattuna.

$$\frac{550\,000}{540\,000} = 1{,}0185... \approx 1{,}019 = 101{,}9\,\%$$

Koska puolueen äänimäärä oli 101,9 % edellisistä vaaleista, niin äänimäärä kasvoi noin
101,9 % – 100 % = 1,9 %.

b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia puolueen saama äänimäärä oli kaikista annetuista äänistä.

$$\frac{550\,000}{2\,930\,000} = 0{,}1877... = 18{,}77...\ \%$$

Edellisissä vaaleissa puolueen saama äänimäärä kaikista annetuista äänistä oli prosentteina

$$\frac{540\,000}{2\,820\,000} = 0{,}1914... = 19{,}14...\ \%\ .$$

Muutos prosenttiyksikköinä
$18{,}77... - 19{,}14... = -0{,}377... \approx -0{,}4$

c) Annettujen äänien määrä kasvoi suhteellisesti (eli prosentteina) laskien enemmän kuin puolueen äänimäärä.

Vastaus: **a)** kasvoi n. 1,9 %. **b)** väheni n. 0,4 prosenttiyksikköä.
c) Annettujen äänien määrä kasvoi suhteellisesti (eli prosentteina) laskien enemmän kuin puolueen äänimäärä.

317. **a)**

Yleinen verokanta: useimmat tavarat ja palvelut	24 %
Alennettu verokanta: elintarvikkeet, rehu, ravintola- ja ateriapalvelut	14 %
Alennettu verokanta: kirjat, lääkkeet, liikuntapalvelut, elokuvanäytökset, kulttuuri- ja viihdetilaisuuksien sisäänpääsy, henkilökuljetus, majoituspalvelut ja televisio- ja yleisradiotoiminnasta saadut korvaukset	10 %

[Luettu 24.8.2015]

b) Merkitään puhelimen verotonta hintaa kirjaimella x. Kun verottomaan hintaan x lisätään 24 prosentin arvonlisävero, saadaan myyntihinta $1{,}24x$.

Ratkaistaan veroton hinta x yhtälöstä.

$$1{,}24x = 307{,}50 \quad \| : 1{,}24$$
$$x \approx 247{,}98$$

Arvonlisäveroton hinta on 247,98 €.
Arvonlisävero on 307,50 € – 247,98 € = 59,52 €.

Merkitään lääkkeen verotonta hintaa kirjaimella y. Kun verottomaan hintaan y lisätään 10 prosentin arvonlisävero, saadaan myyntihinta $1{,}10y$. Ratkaistaan veroton hinta y yhtälöstä $1{,}10y = 11{,}10$.

$$\begin{aligned} 1{,}10y &= 11{,}10 \qquad \| : 1{,}10 \\ y &\approx 10{,}09 \end{aligned}$$

Arvonlisäveroton hinta on 10,09 €.
Arvonlisävero on 11,10 € – 10,09 € = 1,01 €.

Vastaus: **b)** Puhelimen arvonlisäveroton hinta on 247,98 € ja vero 59,52 € (ALV 24 %). Lääkkeen arvonlisäveroton hinta on 10,09 € ja vero 1,01 € (ALV 10 %).

318. Merkitään kirjaimella x lisättävän suolan määrää grammoissa. Liuosta on tällöin yhteensä $500 + x$ (g). Suolan määrän suhde liuoksen määrään on 0,9 % = 0,009, joten ratkaistaan lisättävän suolan määrä yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} \frac{x}{500+x} &= 0{,}009 \qquad \| \cdot (500+x) \\ x &= 0{,}009(500+x) \\ x &= 4{,}5 + 0{,}009x \\ x - 0{,}009x &= 4{,}5 \\ 0{,}991x &= 4{,}5 \qquad \| : 0{,}991 \\ x &= 4{,}540\ldots \\ x &\approx 4{,}54 \text{ (g)} \end{aligned}$$

Vastaus: n. 4,54 g

319. **b)** Vaihtoehto A:
Tuotetta on muutoksen jälkeen 1,3 · 200 ml = 260 ml. Koska 260 ml = 2,6 l, niin litrahinta on tällöin
$$\frac{15\text{ €}}{0{,}26\text{ l}} = 57{,}692...\text{ €/l} \approx 57{,}92\text{ €/l}.$$

Vaihtoehto B:
Alennettu hinta on 0,7 · 15 € = 10,50 €. Koska 200 ml = 0,2 l, niin litrahinta on tällöin $\frac{10{,}50\text{ €}}{0{,}2\text{ l}} = 52{,}50\text{ €/l}$
Mikäli tuotteen valmistuskustannukset ovat pakkauskoosta riippumattomia, niin valmistajalle edullisempi, eli tuottavampi on tapa A.

Vastaus: **b)** kuluttajalle B, tuotteen valmistajalle A

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

320. Merkitään ostohintaa kirjaimella x. Kun ostohintaan lisätään myyntikate (100 % + 77,5 % = 177,5 % = 1,775), saadaan $1{,}775x$.

Myyntihinta voidaan nyt esittää yhtälönä $3{,}56 + 0{,}42 + 1{,}775x = 6{,}10$. Ratkaistaan ostohinta x yhtälöstä.

$$\begin{aligned} 3{,}56 + 0{,}42 + 1{,}775x &= 6{,}10 \\ 1{,}775x &= 2{,}12 \qquad \| : 1{,}775 \\ x &= 1{,}194... \\ x &\approx 1{,}19\ (\text{€}) \end{aligned}$$

Myyntikate on 0,775 · 1,19 € = 0,922... € ≈ 0,92 €.

Myyntikatteen osuus myyntihinnasta $\frac{0{,}92\text{ €}}{6{,}10\text{ €}} = 0{,}150... \approx 0{,}15 = 15\ \%$.

Vastaus: 1,19 € ja noin 15 %

321. **a)** Liuoksessa on glukoosia 0,12 · 2 kg = 0,24 kg. Liuosta on yhteensä 2 kg + 1 kg = 3 kg.

Liuoksen glukoosipitoisuus on $\dfrac{0{,}24\text{ kg}}{3\text{ kg}} = 0{,}08 = 8\,\%$.

b) Liuoksessa on glukoosia yhteensä 0,08 · 3 kg + 0,25 kg = 0,49 kg. Liuosta on yhteensä 3 kg + 0,25 kg = 3,25 kg.

Liuoksen glukoosipitoisuus on $\dfrac{0{,}49\text{ kg}}{3{,}25\text{ kg}} = 0{,}150\ldots \approx 0{,}15 = 15\,\%$.

c) Liuoksessa on glukoosia yhteensä 0,05 · 3 kg + 0,07 · 2 kg = 0,29 kg. Liuosta yhteensä 3 kg + 2 kg = 5 kg.

Liuoksen glykoosipitoisuus on $\dfrac{0{,}29\text{ kg}}{5\text{ kg}} = 0{,}058 = 5{,}8\,\% \approx 6\,\%$.

Vastaus: **a)** 8 % **b)** n. 15 % **c)** n. 6 %

322. Merkitään kiinteäkorkoisten sijoitusten vuosittaista prosenttikerrointa kirjaimella x.

Sijoitusten vuosittainen kokonaisarvo voidaan esittää muodossa $1{,}050 \cdot 5200 + x \cdot 6800 = 5460 + 6800x$.

Koska sijoitusten kokonaisarvo nousi 3,3 %, sijoitusten kokonaisarvo oli $1{,}033 \cdot (5200 + 6800) = 12396$.

Ratkaistaan x yhtälöstä $5460 + 6800x = 12396$.

$$
\begin{aligned}
5460 + 6800x &= 12396 \\
6800x &= 12396 - 5460 \\
6800x &= 6936 \quad \| : 6800 \\
x &= \frac{6936}{6800} \\
x &= 1{,}020 \\
x &= 102{,}0\,\%
\end{aligned}
$$

Kiinteäkorkoisten sijoitusten vuosittainen korkoprosentti oli
102,0 % – 100 % = 2,0 %.

Vastaus: Korko oli 2,0 %.

323. Promille ‰ tarkoittaa tuhannesosaa, 10 ‰ = $\frac{10}{1000}$ = 0,010. 10 litraa Itämeren vettä sisältää suolaa 0,010 · 10 kg = 0,1 kg.

Kun 10 litraan Itämeren vettä lisätään x litraa vettä, suolapitoisuus määritetään lausekkeesta $\frac{0,1}{10+x}$.

Makean veden suolapitoisuus on 500 ppm = $\frac{500}{1\,000\,000} = 0,0005$.

Lisättävän veden määrä voidaan ratkaista yhtälöstä $\frac{0,01}{10+x} = 0,0005$.

$$\frac{0,01}{10+x} = 0,0005$$
$$0,1 = 0,0005(10 + x)$$
$$0,1 = 0,005 + 0,0005x$$
$$0,0005x = 0,1 - 0,005$$
$$0,0005x = 0,095 \qquad || :0,0005$$
$$x = \frac{0,095}{0,0005}$$
$$x = 190$$

Koska yhdessä sangossa on 10 litraa vettä, tarvitaan suolatonta sadevettä $\frac{190}{10} = 19$ sangollista.

Vastaus: 19 sangollista

324. Taulukoidaan viinirypäleiden ja rusinoiden paino, veden paino sekä kuiva-aineiden paino.

	Yhteensä	Vettä	Kuiva-aineet
Viinirypäleet	100 kg	80 kg	20 kg
Rusinat	x	$0{,}2x$	$0{,}8x$

Kuiva-aineiden määrä ei muutu vettä haihduttaessa eli se on sama viinirypäleissä ja rusinoissa. Tästä saadaan yhtälö $0{,}8x = 20$. Ratkaistaan yhtälöstä rusinoiden paino x.

$$0{,}8x = 20 \qquad || : 0{,}8$$
$$x = \frac{20}{0{,}8}$$
$$x = 25 \text{ (kg)}$$

Vettä on haihdutettava 100 kg – 25 kg = 75 kg.

Vastaus: 75 kg

325. Taulukoidaan uutuuspuhelimen myyntihinta, työvoimakustannukset, muut kulut ja myyntikate ennen ja jälkeen muutosten. Muut kulut saadaan, kun myyntihinnasta vähennetään työvoimakustannusten ja myyntikatteen osuus: 100 % – 5 % – 55 % = 40 %.

	Aluksi	Lopuksi
Myyntihinta	540 €	$0{,}95 \cdot 540$ € = 513 €
Työvoimakustannukset	$0{,}05 \cdot 540$ € = 27 €	$1{,}005 \cdot 27$ € = 27,135 €
Muut kulut	$0{,}4 \cdot 540$ € = 216 €	216 €
Myyntikate	$0{,}55 \cdot 540$ € = 297 €	513 € – 27,135 € – 216 € = 269,865 €

Lasketaan, kuinka monta prosenttia myyntikate muutoksen jälkeen on alkuperäisestä myyntikatteesta.

$$\frac{269{,}865\text{ €}}{297\text{ €}} = 0{,}9086... \approx 0{,}909 = 90{,}9\ \%$$

Myyntikatetta on pienennettävä 100 % – 90,9 % = 9,1 %.

Vastaus: 9,1 %

326. Alennuksien prosenttikertoimet ovat
100% – 10 % = 90 % = 0,9
100% – 15 % = 85 % = 0,85
100% – 20 % = 80 % = 0,8
100% – 25 % = 75 % = 0,75.

Kirjoitetaan alkuarvot soluihin A2-A6.
Soluun B2 kirjoitetaan ”=A2·0.9” ja kopioidaan solua alaspäin.
Soluun C2 kirjoitetaan ”=A2·0.85” ja kopioidaan solua alaspäin.
Soluun D2 kirjoitetaan ”=A2·0.8” ja kopioidaan solua alaspäin.
Soluun E2 kirjoitetaan ”=A2·0.75” ja kopioidaan solua alaspäin.

Laskentataulukko

	A	B	C	D	E
1		10 %	15 %	20 %	25 %
2	20	18	17	16	15
3	50	45	42.5	40	37.5
4	100	90	85	80	75
5	150	135	127.5	120	112.5
6	200	180	170	160	150

3.2 Prosentuaalisia muutoksia

LUO PERUSTA

327. **a)** Ensimmäisen muutoksen prosenttikerroin on
100 % + 20 % = 120 % = 1,2.

Osallistujien lukumäärä ensimmäisen muutoksen jälkeen on
1,02 · 50 = 60.

b) Toisen muutoksen prosenttikerroin on 100 % + 10 % = 110 % = 1,1.

Osallistujien lukumäärä toisen muutoksen jälkeen on 1,1 · 60 = 66.

Vastaus: **a)** 60 **b)** 66

328. **a)** Tuotteen hinta on ensimmäisen korotuksen jälkeen
100 % + 50 % = 150 % alkuperäisestä hinnasta.

Hinta on ensimmäisen korotuksen jälkeen 1,5 · 20 € = 30 €.

Kun tuotteen 30 euron hintaa korotetaan uudelleen 50 %, on lopullinen hinta 1,5 · 30 € = 45 €.

Väite on väärin. Tuotteen lopullinen hinta on 45 €.

b) Tuotteen hinta on ensimmäisen alennuksen jälkeen
100 % – 50 % = 50 % alkuperäisestä hinnasta.

Hinta on ensimmäisen alennuksen jälkeen 0,5 · 20 € = 10 €. Kun tuotteen 10 euron hintaa alennetaan uudelleen 50 %, on lopullinen hinta 0,5 · 10 € = 5 €.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia 5 euroa on 20 eurosta:

$$\frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\,\%.$$

Tuotteen hinta alennusten jälkeen on 25 % alkuperäisestä hinnasta, joten tuotteen hintaa on alentunut 100 % – 25 % = 75 %.

Väite on väärin. Tuotteen hinta alenee 75 %.

Vastaus: **a)** Väite on väärin. Tuotteen lopullinen hinta on 45 €.
b) Väite on väärin. Tuotteen hinta alenee 75 %.

329. **a)** Tuotteen hinta muutosten jälkeen on 0,8 · 1,3 · 60 € = 62,40 €.

Tuotteen hinta nousi 60 eurosta 62,40 euroon, joten korotettu hinta on $\frac{62{,}40\text{ €}}{60\text{ €}} = 1{,}04 = 104\ \%$ alkuperäisestä.

Tuotteen hintaa korotettiin kaikkiaan 104 % – 100 % = 4 %.

b) Tuotteen hinta muutosten jälkeen on 1,2 · 0,7 · 60 € = 50,40 €.

Tuotteen hinta aleni 60 eurosta 50,40 euroon, joten alennettu hinta on $\frac{50{,}4}{60} = 0{,}84 = 84\ \%$ alkuperäisestä.

Tuotteen hintaa alennettiin kaikkiaan 100 % – 84 % = 16 %.

Vastaus: **a)** nousi 4 % **b)** alenee 16 %

330. Merkitään kuukausipalkkaa ennen korotuksia kirjaimella x.

Palkkaa korotusten jälkeen kuvaa lauseke $1{,}02 \cdot 1{,}01 \cdot x = 1{,}0302x$, joten kuukausipalkka ennen korotuksia saadaan yhtälöstä $1{,}0302x = 3245{,}13$.

$$1{,}0302x = 3245{,}13 \quad || : 1{,}0302$$
$$x = \frac{3245{,}13}{1{,}0302} = 3150$$

Kuukausipalkka ennen korotuksia oli 3150 €.

Vastaus: Kuukausipalkka oli 3150 euroa.

331. Korkoprosentin prosenttikerroin on 100 % + 2 % = 102 % = 1,02.

a) Tilillä on rahaa vuoden kuluttua $1{,}02 \cdot 1500$ € = 1530 €.

b) Rahaa tilillä 1. vuoden jälkeen on $1{,}02 \cdot 1500$ €.

Rahaa tilillä 2. vuoden jälkeen on
$1{,}02 \cdot (1{,}02 \cdot 1500\ €) = 1{,}02^2 \cdot 1500\ €$.

Rahaa tilillä 3. vuoden jälkeen on
$1{,}02 \cdot (1{,}02^2 \cdot 1500\ €) = 1{,}02^3 \cdot 1500\ €$.

Rahaa tilillä 4. vuoden jälkeen on
$1{,}02 \cdot (1{,}02^4 \cdot 1500\ €) = 1{,}02^4 \cdot 1500\ €$.

Rahaa tilillä 5. vuoden jälkeen on
$1{,}02 \cdot (1{,}02^4 \cdot 1500\ €) = 1{,}02^5 \cdot 1500\ € = 1656{,}121...\ € \approx 1656{,}\ 12\ €$.

Vastaus: **a)** 1530 € **b)** 1656,12 €

VAHVISTA OSAAMISTA

332. **a)** Uusi hinta on kasvanut 10 %, joten se on 100 % + 10 % = 110 % hinnasta a.
Koska 110 % = 1,1, niin uutta hintaa kuvaa lauseke $1{,}1a$.

b) Uusi hinta on alentunut 20 %, joten se on 100 % – 20 % = 80 % hinnasta a.
Koska 80 % = 0,8, niin uutta hintaa kuvaa lauseke $0{,}8a$.

c) Uusi hinta on kasvanut 1,5 %, joten se on 100 % + 1,5 % = 101,5 % hinnasta a.
Koska 101,5 % = 1,015, niin uutta hintaa kuvaa lauseke $1{,}015a$.

d) Uusi hinta on alentunut 14,7 %, joten se on 100 % – 14,7 % = 85,3 % hinnasta a.
Koska 85,3 % = 0,853, niin uutta hintaa kuvaa lauseke $0{,}853a$.

Vastaus: **a)** $1{,}1a$ **b)** $0{,}8a$ **c)** $1{,}015a$ **d)** $0{,}853a$

333. **a)** Alkuperäinen hinta a on kerrottu prosenttikertoimella 1,3. Prosenttikerrointa 1,3 vastaa prosenttiluku 130 %. Hinta on noussut 130 % – 100 % = 30 %.

b) Alkuperäinen hinta a on kerrottu prosenttikertoimella 0,7. Prosenttikerrointa 0,7 vastaa prosenttiluku 70 %. Hinta on laskenut 100 % – 70 % = 30 %.

c) Alkuperäinen hinta a on kerrottu prosenttikertoimella 1,058. Prosenttikerrointa 1,058 vastaa prosenttiluku 105,8 %. Hinta on noussut 105,8 % – 100 % = 5,8 %.

d) Alkuperäinen hinta a on kerrottu prosenttikertoimella 0,433. Prosenttikerrointa 0,43 vastaa prosenttiluku 43,3 %. Hinta on laskenut 100 % – 43,3 % = 56,7 %.

Vastaus: **a)** nousee 30 % **b)** laskee 30 % **c)** nousee 5,8 %
d) laskee 56,7 %

334. Hotellihuoneen alkuperäinen hinta on a. Korotuksen jälkeen hinta on $1{,}2 \cdot a$. Koska 10 % hinnasta $1{,}2a$ on $0{,}12a$, on 20 % vastaavasti $2 \cdot 0{,}12a = 0{,}24a$.

Hinta sesongin jälkeen on $1{,}2a - 0{,}24a = 0{,}96a$. Lasketaan, kuinka paljon $0{,}96a$ on alkuperäisestä hinnasta a. Koska

$$\frac{0{,}96\cancel{a}}{\cancel{a}} = 0{,}96 = 96\ \%,$$

niin lopullinen hinta on 96 % alkuperäisestä hinnasta.

Hinta on siis laskenut kaikkiaan 100 % – 96 % = 4 %.

Vastaus: Lopullinen hinta on laskenut 4 % alkuperäisestä hinnasta.

335. **a)** Merkitään myytyjen banaanien määrää kirjaimella a. Tällöin kolmen muutoksen jälkeen myytyjen banaanien määrä oli
$1{,}060 \cdot 1{,}054 \cdot 0{,}975 \cdot a = 1{,}0893...a \approx 1{,}089a$

b) Muutosten jälkeistä myytyjen banaanien määrää kuvaa lauseke $1{,}089a$, jossa alkuperäistä määrää on kerrottu prosenttikertoimella 1,089.

Koska 1,089 = 108,9 %, on lopullinen määrä 108,9 % määrästä a.
Banaanien maailmankauppa siis kasvoi noin
108,9 % – 100 % = 8,9 %.

Vastaus: **a)** n. $1{,}089a$ **b)** kasvoi n. 8,9 %

336. Jäsen on 5 % suurempi kuin edellinen eli 100 % + 5 % = 105 %, joten edellinen jäsen kerrotaan luvulla 1,05.

a) Lukujonon 1. jäsen on 100.
Lukujonon 2. jäsen on $1{,}05 \cdot 100$.
Lukujonon 3. jäsen on $1{,}05 \cdot (1{,}05 \cdot 100) = 1{,}05^2 \cdot 100$.
Lukujonon 4. jäsen on $1{,}05 \cdot (1{,}05^2 \cdot 100) = 1{,}05^3 \cdot 100$ ja niin edelleen.

Lukujonon 10. jäsen on $1{,}05^{10-1} \cdot 100 = 155{,}13... \approx 155$.
Lasketaan, kuinka monta prosenttia luku 155 on luvusta 100:

$$\frac{155}{100} = 1{,}55 = 155\,\%.$$

Koska kymmenes jäsen on 155 % ensimmäisestä jäsenestä, on se 155 % – 100 % = 55 % suurempi kuin ensimmäinen jäsen.

b) Kymmenes jäsen on $1{,}05^{10-1} \cdot a = 1{,}5513... \cdot a \approx 1{,}55a$.
Kymmenes jäsen on noin 55 % suurempi kuin ensimmäinen jäsen.

Vastaus: **a)** n. 55 % suurempi **b)** n. 55 % suurempi

337. **a)** -

b) Merkitään muotilaukun alkuperäistä hintaa kirjaimella a.

Kauppa A:
Alkuperäisestä hinnasta saadaan ensin 20 % alennus, jolloin maksettavaksi jää 100 % – 20 % = 80 % alkuperäisestä hinnasta eli $0{,}8a$.

Toisen alennuksen jälkeen maksettavaksi jää 100 % – 25 % = 75 % alennetusta hinnasta $0{,}8a$ eli $0{,}75 \cdot 0{,}8a = 0{,}6a$.

Kauppa B:
Alennus on 40 %, jolloin maksettavaksi jää 100 % – 40 % = 60 % alkuperäisestä hinnasta.

Koska 60 % on prosenttikertoimena 0,60, niin alennuksen jälkeinen hinta saadaan lausekkeesta $0{,}6a$.

Molemmissa kaupoissa on alennuksien jälkeen sama hinta.

Vastaus: **b)** Molemmissa kaupoissa on sama hinta.

338. Olkoon lukujonon ensimmäinen jäsen a. Tällöin toinen jäsen on $1{,}2 \cdot a = 1{,}2a$ ja kolmas jäsen on $1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot a = 1{,}44a$. Ratkaistaan ensimmäinen jäsen yhtälöstä $1{,}44a = 180$.

$$\begin{aligned} 1{,}44a &= 180 \quad \| : 1{,}44 \\ a &= \frac{180}{1{,}44} \\ a &= 125 \end{aligned}$$

Vastaus: 125

339. Koska väkiluku kasvoi vuosittain 1,4 %, väkiluku saadaan kertomalla edellisen vuoden väkiluku kertoimella 1,014.

a) Jos väkiluku olisi kasvanut prosentuaalisesti samaa vauhtia, niin vuonna 2000 Suomen väkiluku olisi ollut
$1{,}014^{200} \cdot 422\,000 \approx 6\,800\,000$.

b) Merkitään kirjaimella a Suomen väkilukua vuonna 1780. Vuoden 1800 väkiluvusta ja vuotuisen kasvuprosentin tiedoista saadaan yhtälö, josta ratkaistaan a.

$$\begin{aligned} 1{,}014^{20} \cdot a &= 422\,000 \qquad \|:1{,}014^{20} \\ a &= \frac{422000}{1{,}014^{20}} \\ a &= 319560{,}6\ldots \\ a &\approx 320000 \end{aligned}$$

Vastaus: **a)** n. 6,8 miljoonaa **b)** n. 320 000

340. Merkitään tuotteen verotonta hintaa kirjaimella x.
Kun hintaan lisättävä vanha arvonlisävero oli 23 % verottomasta hinnasta x, veron suuruus oli $0{,}23x$. Tuotteen vanha myyntihinta oli
$x + 0{,}23x = 1{,}23x$.

Kun hintaan lisättävä uusi arvonlisävero on 24 % verottomasta hinnasta x, veron suuruus on $0{,}24x$. Tuotteen uusi myyntihinta on
$x + 0{,}24x = 1{,}24x$.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia uusi myyntihinta $1{,}24x$ on vanhasta myyntihinnasta $1{,}23x$.

$$\frac{1{,}24\cancel{x}}{1{,}23\cancel{x}} = 1{,}0081\ldots \approx 100{,}8\ \%$$

Koska uusi myyntihinta on 100,8 % vanhasta myyntihinnasta, niin myyntihinta nousi 100,8 % – 100 % = 0,8 %.

Vastaus: n. 0,8 %

341. Merkitään elintarvikkeen verotonta hintaa kirjaimella x. Verottomaan hintaan lisättävä arvonlisävero on 14 % verottomasta hinnasta x, joten veron suuruus on $0,14x$. Tuotteen verollinen hinta on $x + 0,14x = 1,14x$.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia verollinen hinta $1,14x$ on verottomasta hinnasta x.

$$\frac{\cancel{x}}{1,14\cancel{x}} = \frac{1}{1,14} = 0,877... \approx 0,88 = 88\ \%$$

Vastaus: n. 88 %

342. **a)** Lasketaan, kuinka monta prosenttia vuoden 2014 väkiluku 5 471 753 on vuoden 2013 väkiluvusta 5 451 270.

$$\frac{5471753}{5451270} = 1,00375... \approx 1,004 = 100,4\ \%$$

Vuoden 2014 väkiluku on 100,4 % vuoden 2013 väkiluvusta, joten väestön kasvuprosentti vuodesta 2013 vuoteen 2014 oli 100,4 % – 100 % = 0,4 %.

Suomen väestön kasvuprosentti oli noin 0,4 %.

b) Kirjoitetaan soluun A1 ”2015”, soluun A2 ”=A1+1” ja kopioidaan solua A2 alaspäin.

Kirjoitetaan soluun B1 ”=5471753/5451270·5 471 753”, soluun B2 ”= 5471753/5451270·B1” ja kopioidaan solua B2 alaspäin.

	A	B
1	2015	5492312,96
2	2016	5512950,18
3	2017	5533664,94
4	2018	5554457,54
5	2019	5575328,26
6	2020	5596277,41
7	2021	5617305,27
8	2022	5638412,15
9	2023	5659598,33
10	2024	5680864,11
11	2025	5702209,81
12	2026	5723635,71
13	2027	5745142,11
14	2028	5766729,33
15	2029	5788397,66
16	2030	5810147,41
17	2031	5831978,88
18	2032	5853892,38
19	2033	5875888,23
20	2034	5897966,72
21	2035	5920128,17
22	2036	5942372,89
23	2037	5964701,20
24	2038	5987113,40
25	2039	6009609,82
26	2040	6032190,77
27	2041	6054856,56
28	2042	6077607,52
29	2043	6100443,97
30	2044	6123366,22
31	2045	6146374,60
32	2046	6169469,44
33	2047	6192651,06
34	2048	6215919,77
35	2049	6239275,93
36	2050	6262719,84

Suomen väkiluku ylittää mallin mukaan 6 miljoonan rajan vuonna 2039.

Vastaus: **a)** n. 0,4 % **b)** Vuonna 2039.

343. Taulukoidaan taulukkolaskentaohjelmalla.
Sarakkeessa A latausten lukumäärä kasvaa yhtä monta prosenttia joka viikko.

Lasketaan peräkkäisten viikkojen prosentuaalinen muutos

$$\frac{35800}{34700} \approx 1,0317 .$$

Taulukossa tämä on laskettu taulukkolaskentaohjelman avulla. Eli soluun A1 on syötetty ensin 34700, soluun A2 on syötetty 35800, soluun A3 on syötetty ”=(A2/A1)·A2”. Sitten on vedetty oikeasta alakulman mustasta pisteestä 10 viikkoa.

Sarakkeessa B latausten lukumäärä kasvaa yhtä monella latauksella joka viikko.

Lasketaan kahden peräkkäisen viikon latauksien erotus eli
35800 – 34700 = 1100.

Taulukossa on syötetty ensin luku 34700 soluun B1, sitten soluun B2 on syötetty 35800, soluun B3 erotus ”=(B2–B1)+B2”. Sitten vedetään neliöstä 10 viikon mittaiseksi sarakkeeksi.

A	B
34700	34700
35800	35800
36934.87	36900
38105.72	38000
39313.68	39100
40559.93	40200
41845.7	41300
43172.22	42400
44540.79	43500
45952.74	44600
47409.46	45700

A	B
34700	34700
35800	35800
36935	36900
38106	38000
39314	39100
40560	40200
41846	41300
43172	42400
44541	43500
45953	44600
47409	45700

Lasketaan, kuinka monta prosenttia kymmenessä viikossa prosentuaalinen kasvu (47409 latausta) on kappalemääräisestä kasvusta (45700 latausta).

$$\frac{47409}{45700} = 1{,}037... \approx 1{,}04 = 104\ \%$$

Koska prosentuaalinen kasvu on 104 % kappalemääräisestä kasvusta, niin prosentuaalinen kasvu on 104 % – 100 % = 4 % suurempi.

Vastaus: Latausmäärä kasvaa enemmän prosenttikasvulla. Kasvu on n. 4 % enemmän kuin vakiokasvulla.

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

344. Merkitään yrityksen nykyistä tulosta kirjaimella a.

Jos tulos kasvaa vuosittain 50 %, tulos neljän vuoden kuluttua on $1{,}5^4 a = 5{,}0625a$.

Jos tulos kasvaa vuosittain 30 %, tulos neljän vuoden kuluttua on $1{,}3^4 a = 2{,}8561a$.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia tulos 50 %:n vuotuisella kasvulla saatu tulos on 30 %:n vastaavasta kasvusta:

$$\frac{5{,}0625\cancel{a}}{2{,}8561\cancel{a}} = 1{,}772... \approx 1{,}77 = 177\ \%$$

Vuotuisella kasvulla 50 % saatu yrityksen tulos on 177 % 30 %:n vuotuiseen kasvuun verrattuna. Tulos on siis 177 % – 100 % = 77 % suurempi.

Vastaus: n. 77 %

345. **a)** Olkoon elokuvalipun hinta a. Tällöin filmivuokra on $0{,}45a$, verot $0{,}08a$ ja teostomaksut $0{,}01a$.

Teatterin ylläpidolle jää lipun hinnasta
$a - 0{,}45a - 0{,}08a - 0{,}01a = 0{,}46a$.

Kun ylläpitokulut nousevat 5 %, lipun hinta olisi
$1{,}05 \cdot 0{,}46a + 0{,}45a + 0{,}08a + 0{,}01a = 1{,}023a$.

Lipun hinnan lausekkeesta $1{,}023a$ nähdään, että lipun hintaa a kerrotaan luvulla 1,023. Prosenttikerrointa 1,023 vastaa prosenttiluku 102,3 %, joten lipun hintaa tulisi korottaa 102,3 % – 100% = 2,3 %.

b) Kun veron osuus nousee 2 prosenttiyksikköä, on verojen osuus lipun hinnasta 10 %. Ylläpitoon lipun hinnasta jää
$a - 0{,}45a - 0{,}1a - 0{,}01a = 0{,}44a$.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia uudet ylläpitokulut $0{,}44a$ on alkuperäisistä ylläpitokuluista $0{,}46a$.

$$\frac{0{,}44\cancel{a}}{0{,}46\cancel{a}} = 0{,}9565... \approx 0{,}957 = 95{,}7\ \%$$

Uudet ylläpitokulut ovat 95,7 % alkuperäisistä ylläpitokuluista, joten ylläpitokuluja on alennettava 100 % – 95,7 % = 4,3 %.

Vastaus: **a)** 2,3 % **b)** n. 4,3 %

346. Merkitään ensimmäistä jäsentä kirjaimella a. Lukujonon jäsen saadaan edellisestä jäsenestä kertomalla se luvulla 0,9.

Lukujonon viides jäsen $0{,}9^4a = 0{,}6561a \approx 0{,}66a$.

Viides jäsen on 66 % ensimmäisestä jäsenestä a, joten viides jäsen on 100 % – 66 % = 34 % pienempi kuin ensimmäinen jäsen.

Vastaus: n. 34 % pienempi

347. **a)** Kaksiviivainen C on kolmas puolisävelaskel yksiviivaisesta A lähtien, kun sävelen taajuus kasvaa.

Sävelen A taajuus on 440 Hz.

Sävelestä A lähtien 1. puolisävelaskeleen taajuus on $1{,}0595 \cdot 440$ Hz.

Sävelestä A lähtien 2. puolisävelaskeleen taajuus on
$1{,}0595 \cdot 1{,}0595 \cdot 440 \text{ Hz} = 1{,}0595^2 \cdot 440$ Hz.

Sävelestä A lähtien 3. puolisävelaskeleen taajuus on
$1{,}0595 \cdot 1{,}0595^2 \cdot 440 \text{ Hz} = 1{,}0595^3 \cdot 440$ Hz.

Kysytyn C-sävelen taajuus on tämän perusteella
$1{,}0595^3 \cdot 440 \text{ Hz} = 523{,}3... \text{ Hz} \approx 523$ Hz.

b) Kaksiviivainen A on 12 puolisävelaskelta yksiviivaisesta A lähtien, kun sävelen taajuus kasvaa.

Kysytyn A-sävelen taajuus on tämän perusteella
$1{,}0595^{12} \cdot 440 \text{ Hz} = 880{,}3... \text{ Hz} \approx 880$ Hz.

c) Lasketaan, kuinka monta prosenttia 880 Hz on 440 Hz:sta.

$$\frac{880 \text{ Hz}}{440 \text{ Hz}} = 2 = 200\ \%$$

Kaksiviivaisen A-sävelen taajuus on 200 % – 100 % = 100 % suurempi kuin yksiviivaisen A-sävelen taajuus.

d) Kolmiviivaisen C-sävelen taajuus on kaksinkertainen kaksiviivaisen C-sävelen taajuuteen verrattuna, joten se on $2 \cdot 523 \text{ Hz} = 1046$ Hz.

Vastaus: **a)** 523 Hz **b)** 880 Hz **c)** 100 % **d)** 1046 Hz

348. Merkitään alkuperäistä verotonta hintaa kirjaimella x. Hintaan lisättävä arvonlisävero on 23 % verottomasta hinnasta x, joten veron suuruus on $0{,}23x$. Tuotteen myyntihinta on siten $1{,}23x$.

Merkitään alennettua verotonta hintaa kirjaimella k. Hintaan lisättävä uusi arvonlisävero on 24 % verottomasta hinnasta k, joten veron suuruus on $0{,}24k$.

Koska myyntihinta ei muutu, saadaan yhtälö $1{,}23x = 1{,}24k$, josta ratkaistaan k.

$$1{,}23x = 1{,}24k \qquad \| : 1{,}24$$
$$k = \frac{1{,}23x}{1{,}24}$$
$$k = 0{,}9919...x$$
$$k \approx 0{,}992x$$

Uusi veroton hinta on 99,2 % alkuperäisestä verottomasta hinnasta x, joten verotonta hintaa on alennettava 0,8 %.

Vastaus: n. 0,8 %

349. Taulukoidaan annetut tiedot ja lasketaan myyntitulo, joka on tuotteen hinnan ja myyntimäärän tulo.

	Tuotteen hinta	Myyntimäärä	Myyntitulo
Aluksi	x	y	xy
Lopuksi	$1{,}15x$	a	$1{,}15xa$

Koska myyntitulo säilyi samana, saadaan yhtälö $1{,}15xa = xy$, josta ratkaistaan a.

$$1{,}15xa = xy \qquad \| : (1{,}15x)$$
$$a = \frac{\cancel{x}y}{1{,}15\cancel{x}}$$
$$a = \frac{1}{1{,}15}y$$
$$a = 0{,}869...y$$
$$a \approx 0{,}87y$$

Myyntimäärää lopussa kuvaa lauseke $0{,}87y$, jonka mukaan myyntimäärä on 87 % alkuperäisestä myyntimäärästä. Myyntimäärä alenee siis 100 % – 87 % = 13 %.

Vastaus: n. 13 %.

350. Merkitään tuoreen banaanin painoa kirjaimella a ja kuivatun banaanin painoa kirjaimella x. Taulukoidaan tuoreen ja kuivatun banaanin paino, veden ja kuiva-aineiden osuus.

	Banaania	Vettä	Kuiva-aineita
Tuore	a	$0{,}74a$	$0{,}26a$
Kuivattu	x	$0{,}2x$	$0{,}8x$

Koska kuiva-aineiden määrä ei muutu, saadaan kuivatun banaanin paino x ratkaistua yhtälöstä $0{,}8x = 0{,}26a$.

$$0{,}8x = 0{,}26a \quad \| : 0{,}8$$
$$x = 0{,}325a$$

Kuivatussa banaanissa on vettä $0{,}2 \cdot 0{,}325a = 0{,}065a$.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia kuivatun banaanin vesimäärä on tuoreen banaanin vesimäärästä.

$$\frac{0{,}065\cancel{a}}{0{,}74\cancel{a}} = 0{,}0878\ldots \approx 0{,}09 = 9\ \%$$

Koska kuivatun banaanin vesimäärä on 9 % tuoreen banaanin vesimäärästä, niin vedestä on haihtunut 100 % – 9 % = 91 %.

Vastaus: n. 91 %.

351. Merkitään tuoreen luumun painoa kirjaimella a, jolloin luumun veden määrä on $0{,}85a$ ja kuiva-aineiden määrä on $0{,}15a$, joten sokerin määrää tuoreen luumun painosta kuvaa lauseke $0{,}085a$.

Merkitään kuivatun luumun painoa kirjaimella x. Koska kuivatun luumun vesipitoisuus on 30 %, on kuivatun luumun veden määrä $0{,}3x$ ja kuiva-aineiden määrä $0{,}7x$.

Kuivatuksessa kuiva-aineiden määrä ei muutu, joten kuivatun luumun paino x ratkaistaan yhtälöstä $0{,}7x = 0{,}15a$.

$$\begin{aligned} 0{,}7x &= 0{,}15a \quad \| : 0{,}7 \\ x &= \frac{0{,}15a}{0{,}7} \\ x &= 0{,}214\ldots a \end{aligned}$$

Kuivatun luumun sokeripitoisuus on

$$\frac{0{,}085\cancel{a}}{0{,}214\ldots\cancel{a}} = 0{,}396\ldots \approx 0{,}40 = 40\ \%.$$

Vastaus: n. 40 %

3.3 Geometrinen lukujono

LUO PERUSTA

352. **a)** Lasketaan peräkkäisten jäsenten osamääriä.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{3}=2$$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{12}{6}=2$$

$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{24}{12}=2$$

Lukujono voi olla geometrinen, koska peräkkäisten jäsenten suhde on vakio 2.

b) Lasketaan peräkkäisten jäsenten osamääriä.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{2}=3$$

$$\frac{a_3}{a_2}={}^{(2}\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{a_4}{a_3}={}^{(2}\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$$

Lukujono ei ole geometrinen, koska peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio.

c) Lasketaan peräkkäisten jäsenten osamääriä.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-200}{400}^{(200} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{100}{-200}^{(100} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{-50}{100}^{(50} = -\frac{1}{2}$$

Lukujono voi olla geometrinen, koska peräkkäisten jäsenten suhde on vakio $-\frac{1}{2}$.

Vastaus: **a)** Osamäärä on aina 2. Voi olla.

b) Osamäärät ovat 3, $\frac{5}{3}$ ja $\frac{7}{5}$. Ei voi olla.

c) Osamäärä on aina $-\frac{1}{2}$. Voi olla.

353. **a)** Geometrisen lukujonon suhdeluku saadaan ensimmäisen ja toisen jäsenen avulla $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$.

Puuttuvat jäsenet ovat
$a_3 = a_2 \cdot q = 3 \cdot 3 = 9$
$a_5 = a_4 \cdot q = 27 \cdot 3 = 81.$

b) Geometrisen lukujonon suhdeluku saadaan neljännen ja viidennen jäsenen avulla $q = \frac{a_5}{a_4} = \frac{32}{16} = 2$.

Koska $q = 2$, saadaan seuraava jäsen kertomalla luvulla 2, joten edellinen jäsen saadaan jakamalla luvulla 2. Siten

$a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Kolmas jäsen on
$a_3 = a_2 \cdot q = 4 \cdot 2 = 8$

Vastaus: **a)** Puuttuvat jäsenet ovat 9 ja 81. $q = 3$.
b) Puuttuvat jäsenet ovat 2 ja 8. $q = 2$.

354. **a)** Geometrisen lukujonon suhdeluku $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6^{(2}}{2} = 3$.

$a_1 = 2$
$a_2 = 6$
$a_3 = 6 \cdot 3 = 18$
$a_4 = 18 \cdot 3 = 54$

b) Geometrisen lukujonon suhdeluku $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10^{(-5}}{-5} = -2$.

$a_1 = -5$
$a_2 = 10$
$a_3 = 10 \cdot (-2) = -20$
$a_4 = -20 \cdot (-2) = 40$

c) Geometrisen lukujonon suhdeluku $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{200}{1000}^{(200} = \frac{1}{5}$.

$a_1 = 1000$
$a_2 = 200$
$a_3 = 200 \cdot \frac{1}{5} = \frac{200}{5} = 40$
$a_4 = 40 \cdot \frac{1}{5} = \frac{40}{5} = 8$

Vastaus: **a)** 2, 6, 18 ja 54 **b)** –5, 10, –20 ja 40 **c)** 1000, 200, 40 ja 8

355. **a)** Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 4$ ja suhdeluku $q = 3$.
n. jäsenen lauseke on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$.

Kymmenes jäsen on $a_{10} = 4 \cdot 3^{10-1} = 4 \cdot 3^9 = 78\,732$.

b) Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja suhdeluku
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{15}{3} = 5$.
n. jäsenen lauseke on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 5^{n-1}$.

Kymmenes jäsen on $a_{10} = 3 \cdot 5^9 = 5\,859\,375$.

Vastaus: **a)** $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$, $a_{10} = 78\,732$ **b)** $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$, $a_{10} = 5\,859\,375$

356. **a)** 1. taiton jälkeen: 2 kerrosta
2. taiton jälkeen: $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ kerrosta
3. taiton jälkeen: $4 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ kerrosta
4. taiton jälkeen: $8 \cdot 2 = 2^3 \cdot 2 = 2^4 = 16$ kerrosta
5. taiton jälkeen: $16 \cdot 2 = 2^4 \cdot 2 = 2^5 = 32$ kerrosta

Jokaisen taiton jälkeen paperikerrosten lukumäärä kaksinkertaistuu.

b) a-kohdan nojalla 13. taitossa on $2^{13} = 8192$ kerrosta.

c) Paperikerrosten lukumäärä muodostaa geometrisen lukujonon, jonka ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2$ ja suhdeluku on $q = 2$.
n. jäsenen lauseke on
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{1+n-1} = 2^n$

Vastaus: **a)** 2, 4, 8, 16 ja 32 **b)** 8192 **c)** $a_n = 2^n$

VAHVISTA OSAAMISTA

357. **a)** Geometrisen lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen suhdeluvulla. Koska suhdeluku on 1,45 = 145 %, on jäsen 145 % edellisestä jäsenestä.

Jäsen on 145 % – 100 % = 45 % edeltäjäänsä suurempi.

b) Geometrisen lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen suhdeluvulla. Koska suhdeluku on 0,62 = 62 %, on jäsen 62 % edellisestä jäsenestä.

Jäsen on 100 % – 62 % = 38 % edeltäjäänsä pienempi.

c) Geometrisen lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen suhdeluvulla. Koska suhdeluku on 2 = 200 %, on jäsen 200 % edellisestä jäsenestä.

Jäsen on 200 % – 100 % = 100 % edeltäjäänsä suurempi.

d) Geometrisen lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen suhdeluvulla. Koska suhdeluku on 1,0785 = 107,85 %, on jäsen 107,85 % edellisestä jäsenestä.

Jäsen on 107,85 % – 100 % = 7,85 % edeltäjäänsä suurempi.

Vastaus: **a)** 45 % suurempi **b)** 38 % pienempi
c) 100 % suurempi **d)** 7,85 % suurempi

358. **a)** Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 5$ ja suhdeluku $q = 2$. Lukujonon n. jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}$.

b) Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 5$ ja suhdeluku $q = \frac{1}{2}$.

Lukujonon n. jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c) Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 5$ ja suhdeluku $q = 1{,}5$. Lukujonon n. jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 1{,}5^{n-1}$.

Vastaus: **a)** $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$ **b)** $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **c)** $a_n = 5 \cdot 1{,}5^{n-1}$

359. **a)** Ensimmäisen ohjelman juoksumatkat muodostavat aritmeettisen lukujonon, koska peräkkäisten viikkojen juoksumatkojen erotus on vakio ($d = 1$ km).

Toisen ohjelman juoksumatkat muodostavat geometrisen lukujonon, koska peräkkäisten viikkojen juoksumatkojen suhde on vakio ($q = 1{,}05$).

b) Ensimmäisen ohjelman 10. viikko: 15 km + 9 · 1 km = 24 km
Toisen ohjelman 10. viikko: $1{,}05^9 \cdot 15$ km = 23,3 km

c) Kirjoitetaan soluihin A1 ja B1 luku 15.
Soluun A2 kirjoitetaan ”=A1+1” ja kopioidaan solua A2 alaspäin.
Soluun B2 kirjoitetaan ”=B1·1.05” ja kopioidaan solua B2 alaspäin.

	A	B
1	15	15
2	16	15.75
3	17	16.54
4	18	17.36
5	19	18.23
6	20	19.14
7	21	20.1
8	22	21.11
9	23	22.16
10	24	23.27
11	25	24.43
12	26	25.66
13	27	26.94
14	28	28.28
15	29	29.7
16	30	31.18
17	31	32.74
18	32	34.38
19	33	36.1
20	34	37.9
21	35	39.8
22	36	41.79
23	37	43.88
24	38	46.07
25	39	48.38
26	40	50.8
27	41	53.34
28	42	56
29	43	58.8
30	44	61.74

Vastaus: **a)** Ensimmäisen ohjelman juoksumatkat muodostavat aritmeettisen lukujonon ja toisen ohjelman geometrisen lukujonon.
b) Ensimmäisen ohjelman mukaan 24 km, toisen mukaan 23,3 km.

360. **a)** $a_1 = 5,$
$a_2 = 5 \cdot (-3) = -15$
$a_3 = -15 \cdot (-3) = 45$
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot (-3)^{n-1}$

b) Lukujonon joka toinen jäsen on positiivinen ja joka toinen negatiivinen. Parilliset jäsenet ovat negatiivisia, joten 1000. jäsen on negatiivinen.

Vastaus: **a)** $a_1 = 5$, $a_2 = -15$, $a_3 = 45$ ja $a_n = 5 \cdot (-3)^{n-1}$ **b)** negatiivinen

361. Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 11$ ja suhdeluku saadaan ensimmäisen ja toisen jäsenen avulla $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{22}{11} = 2$.

20. jäsen on
$a_{20} = a_1 \cdot q^{20-1} = 11 \cdot 2^{20-1} = 5\ 767\ 168$

n. jäsen on
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 11 \cdot 2^{n-1}$

Vastaus: $a_{20} = 5\ 767\ 168$, $a_n = 11 \cdot 2^{n-1}$

362. **a)** Lukujonon ensimmäinen jäsen on 8, ja toisesta jäsenestä alkaen jäsen saadaan jakamalla edellinen jäsen luvulla 2.

b) Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on 8 ja suhdeluku $q = \frac{1}{2}$.

Analyyttisessa muodossa n. jäsen on

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Vastaus: **a)** Lukujonon ensimmäinen jäsen on 8, ja toisesta jäsenestä alkaen jäsen saadaan jakamalla edellinen jäsen luvulla 2.

b) $a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

363. **a)** Lasketaan lukujonon peräkkäisten jäsenten osamääriä.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{5}{6}:\frac{5}{4}=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{6}}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{5}{9}:\frac{5}{6}=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}=\frac{2}{3}$$

Lukujono voi olla geometrinen, koska peräkkäisten jäsenten suhde on vakio $\frac{2}{3}$.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on $\frac{5}{4}$ ja lukujonon jäsen saadaan toisesta jäsenestä alkaen kertomalla edellinen jäsen luvulla $\frac{2}{3}$.

b) Lasketaan lukujonon peräkkäisten jäsenten osamääriä.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{3}{\underset{2}{\cancel{4}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{1}=\frac{3}{2}$$

Lukujono ei ole geometrinen, koska peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio.

Vastaus: **a)** Voi olla. Lukujonon ensimmäinen jäsen on $\frac{5}{4}$, ja toisesta jäsenestä alkaen jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla $\frac{2}{3}$.
b) Ei voi olla.

364. **a)** Geometrisen lukujonon suhdeluku saadaan ensimmäisen ja toisen jäsenen avulla $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{333}{999}^{(333} = \frac{1}{3}$.

Kolmas jäsen on

$a_3 = a_2 \cdot q = 333 \cdot \frac{1}{3} = 111$.

Neljäs jäsen on

$a_4 = a_3 q = 111 \cdot \frac{1}{3} = \frac{111}{3} = 37$.

n. jäsen on

$a_n = a_1 q^{n-1} = 999 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

b) Geometrisen lukujonon suhdeluku saadaan ensimmäisen ja toisen jäsenen avulla $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3}$.

Kolmas jäsen on

$a_3 = a_2 \cdot q = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$.

Neljäs jäsen on

$a_4 = a_3 \cdot q = \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{27}$.

n. jäsen on

$a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

Vastaus: **a)** $a_3 = 111$ ja $a_4 = 37$ ja $a_n = 999 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

b) $a_3 = \frac{8}{9}$ ja $a_4 = \frac{32}{27}$ ja $a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

365. **a)** Lukujono on geometrinen, koska lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 1,2. Geometrisen lukujonon suhdeluku on siis 1,2.

Koska seuraava jäsen saadaan kertomalla luvulla 1,2, niin edellinen jäsen saadaan jakamalla luvulla 1,2.

$$a_1 = \frac{a_2}{1,2} = \frac{12}{1,2} = 10 .$$

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 10$.

b) Geometrisen lukujonon n. jäsen on
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 10 \cdot 1{,}2^{n-1}$.

Vastaus: **a)** $a_1 = 10$ **b)** $a_n = 10 \cdot 1{,}2^{n-1}$

366. **a)** Rahasumma on aluksi 500 euroa ja se kasvaa joka vuosi 1,02-kertaiseksi, joten vuosittaiset talletusten arvot muodostavat geometrisen lukujonon, missä ensimmäinen jäsen on talletuksen arvo ensimmäisen vuoden jälkeen eli
$a_1 = 1{,}02 \cdot 500$ ja $q = 1{,}02$.

Talletuksen arvo n vuoden kuluttua on

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 q^{n-1} \\ &= 500 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02^{n-1} \\ &= 500 \cdot 1{,}02^{1+n-1} \\ &= 500 \cdot 1{,}02^{n} \end{aligned}$$

b) Kirjoitetaan soluun A1 ”500·1.02”. Soluun A2 kirjoitetaan ”=A1·1.02” ja kopioidaan solua A2 alaspäin.

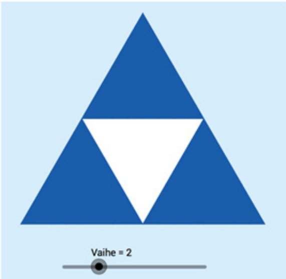
	A
1	510
2	520.2
3	530.6
4	541.22
5	552.04
6	563.08
7	574.34
8	585.83
9	597.55
10	609.5
11	621.69
12	634.12
13	646.8
14	659.74
15	672.93
16	686.39
17	700.12
18	714.12
19	728.41
20	742.97
21	757.83
22	772.99
23	788.45
24	804.22
25	820.3
26	836.71
27	853.44
28	870.51
29	887.92
30	905.68
31	923.79
32	942.27
33	961.12
34	980.34
35	999.94
36	1019.94
37	1040.34
38	1061.15
39	1082.37
40	1104.02

Talletus on kaksinkertaistunut 36 vuoden jälkeen eli talletus on kaksinkertaistunut 37 vuodessa.

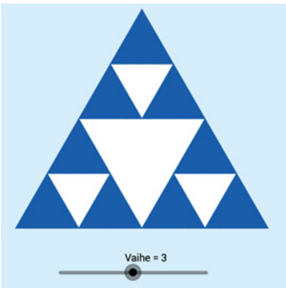
Vastaus: **a)** $a_n = 500 \cdot 1{,}02^n$ **b)** 37 vuoden

367. **a)** Alkuperäisen kolmion pinta-ala $A_1 = 1$. Kuvio jaetaan neljään osaan, joista yksi poistetaan, joten jäljelle jääneen kuvion pinta-ala on $\frac{3}{4}$ alkuperäisestä.

Toisessa vaiheessa jäljelle jääneen kolmion pinta-ala on $A_2 = \frac{3}{4}$.



Kolmannessa vaiheessa jäljelle jääneistä kolmioista jokainen jaetaan neljään osaan, joista yksi poistetaan. Kolmannen vaiheen pinta-ala on $\frac{3}{4}$-kertainen edelliseen vaiheeseen verrattuna.



Näin jatkamalla jäljelle jääneiden kolmioiden pinta-alat muodostavat geometrisen lukujonon

$A_n = 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$, missä n on vaiheen numero.

b) Kirjoitetaan soluun A1 luku 1. Soluun A2 kirjoitetaan ”=3/4·A1” ja kopioidaan solua A2 alaspäin.

	A
1	1
2	0.75
3	0.56
4	0.42
5	0.32
6	0.24
7	0.18
8	0.13
9	0.1
10	0.08

Pinta-ala on alle neljäsosan alkuperäisestä 6. vaiheen jälkeen.

Vastaus: **a)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ **b)** 6. vaiheen

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

368. **a)** Lasketaan lukujonon peräkkäisten jäsenten erotuksia.

$a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$
$a_3 - a_2 = 3 - 2 = 1$
$a_4 - a_3 = 4 - 3 = 1$

Lukujono voi olla aritmeettinen, koska peräkkäisten jäsenten erotus on aina 1.

Aritmeettisen lukujonon n. jäsen on
$a_n = a_1 + (n - 1)d = 1 + (n - 1)\cdot 1 = n.$

Lasketaan lukujonon peräkkäisten jäsenten osamääriä.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{4}{3}$$

Lukujono ei voi olla geometrinen, koska peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio.

b) Lasketaan lukujonon peräkkäisten jäsenten erotuksia.
$a_2 - a_1 = -2 - 1 = -3$
$a_3 - a_2 = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$
$a_4 - a_3 = -4 - 3 = -7$

Lukujono ei voi olla aritmeettinen, koska peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio.

Lasketaan lukujonon peräkkäisten jäsenten osamääriä.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

Lukujono ei ole geometrinen, koska peräkkäisten suhde ei ole vakio.

c) Lasketaan lukujonon peräkkäisten jäsenten erotuksia.
$a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$
$a_3 - a_2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$
$a_4 - a_3 = -1 - 1 = -2$

Lukujono ei ole aritmeettinen, koska peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio.

Lasketaan lukujonon peräkkäisten jäsenten osamääriä.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{-1}{1} = -1$$

Lukujono voi olla geometrinen, koska peräkkäisten jäsenten suhde on vakio. Geometrisen lukujonon *n*. jäsen on
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$.

d) Lasketaan lukujonon peräkkäisten jäsenten erotukset
$a_2 - a_1 = 4 - 3 = -1$
$a_3 - a_2 = 3 - 2 = -1$
$a_4 - a_3 = 2 - 1 = -1$

Lasketaan lukujonon peräkkäisten jäsenten suhteet

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{2}$$

Lukujono voi olla aritmeettinen, koska peräkkäisten jäsenten erotus on aina -1.

Aritmeettisen lukujonon n. jäsen on
$a_n = a_1 + (n - 1)d = 4 + (n - 1)\cdot(-1) = 5 - n$.

Lukujono ei voi olla geometrinen, koska peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio.

e) Koska tunnetaan lukujonosta vain kaksi jäsentä, lukujono voi olla aritmeettinen tai geometrinen.

Jos lukujono on aritmeettinen, erotusluku on $d = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ ja yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n - 1)d = 1 + (n - 1)\cdot 1 = n$.

Jos lukujono on geometrinen, suhdeluku on $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{2}{1}$ ja yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

f) Koska tunnetaan lukujonosta vain kaksi jäsentä, lukujono voi olla aritmeettinen tai geometrinen.

Jos lukujono on aritmeettinen, erotusluku on $d = a_2 - a_1 = 3 - 4 = -1$ ja yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= 4 + (n-1)\cdot(-1) \\ &= 4 - n + 1 \\ &= 5 - n. \end{aligned}$$

Jos lukujono on geometrinen, suhdeluku on $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{4}$ ja yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

Vastaus: **a)** Voi olla aritmeettinen, $a_n = n$.
b) Ei voi olla aritmeettinen tai geometrinen.
c) Voi olla geometrinen, $a_n = (-1)^{n-1}$.
d) Voi olla aritmeettinen, $a_n = 5 - n$.
e) Voi olla aritmeettinen, $a_n = n$. Voi olla myös geometrinen, $a_n = 2^{n-1}$.
f) Voi olla aritmeettinen, $a_n = 5 - n$. Voi olla myös geometrinen,
$a_n = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

369. Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$, toinen jäsen on $a_2 = a_1 \cdot q$ ja kolmas jäsen on $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$. Koska kolmas jäsen on 12, saadaan yhtälö $3q^2 = 12$, josta ratkaistaan q.

$$\begin{aligned} 3q^2 &= 12 \qquad \| :3 \\ q^2 &= \frac{12}{3} \\ q^2 &= 4 \\ q &= \pm 2 \end{aligned}$$

Suhdeluku voi olla 2 tai –2, joten ratkaistaan 6. ja n. jäsen molemmissa tapauksissa.

Jos $q = 2$, niin $a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = 3 \cdot 2^5 = 96$ ja $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Jos $q = -2$, niin $a_6 = a_1 q^{6-1} = 3 \cdot (-2)^5 = -96$ ja $a_n = a_1 q^{n-1} = 3 \cdot (-2)^{n-1}$.

Vastaus: $a_6 = 96$ ja $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ tai $a_6 = -96$ ja $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

370. Ensimmäinen lukujono näyttää geometriselta, koska jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 2. Koska ei tiedetä sääntöä, niin ei voida varmasti tietää mikä on lukujonon 5. jäsen.

Lukujonon $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ eräs jäsen on $a_k = 3 \cdot 2^{k-1}$ ja siitä seuraava jäsen on $a_{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1-1} = 3 \cdot 2^k$. Peräkkäisten jäsenten suhde on

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\cancel{3} \cdot 2^k}{\cancel{3} \cdot 2^{k-1}} = \frac{2^k}{2^{k-1}} = 2^{k-(k-1)} = 2^{k-k+1} = 2.$$

Lukujono on geometrinen, koska peräkkäisten jäsenten suhde on aina vakio.

371. **a)** Lukujono on geometrinen, koska lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 3.

b) Lasketaan lukujonon ensimmäisiä jäseniä.
$a_1 = 2$, $a_2 = 1 + 3 \cdot 2 = 7$, $a_3 = 1 + 3 \cdot 7 = 22$

Lasketaan lukujonon peräkkäisten jäsenten osamääriä.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{22}{7}$$

Lukujono ei ole geometrinen, koska peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio.

c) Lasketaan lukujonon ensimmäisiä jäseniä
$a_1 = 2$, $a_2 = 3 - 2 = 1$, $a_3 = 3 - 1 = 2$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1}$$

Lukujono ei ole geometrinen, koska peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio.

d) Lukujono on geometrinen, koska lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla –3.

Vastaus: **a)** On. **b)** Ei ole **c)** Ei ole. **d)** On.

372. **a)** Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$ ja suhdeluku on $q = \frac{-6}{3} = -2$.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on 3 ja toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla –2, joten $a_1 = 3$ ja $a_n = -2a_{n-1}$, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$

b) Lasketaan geometrisen lukujonon ensimmäisiä jäseniä.
$a_1 = -5 \cdot 4^{1-1} = -5 \cdot 4^0 = -5 \cdot 1 = -5$
$a_2 = -5 \cdot 4^{2-1} = -5 \cdot 4^1 = -5 \cdot 4 = -20$

Geometrisen lukujonon suhdeluku $q = \frac{-20}{-5} = 4$.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on –5 ja toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 4, joten $a_1 = -5$ ja $a_n = 4a_{n-1}$, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$

Vastaus: **a)** $a_1 = 3$ ja $a_n = -2a_{n-1}$, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$
b) $a_1 = -5$ ja $a_n = 4a_{n-1}$, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$

373. Kirjoitetaan ensimmäiseen sarakkeeseen vuodet vuodesta 2010 eteenpäin. Kirjoitetaan toiseen sarakkeeseen ensimmäiselle riville prosenttikerroin, jonka arvo voidaan muuttaa. Kopioidaan prosenttikertoimen sisältävän solu muille riveille, jotta riittää vaihtaa prosenttikerroin vain ensimmäiselle riville. Kirjoitetaan kolmanteen sarakkeeseen tuulivoimalla tuotetun sähkön määrä kilowattitunteina.

Kirjoitetaan soluun A1 luku 2010, soluun ”A2=A1+1” ja kopioidaan solua A2 kymmenen riviä alaspäin. Nämä solut tarkoittavat vuosia. Kirjoitetaan soluun B1 luku 1.1, soluun ”B2=B1” ja kopioidaan solua B2 kymmenen riviä alaspäin. Nämä solut tarkoittavat tuulivoiman lisäämisen prosenttikerrointa.

Kirjoitetaan soluun C1 luku 1 ja soluun C2 ”=C1·B2” ja kopioidaan solua kymmenen riviä alaspäin. Nämä solut tarkoittavat kuinka monta miljardia kWh sähköä tuulivoimalla vuosittain tuotettaisiin, jos sitä lisätään prosenttikertoimen verran.

Nyt kokeilemalla soluun B1 eri prosenttikertoimia saadaan, että vuosittain tuulivoiman tuottaman sähkön tulisi noin 1,23-kertaistua eli kasvaa 23 %, jotta kymmenen vuoden jälkeen tuulivoimalla tuotettu sähkö kahdeksankertaistuisi.

	A	B	C
1	2010	1.23	1
2	2011	1.23	1.23
3	2012	1.23	1.51
4	2013	1.23	1.86
5	2014	1.23	2.29
6	2015	1.23	2.82
7	2016	1.23	3.46
8	2017	1.23	4.26
9	2018	1.23	5.24
10	2019	1.23	6.44
11	2020	1.23	7.93

	A	B	C
1	2010	1.24	1
2	2011	1.24	1.24
3	2012	1.24	1.54
4	2013	1.24	1.91
5	2014	1.24	2.36
6	2015	1.24	2.93
7	2016	1.24	3.64
8	2017	1.24	4.51
9	2018	1.24	5.59
10	2019	1.24	6.93
11	2020	1.24	8.59

Tuulivoimaa tulisi lisätä vuosittain noin 23 %.

Vastaus: n. 23 %

374. **a)** Esimerkiksi, jos geometrinen jono on 1, 3, 9, 27, ... Tällöin $\sqrt{a_1 a_3} = \sqrt{1 \cdot 9} = 3 = a_2$ ja $\sqrt{a_2 a_4} = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9 = a_3$

Ensimmäisen ja kolmannen jäsenen geometrinen keskiarvo on sama kuin toinen jäsen ja toisen ja neljännen geometrinen keskiarvo on sama kuin kolmas jäsen.

Geometrisen lukujonon jäsen näyttäisi olevan sama kuin edellisen ja seuraavan jäsenen geometrinen keskiarvo.

b) Kun geometrisen lukujonon jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^n$, seuraavat kaksi jäsentä ovat $a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n+1}$ ja $a_{n+2} = a_1 \cdot q^{n+2}$.

Nyt jäsenten a_n ja a_{n+2} geometrinen keskiarvo on

$$\sqrt{a_n a_{n+2}}$$
$$= \sqrt{a_1 q^n \cdot a_1 q^{n+2}}$$
$$= \sqrt{a_1 \cdot a_1 \cdot q^n \cdot q^{n+2}}$$
$$= \sqrt{a_1{}^2 q^{n+n+2}}$$
$$= \sqrt{a_1{}^2 q^{2n+2}}$$
$$= \sqrt{a_1{}^2 q^{2(n+1)}}$$
$$= \sqrt{a_1{}^2 \left(q^{n+1}\right)^2}$$
$$= \sqrt{a_1{}^2} \sqrt{\left(q^{n+1}\right)^2}$$
$$= a_1 q^{n+1}$$
$$= a_{n+1}$$

a-kohdan havainto pätee myös lukujonolle $a_n = a_1 \cdot q^n$.

Vastaus: **a)** esim. 1,3, 9, 27, ... Keskiarvot 3, 9, ...

LUVUN 3 PÄÄTÖSSIVUN TEHTÄVÄT

1. **a)** 100 % – 75 % = 25 %. Hiili C-14 pitoisuutta on jäljellä neljäsosa alkuperäisestä, joten pitoisuus on puoliintunut kaksi kertaa. Eliön kuolemasta on noin 2 · 5730 = 11460 vuotta.

b) Taulukoidaan arviota varten puoliintumisajat ja C-14 pitoisuudet

Puoliintumisaika (vuotta)	Hiili C-14 pitoisuus (%)
5730	50
11460	25
17190	12,5
22920	6,25
28650	3,125

Hiili C-14 pitoisuus on alle 6,25 % alkuperäisestä noin 22 920 vuoden kuluttua.

c) Aiemmassa arviossa puoliintumisaika oli pienempi, joten näytteiden iät arvioitiin pienemmiksi kuin nykyään.

d) Sopivalla ohjelmalla ratkaistuna $q \approx 0{,}999879 = 99{,}9879$ %.
C-14 vähenee vuodessa 100 % – 99,9879 % = 0,0121 %.

e) Merkitään C-14 alkuperäistä pitoisuutta kirjaimella a.
1. vuoden jälkeen pitoisuus on aq
2. vuoden jälkeen pitoisuus on $aq \cdot q = aq^2$
3. vuoden jälkeen pitoisuus on aq^3
...
n. vuoden jälkeen pitoisuus on $a_n = aq^n = a \cdot 0{,}999879^n$.

Vastaus: **a)** n. 11 460 vuoden kuluttua **b)** n. 22 920 vuoden kuluttua
d) n. 0,0121 % **e)** $a_n = a \cdot 0{,}999879^n$