2. LUKUJONOT

2.1 Lukujonon muodostaminen

LUO PERUSTA

201. **a)** Ensimmäinen jäsen on 3.
toinen jäsen $3 + 4 = 7$
kolmas jäsen $7 + 4 = 11$
neljäs jäsen $11 + 4 = 15$
viides jäsen $15 + 4 = 19$

b) Ensimmäinen jäsen on 3.
toinen jäsen $2 \cdot 3 = 6$
kolmas jäsen $2 \cdot 6 = 12$
neljäs jäsen $2 \cdot 12 = 24$
viides jäsen $2 \cdot 24 = 48$

c) Ensimmäinen jäsen on 3.
toinen jäsen $3 - 2 = 1$
kolmas jäsen $1 - 2 = -1$
neljäs jäsen $-1 - 2 = -3$
viides jäsen $-3 - 2 = -5$

Vastaus: **a)** 3, 7, 11, 15 ja 19 **b)** 3, 6, 12, 24 ja **c)** 3, 1, –1, –3 ja –5

202. **a)** Jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 3.

viides jäsen $13 + 3 = 16$
kuudes jäsen $16 + 3 = 19$

b) Jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla –2.

viides jäsen $-2 \cdot (-56) = 112$
kuudes jäsen $-2 \cdot 112 = -224$

c) Seuraava jäsen saadaan vähentämällä edellisestä jäsenestä luku 5.

viides jäsen $-4 - 5 = -9$
kuudes jäsen $-9 - 5 = -14$

Vastaus: **a)** 16 ja 19 **b)** 112 ja –224 **c)** –9 ja –14

203. **a)** Ensimmäinen jäsen on 11.
Toinen jäsen on $17 = 11 + 6$.
Kokeillaan, saadaanko tällä säännöllä tunnettu viides jäsen.

Kolmas jäsen on $17 + 6 = 23$.
Neljäs jäsen on $23 + 6 = 29$.
Viides jäsen on $29 + 6 = 35$.

Lukujonon sääntö näyttäisi olevan: Ensimmäinen jäsen on 11. Toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 6. Puuttuvat jäsenet ovat 23 ja 29.

b) Toinen jäsen on 3.
Kolmas jäsen on $9 = 3 \cdot 3$.
Kokeillaan, saadaanko tällä säännöllä tunnettu viides jäsen.

Neljäs jäsen on $3 \cdot 9 = 27$.
Viides jäsen on $3 \cdot 27 = 81$.

Ensimmäinen jäsen saadaan, kun toinen jäsen jaetaan luvulla 3.
Ensimmäinen jäsen on siis $\frac{3}{3} = 1$.

Lukujonon sääntö näyttäisi olevan: Ensimmäinen jäsen on 1. Toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 3. Puuttuvat jäsenet ovat 1 ja 27.

c) Viides jäsen on 4.

Kuudes jäsen on $2 = \frac{4}{2}$.

Kokeillaan, saadaanko tällä säännöllä aiemmat jäsenet. Koska jäsen saadaan jakamalla edellinen jäsen luvulla 2, edellinen jäsen saadaan kertomalla jäsen luvulla 2.

Neljäs jäsen on $2 \cdot 4 = 8$.
Kolmas jäsen on $2 \cdot 8 = 16$.
Toinen jäsen on $2 \cdot 16 = 32$.
Ensimmäinen jäsen on $2 \cdot 32 = 64$.

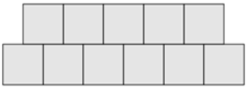
Lukujonon sääntö näyttäisi olevan: Ensimmäinen jäsen on 64. Toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan jakamalla edellinen jäsen luvulla 2. Puuttuvat jäsenet ovat 32 ja 8.

Vastaus: **a)** Ensimmäinen jäsen on 11. Toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 6. Puuttuvat jäsenet ovat 23 ja 29.
b) Ensimmäinen jäsen on 1. Toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 3. Puuttuvat jäsenet ovat 1 ja 27.
c) Ensimmäinen jäsen on 64. Toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan jakamalla edellinen jäsen luvulla 2. Puuttuvat jäsenet ovat 32 ja 8.

204.

Järjestysluku	Lauseke	Jäsen
1	$5 \cdot 1 - 2$	3
2	$5 \cdot 2 - 2$	8
3	$5 \cdot 3 - 2$	13
4	$5 \cdot 4 - 2$	18
100	$5 \cdot 100 - 2$	498

205. **a)**



kuvio 4

b) Toinen kuvio saadaan, kun ensimmäiseen kuvioon lisätään kaksi neliötä.

Kolmas kuvio saadaan, kun toiseen kuvioon lisätään kaksi neliötä, eli ensimmäiseen kuvioon on lisätty kaksi kertaa kaksi neliötä.

Neljäs kuvio saadaan, kun kolmanteen kuvioon lisätään kaksi neliötä, eli ensimmäiseen kuvioon on lisätty kolme kertaa kaksi kuviota.

Kymmenes kuvio saadaan, kun ensimmäiseen kuvioon lisätään yhdeksän kertaa kaksi neliötä. Kymmenennessä kuviossa on $5 + 9 \cdot 2 = 23$ neliötä.

c) Sadannessa kuviossa on
$(3 + 2) + 99 \cdot 2 = 3 + 100 \cdot 2 = 203$ neliötä.

d) Kuvion muodostamien neliöiden lukumäärä saadaan, kun ensimmäiseen jäseneen 5 lisätään luku 2 yhden kerran vähemmän kuin lukujonon jäsenen järjestysluku osoittaa.
Toisin sanoen kuvion muodostavien neliöiden lukumäärä saadaan kertomalla kuvion järjestysluku luvulla 2 ja lisäämällä tuloon luku 3.

Vastaus: **b)** 23 **c)** 203
d) Kuvion muodostavien neliöiden lukumäärä saadaan kertomalla kuvion järjestysluku luvulla 2 ja lisäämällä tuloon luku 3.

VAHVISTA OSAAMISTA

206. **a)** ensimmäinen jäsen –5
toinen jäsen 2
kolmas jäsen $-5 + 2 = -3$
neljäs jäsen $2 + (-3) = -1$
viides jäsen $-3 + (-1) = -4$

b) ensimmäinen jäsen –5
toinen jäsen 2
kolmas jäsen $-5 \cdot 2 = -10$
neljäs jäsen $2 \cdot (-10) = -20$
viides jäsen $-10 \cdot (-20) = 200$

Vastaus: **a)** –5, 2, –3, –1 ja –4 **b)** –5, 2, –10, –20 ja 200

207. **a)**

Kuvio	Pisteiden lukumäärä
1	1
2	4
3	7
4	10
5	13

b) Ensimmäisen kuvion pisteiden lukumäärä on 1. Kuvion pisteiden lukumäärä toisesta kuviosta alkaen saadaan lisäämällä edellisen kuvion pisteiden lukumäärään luku 3.

c) Ensimmäisessä kuviossa pisteiden lukumäärä on 1.

Toisessa kuviossa pisteiden lukumäärä saadaan, kun ensimmäisen kuvio pisteiden lukumäärään lisätään kolme pistettä.

Kolmannessa kuviossa pisteiden lukumäärä saadaan, kun toisen kuvion pisteiden lukumäärään lisätään kolme pistettä, eli ensimmäisen kuvion pisteiden lukumäärään on lisätty kaksi kertaa kolme pistettä.

Neljännessä kuviossa pisteiden määrä saadaan, kun kolmannen kuvion pisteiden määrään lisätään kolme pistettä, eli ensimmäisen kuvion pisteiden määrään on lisätty kolme kertaa kolme pistettä.

Vastaavasti sadannessa kuviossa pisteiden määrä saadaan, kun ensimmäisen kuvion pisteiden määrään lisätään 99 kertaa kolme pistettä. Sadannessa kuviossa on pisteitä $1 + 99 \cdot 3 = 298$.

d) Esimerkiksi: ”Kuvion pisteiden lukumäärä saadaan, kun lukuun 1 lisätään luku 3 yhden kerran vähemmän kuin kuvion järjestysluku.” Huom! Mikä tahansa oikean tuloksen antava muotoilu kelpaa.

Vastaus: **a)** Lukujono on 1, 4, 7, 10 ja 13.
b) Ensimmäisen kuvion pisteiden lukumäärä on 1. Kuvion pisteiden lukumäärä toisesta kuviosta alkaen saadaan lisäämällä edellisen kuvion pisteiden lukumäärään luku 3.
c) 298 pistettä
d) Kuvion pisteiden lukumäärä saadaan, kun lukuun 1 lisätään luku 3 yhden kerran vähemmän kuin kuvion järjestysluku.

208. **a)** Taulukoidaan otteluiden alkamisajat

Ottelu (nro)	Ottelun alkamisaika (klo)
1	10.30
2	11.10
3	11.50
4	12.30
5	13.10

b) Viimeinen ottelu alkaa
$(9 - 1) \cdot 40$ min $= 320$ min $= 5$ h 20 min
ensimmäisen ottelun alkamisajan jälkeen:
10.30 + 5 h 20 min eli kello 15.50.

Vastaus: **a)** 10.30, 11.10, 11.50, 12.30 ja 13.10
b) Viimeinen ottelu alkaa kello 15.50.

209. **a)** 3, 6, 9, 12, 15 ja 18

b) –9, –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2 ja –1

c) 2, 3, 5, 7, 11 ja 13

Vastaus: **a)** 3, 6, 9, 12, 15 ja 18 **b)** –9, –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2 ja –1
c) 2, 3, 5, 7, 11 ja 13

210. **a)** Lukujono A:
Ensimmäinen jäsen on yksi. Jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 1.

Lukujono B:
Ensimmäinen jäsen on 1. Jäsen on kahden edellisen jäsenen summa.

Lukujono C:
Ensimmäinen jäsen on yksi.
Toinen jäsen saadaan, kun ensimmäiseen lisätään luku 1.
Kolmas jäsen saadaan, kun toiseen jäseneen lisätään luku 2.
Neljäs jäsen saadaan, kun kolmanteen jäseneen lisätään luku 3, ja niin edelleen.
Jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen sen järjestysluku.

Lukujono D:
Ensimmäinen jäsen on yksi.
Jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 2.

b) Lukujono A:
$4 + 1 = 5$, $5 + 1 = 6$ ja $6 + 1 = 7$

Lukujono B:
$3 + 5 = 8$, $5 + 8 = 13$ ja $8 + 13 = 21$

Lukujono C:
$7 + 4 = 11$, $11 + 5 = 16$ ja $16 + 6 = 22$

Lukujono D:
$8 \cdot 2 = 16$, $16 \cdot 2 = 32$ ja $32 \cdot 2 = 64$

Vastaus: **a)** A: Jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 1. B: Jäsen on kahden edellisen jäsenen summa. C: Jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen edeltävän jäsenen järjestysluku. D: Jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 2.
b) A: 5, 6 ja 7. B: 8, 13 ja 21. C: 11, 16 ja 22. D: 16, 32 ja 64.

211. Esimerkiksi:
Lukujonon 11. jäsen saadaan, kun ensimmäiseen jäseneen lisätään sama luku kymmenen kertaa. Koska tunnettujen jäsenten erotus
$400 - 100 = 300$ on $10 \cdot 30$,
lisätään ensimmäiseen jäseneen 100 luku 30 kymmenen kertaa. Näin saadaan lukujonon 11. jäsen
$100 + 10 \cdot 30 = 400$.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on 100 ja toinen jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 30.
Toinen jäsen: $100 + 30 = 130$.
Kolmas jäsen: $130 + 30 = 100 + 2 \cdot 30 = 160$.
Sadas jäsen: $100 + 99 \cdot 30 = 3070$.

Vastaus: esim. Lukujonon ensimmäinen jäsen on 100, ja toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 30. Kolme ensimmäistä jäsentä ovat 100, 130, 160, ja sadas jäsen on 3070.

Huomautus: Myös muita ratkaisuja on.

212. Viides jäsen on $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
Koska lukujonon seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku $\frac{2}{3}$, edellinen jäsen saadaan vähentämällä luku $\frac{2}{3}$.

Neljäs jäsen on ${}^{3)}\frac{3}{2} - {}^{2)}\frac{2}{3} = \frac{9}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$.

Kolmas jäsen on $\frac{5}{6} - {}^{2)}\frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$.

Toinen jäsen on $\frac{1}{6} - {}^{2)}\frac{2}{3} = \frac{1}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{3}{6}^{(2} = -\frac{1}{2}$

Ensimmäinen jäsen on $-{}^{3)}\frac{1}{2} - {}^{2)}\frac{2}{3} = -\frac{3}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{7}{6} = -1\frac{1}{6}$.

Vastaus: $-1\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$ ja $1\frac{1}{2}$

213. **a)** Vakiolisäys saadaan, kun toisesta jäsenestä vähennetään ensimmäinen jäsen.

$${}^{3)}\frac{3}{4} - {}^{4)}\frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

b) Kolmas jäsen saadaan, kun toiseen jäseneen lisätään vakiolisäys.

$${}^{3)}\frac{3}{4} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} + \frac{1}{12} = \frac{10^{(2}}{12} = \frac{5}{6}$$

25. jäsen saadaan, kun lukuun $\frac{2}{3}$ lisätään 24 kertaa luku $\frac{1}{12}$.

$$\frac{2}{3} + 24 \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{24}{12} = \frac{2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}$$

Vastaus: **a)** $\frac{1}{12}$ **b)** Kolmas jäsen on $\frac{5}{6}$ ja 25. jäsen on $2\frac{2}{3}$.

214. 1, 2, 3, 4, 5, 6,...
Ensimmäinen jäsen on 1.
Toisesta jäsenestä alkaen lisätään edelliseen jäseneen aina luku 1.

1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
Ensimmäinen jäsen on 1.
Toinen jäsen on 2.
Kolmannesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan laskemalla kahden edellisen jäsenen summa.

1, 2, 3, 7, 22, 155...
Ensimmäinen jäsen on 1.
Toinen jäsen on 2.
Kolmannesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan laskemalla kahden edellisen jäsenen tulo ja lisäämällä siihen luku 1.

$1, 2, 3, \frac{5}{2}, \frac{11}{6}, \ldots$
Ensimmäinen jäsen on 1.
Toinen jäsen on 2.
Kolmannesta jäsenestä alkaen lasketaan edellisen ja sitä edeltävän jäsenen osamäärä ja lisätään osamäärään luku 1.

Vastaus: 1, 2, 3, 4, 5, 6,... Ensimmäinen jäsen on 1. Toisesta jäsenestä alkaen lisätään edelliseen jäseneen aina luku 1.
1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Ensimmäinen jäsen on 1. Toinen jäsen on kaksi. Kolmannesta jäsenestä alkaen lasketaan lukujonon jäsen saadaan laskemalla kahden edellisen jäsenen summa.
1, 2, 3, 7, 22, 155... Ensimmäinen jäsen on 1. Toinen jäsen on 2. Kolmannesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan laskemalla kahden edellisen jäsenen tulo ja lisäämällä siihen luku 1.

215. Esimerkiksi
1, 3, 5, 7, 9, ...
Ensimmäinen jäsen on 1.
Toisesta jäsenestä alkaen lisätään edelliseen jäseneen luku 2.

1, 2, 4, 7, 11, ...
Ensimmäinen jäsen on 1.
Toisesta jäsenestä alkaen lisätään edelliseen jäseneen jäsenen järjestysluku.

Vastaus: esim. 1, 3, 5, 7, 9, ... ja 1, 2, 4, 7, 11, ...

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

216. Valitaan lukujonon ensimmäiseksi jäseneksi esimerkiksi luvut 5, 6 ja 20 ja luetellaan jäseniä.

Järjestysluku	Jäsen	Jäsen	Jäsen
1	5	6	20
2	$5 \cdot 3 + 1 = 16$	$6 : 2 = 3$	10
3	$16 : 2 = 8$	$3 \cdot 3 + 1 = 10$	5
4	$8 : 2 = 4$	$10 : 2 = 5$	$5 \cdot 3 + 1 = 16$
5	$4 : 2 = 2$	$5 \cdot 3 + 1 = 16$	8
6	$2 : 2 = 1$	$16 : 2 = 8$	4
7	$1 \cdot 3 + 1 = 4$	$8 : 2 = 4$	2
8	$4 : 2 = 2$	$4 : 2 = 1$	1
9	$2 : 2 = 1$	$1 \cdot 3 + 1 = 4$	$1 \cdot 3 + 1 = 4$
10	$1 \cdot 3 + 1 = 4$	$4 : 2 = 2$	2
11	$4 : 2 = 2$	$2 : 2 = 1$	1
12	$2 : 2 = 1$	$1 \cdot 3 + 1 = 4$	4
...	...	...	...

Huomautus: Alkoipa lukujono millä positiivisella kokonaisluvulla tahansa, näyttää siltä, että lukujonossa ennemmin tai myöhemmin alkavat toistua luvut 4, 2 ja 1 peräkkäin: ..., 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

(Säännönmukaisuutta ei ole kukaan pystynyt osoittamaan todeksi eikä toisaalta löytämään vastaesimerkkiä, joka kumoaisi säännönmukaisuuden. Siksi sitä kutsutaan nimellä Collatzin otaksuma tarkoittaen, että ilmeisesti säännönmukaisuus on aina voimassa.)

Vastaus: Alkoipa lukujono millä positiivisella kokonaisluvulla tahansa, näyttää siltä, että luvut 4, 2 ja 1 alkavat toistua peräkkäin jossakin kohdassa lukujonoa.

217. Lasketaan kolmannen ja ensimmäisen jäsenen erotus.

$$-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}=-1$$

Vähennettävän luvun tulee olla $\frac{1}{2}$, eli lisättävä luku on $-\frac{1}{2}$. Lasketaan seuraavat neljä jäsentä. Kolmas jäsen lasketaan tarkistuksen vuoksi.

Toinen jäsen on $\frac{5}{6}-{}^{3)}\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{2}{6}^{(2}=\frac{1}{3}$.

Kolmas jäsen on ${}^{2)}\frac{1}{3}-{}^{3)}\frac{1}{2}=\frac{2}{6}-\frac{3}{6}=-\frac{1}{6}$, joten lisäys laskettiin oikein.

Neljäs jäsen on $-\frac{1}{6}-{}^{3)}\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}-\frac{3}{6}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$.

Viides jäsen on ${}^{2)}-\frac{2}{3}-{}^{3)}\frac{1}{2}=-\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=-\frac{7}{6}$

Vastaus: $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{6}$, $-\frac{2}{3}$ ja $-\frac{7}{6}$

218. **a)** Ensimmäisissä kuviossa on yksi kuutio, joten ensimmäinen jäsen on 1.

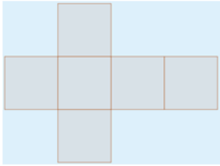
Toisessa kuviossa on kaksi kuutiota leveyssuunnassa, kaksi korkeussuunnassa ja kaksi syvyyssuunnassa, joten toinen jäsen on $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

Kolmannessa kuviossa on kolme kuutiota leveyssuunnassa, kolme korkeussuunnassa ja kolme syvyyssuunnassa, joten kolmas jäsen on $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$.

Vastaavasti neljännessä kuviossa on neljä kuutiota leveyssuunnassa, neljä korkeussuunnassa ja neljä syvyyssuunnassa, joten neljäs jäsen on $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$.

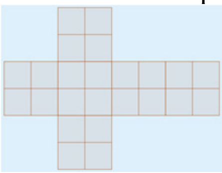
Edelleen viides jäsen on $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 625$ ja kymmenes jäsen on $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$.

b) Kuvassa kuutio on avattuna, jolloin pikkuneliöiden lukumäärä näkyy helpommin.



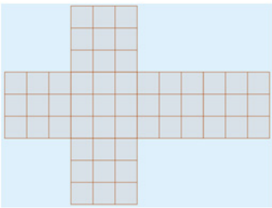
Ensimmäisen kuvion kuutiossa on kuusi tahkoa, jotka ovat pikkuneliötä, joten ensimmäinen jäsen on 6.

Toisen kuvion kuutiossa on kuusi sivutahkoa, joiden jokaisen sisällä on $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ pikkuneliötä.



Toinen jäsen on $6 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2^2 = 24$.

Kolmannen kuvion kuutiossa on kuusi sivutahkoa, joiden jokaisen sisällä on $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ pikkuneliötä.



Kolmas jäsen on $6 \cdot 3 \cdot 3 = 6 \cdot 3^2 = 54$.

Neljännes kuutiossa on kuusi sivutahkoa, joiden jokaisen sisällä on $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ pikkuneliötä.

Neljäs jäsen on $6 \cdot 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4^2 = 96$.

Vastaavasti viides jäsen on $6 \cdot 5 \cdot 5 = 6 \cdot 5^2 = 150$ ja kymmenes jäsen on $6 \cdot 10 \cdot 10 = 6 \cdot 100 = 600$.

Vastaus: **a)** 1, 8, 27, 64 ja 625, kymmenes jäsen on 1000.
b) 6, 24, 54, 96 ja 150, ja kymmenes jäsen on 600.

219. **a)** Toinen jäsen $\dfrac{{}^{3)}\dfrac{1}{2}+{}^{2)}\dfrac{1}{3}}{2}=\dfrac{\dfrac{3}{6}+\dfrac{2}{6}}{2}=\dfrac{\dfrac{5}{6}}{2}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{12}$.

Lukujonon kolmannen ja viidennen jäsenen keskiarvo on neljäs jäsen.

Merkitään viidettä jäsentä luvulla x. Tällöin

$$\frac{\frac{1}{3}+x}{2}=\frac{1}{4} \quad \| \cdot 2$$

$$\frac{1}{3}+x=\frac{1}{2}$$

$$x={}^{3)}\frac{1}{2}-{}^{2)}\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$

Viides jäsen on $\frac{1}{6}$.

b) Lukujonon jäsenet ovat $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{6}$. Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.

Toisen ja ensimmäisen jäsenen erotus on $\frac{5}{12}-{}^{6)}\frac{1}{2}=\frac{5}{12}-\frac{6}{12}=-\frac{1}{12}$.

Kolmannen ja toisen jäsenen erotus on ${}^{4)}\frac{1}{3}-\frac{5}{12}=\frac{4}{12}-\frac{5}{12}=-\frac{1}{12}$.

Neljännen ja kolmannen jäsenen erotus on ${}^{3)}\frac{1}{4}-{}^{4)}\frac{1}{3}=\frac{3}{12}-\frac{4}{12}=-\frac{1}{12}$.

Toinen jäsen saadaan, kun ensimmäisestä jäsenestä vähennetään luku $\frac{1}{12}$.
Kolmas jäsen saadaan, kun ensimmäisestä jäsenestä vähennetään kaksi kertaa luku $\frac{1}{12}$.
Neljäs jäsen saadaan, kun ensimmäiseen jäsenestä vähennetään kolme kertaa luku $\frac{1}{12}$, ja niin edelleen.

Mikä tahansa lukujonon jäsen saadaan, kun luvusta $\frac{1}{2}$ vähennetään järjestyslukua yhtä vähemmän kertaa lukua $\frac{1}{12}$.

Vastaus: **a)** 2. jäsen on $\frac{5}{12}$ ja 5. jäsen $\frac{1}{6}$.
b) Ensimmäisestä jäsenestä $\frac{1}{2}$ vähennetään luku $\frac{1}{12}$ yhden kerran vähemmän kuin lukujonon järjestysluku.

220. **a)** Ensimmäinen jäsen on $1^2 = 1$.
Toinen jäsen on $11^2 = 121$.
Kolmas jäsen on $111^2 = 12321$.
Neljäs jäsen on $1111^2 = 1234321$.
Viides jäsen on $11111^2 = 123454321$.

b) Jäsen on luku, jossa on kasvavassa järjestyksessä peräkkäisiä numeroita ykkösestä alkaen lukujonon järjestysnumeroon saakka ja samat numerot laskevassa järjestyksessä.

c)

Järjestysluku	Jäsen
10	1234567890987654321
11	123456789012 0987654321
12	1234567890123 20987654321
13	12345678901234320987654321

10. jäsenestä alkaen jäsen alkaa numeroilla 1234567890 ja päättyy numeroihin 0987654321.

Vastaus: **a)** 1, 121, 12321, 1234321 ja 123454321.
b) Jäsen on luku, jossa on kasvavassa järjestyksessä peräkkäisiä numeroita ykkösestä alkaen lukujonon järjestysnumeroon saakka ja samat numerot laskevassa järjestyksessä.
c) 10. jäsenestä alkaen jäsen alkaa numeroilla 1234567890 ja päättyy numeroihin 0987654321.

221. Jatketaan kolmiota, jolloin seuraavat rivit ovat

1	5	14	28	42	42	
1	6	20	48	90	132	132

a) Luvut 1, 1, 2, 5 ja 14 ovat kolmion oikeassa reunassa olevia lukuja, joten seuraavat luvut ovat 42 ja 132.

b) Luvut 1, 2, 5 ja 14 ovat kolmion toiselta riviltä lähtien toisena oikealta olevia lukuja, joten seuraavat luvut ovat 42 ja 132.

c) Luvut 1, 3 ja 9 ovat kolmannelta riviltä lähtien kolmantena oikealta olevia lukuja, joten seuraavat luvut ovat 28 ja 90.

d) Luvut 2, 5 ja 9 ovat kolmannelta riviltä lähtien kolmannessa sarakkeessa olevia lukuja, joten seuraavat luvut ovat 14 ja 20.

e) Ensimmäisellä rivillä on luku 1. Toisesta rivistä alkaen kukin luku on sen yläpuolella olevan rivin lukujen summa kyseisen luvun kohtaan saakka.

Vastaus: **a)** 42 ja 132 **b)** 42 ja 132 **c)** 28 ja 90 **d)** 14 ja 20
e) Ensimmäisellä rivillä on luku 1. Toisesta rivistä alkaen kukin luku on sen yläpuolella olevan rivin lukujen summa kyseisen luvun kohtaan saakka.

222. **a)** Lukujono jäsen saadaan lukemalla edellinen jäsen ääneen tai ilmaisemalla edellisen jäsenen peräkkäisten samojen numeroiden lukumäärät.

Lähdetään luvusta 2 ja luetaan luku ääneen seuraavasti:
yksi kakkonen: 12
yksi ykkönen yksi kakkonen: 1112
kolme ykköstä yksi kakkonen: 3112
yksi kolmonen kaksi ykköstä yksi kakkonen: 132112
yksi ykkönen yksi kolmonen yksi kakkonen kaksi ykköstä yksi kakkonen: 1113122112
kolme ykköstä yksi kolmonen yksi ykkönen kaksi kakkosta kaksi ykköstä yksi kakkonen: 311311222112

yksi kolmonen kaksi ykköstä yksi kolmonen kaksi ykköstä kolme kakkosta kaksi ykköstä yksi kakkonen: 13211321322112
yksi ykkönen yksi kolmonen yksi kakkonen kaksi ykköstä yksi kolmonen yksi kakkonen yksi ykkönen yksi kolmonen kaksi kakkosta kaksi ykköstä yksi kakkonen: 1113122113121113222112

b) 2
Seuraava jäsen on saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 1.
$2 + 1 = 3$
Seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 1.
$3 \cdot 1 = 3$
Seuraava jäsen on saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 2.
$3 + 2 = 5$
Seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 2.
$5 \cdot 2 = 10$
Seuraava jäsen on saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 3.
$10 + 3 = 13$
Seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 3.
$13 \cdot 3 = 39$
Seuraava jäsen on saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 4.
$39 + 4 = 43$
Seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 4.
$43 \cdot 4 = 172$
Seuraava jäsen on saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 5.
$172 + 5 = 177$

Vastaus: **a)** 1113122113121113222112. Lukujonon 1. jäsen on 2. Toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan esimerkiksi lukemalla ääneen, mitä lukuja luvussa on: 2, yksi kakkonen (12), yksi ykkönen yksi kakkonen (1112), ...
b) 177. Lukujonon ensimmäinen jäsen on 2. Toinen jäsen saadaan lisäämällä edelliseen luku 1. Kolmas jäsen saadaan kertomalla edellinen luvulla 1. Neljäs jäsen saadaan lisäämällä edelliseen luku 2. Viides jäsen saadaan kertomalla edellinen luvulla 2. jne.

2.2 Lukujonon yleinen jäsen

LUO PERUSTA

223.

$$a_1 = \frac{12}{1} = 12$$

$$a_2 = \frac{12}{2} = 6$$

$$a_3 = \frac{12}{3} = 4$$

$$a_4 = \frac{12}{4} = 3$$

Vastaus: $a_1 = 12$, $a_2 = 6$, $a_3 = 4$ ja $a_4 = 3$

224. **a)** $a_1 = 1 + 5 = 6$
$a_2 = 2 + 5 = 7$
$a_3 = 3 + 5 = 8$
$a_{100} = 100 + 5 = 105$

b) $a_n = n + 5$

Vastaus: **a)** $a_1 = 6$, $a_2 = 7$, $a_3 = 8$ ja $a_{100} = 105$ **b)** $a_n = n + 5$

225. **a)** $a_n = n^3$
$a_{10} = 10^3 = 1000$

b) $a_n = 3n - 2$
$a_{10} = 3 \cdot 10 - 2 = 28$

Vastaus: **a)** $a_n = n^3$, $a_{10} = 1000$ **b)** $a_n = 3n - 2$, $a_{10} = 28$

226. **a)** Lukujonon jäsen saadaan kertomalla järjestysluku luvulla 5.
$a_{100} = 5 \cdot 100 = 500$

b) $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 5 = 5 + 5n - 5 = 5n$

Vastaus: **a)** $a_{100} = 500$ **b)** $a_n = 5n$

227. $a_1 = 2$
$a_2 = a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$
$a_3 = a_2 - 3 = -1 - 3 = -4$
$a_4 = a_3 - 3 = -4 - 3 = -7$

Vastaus: $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = -4$ ja $a_4 = -7$

228. Ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$ ja toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 3.

Vastaus: Ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$, ja toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 3.

229. Soluun A1 kirjoitetaan ensimmäinen jäsen 5.

	A
1	5

Soluun A2 kirjoitetaan kaava ”=A1–4”.

	A
1	5
2	=A1-4

Tartu oikean alanurkan pienestä mustasta neliöstä ja raahaa alaspäin niin, että soluihin saadaan lukujonon 10 ensimmäistä jäsentä.

	A
1	5
2	1
3	-3
4	-7
5	-11
6	-15
7	-19
8	-23
9	-27
10	-31

Vastaus: 5, 1, –3, –7, –11, –15, –19, –23, –27 ja –31

VAHVISTA OSAAMISTA

230. **a)** $a_1 = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$a_2 = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6}^{(2} = \frac{1}{3}$

$a_3 = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{6}^{(3} = \frac{1}{2}$

$a_4 = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}^{(2} = \frac{2}{3}$

b) $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{1} = \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2$

$a_3 = {}^{3)}\frac{3}{2} + {}^{2)}\frac{2}{3} = \frac{9}{6} + \frac{4}{6} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$

$a_4 = \frac{4}{2} + \frac{2}{4}^{(2} = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

c) $a_1 = 1 - 3 \cdot 1^2 = 1 - 3 = -2$
$a_2 = 1 - 3 \cdot 2^2 = 1 - 3 \cdot 4 = 1 - 12 = -11$
$a_3 = 1 - 3 \cdot 3^2 = 1 - 3 \cdot 9 = 1 - 27 = -26$
$a_4 = 1 - 3 \cdot 4^2 = 1 - 3 \cdot 16 = 1 - 48 = -47$

Vastaus: **a)** $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{2}$ ja $a_4 = \frac{2}{3}$

b) $a_1 = 2\frac{1}{2}$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2\frac{1}{6}$ ja $a_4 = 2\frac{1}{2}$

c) $a_1 = -2$, $a_2 = -11$, $a_3 = -26$ ja $a_4 = -47$

231. **a)** Ensimmäisessä kuviossa on kaksi neliötä.
Toisessa kuviossa on kolme neliötä.
Kolmannessa kuviossa on neljä neliötä.
Neljännessä kuviossa on viisi neliötä.

Kuvioissa on neliöitä yksi enemmän kuin mitä kuvion järjestysluku osoittaa. Joten neljännessä kuviossa on viisi neliötä ja sadannessa kuviossa on 101 neliötä.

b) n. kuviossa on n neliötä, joten $a_n = n + 1$.

Vastaus: **a)** $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_5 = 5$ ja $a_{100} = 101$ **b)** $a_n = n + 1$

232. **a)** Lukujonon jäsen saadaan, kun lukujonon ensimmäiseen jäseneen –2 lisätään luku –2 yhden kerran vähemmän kuin lukujonon jäsenen järjestysluku osoittaa. Tällä perusteella
$a_{100} = -2 + 99 \cdot (-2) = -200$

b) $a_n = -2 + (n - 1) \cdot (-2) = -2 - 2n + 2 = -2n$

Vastaus: **a)** $a_{100} = -200$ **b)** $a_n = -2n$

233. **a)** $a_1 = 1 = 1^2$
$a_2 = 4 = 2^2$
$a_3 = 9 = 3^2$
$a_4 = 16 = 4^2$
$a_{10} = 100 = 10^2$
$a_n = n^2$

b) $a_1 = 2 = 1^2 + 1$
$a_2 = 5 = 2^2 + 1$
$a_3 = 10 = 3^2 + 1$
$a_4 = 17 = 4^2 + 1$
$a_{10} = 101 = 10^2 + 1$
$a_n = n^2 + 1$

Vastaus: **a)** $a_{10} = 100$, $a_n = n^2$ **b)** $a_{10} = 101$, $a_n = n^2 + 1$

234. **a)** $a_1 = 5$
$a_2 = 5 + 2 = 7$
$a_3 = 7 + 2 = 9$
$a_4 = 9 + 2 = 11$

b) $a_1 = 3$
$a_2 = 3 - 4 = -1$
$a_3 = -1 - 4 = -5$
$a_4 = -5 - 4 = -9$

Vastaus: **a)** $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 9$ ja $a_4 = 11$
b) $a_1 = 3$, $a_2 = -1$, $a_3 = -5$ ja $a_4 = -9$

235. **a)** $a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

b) $a_1 = 5$ ja $a_n = a_{n-1} \cdot 10$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

Vastaus: **a)** $a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, $n = 2, 3, 4, \ldots$
b) $a_1 = 5$ ja $a_n = 10a_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

236. **a)** Lukujonon ensimmäinen jäsen on 7. Toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 5.

b) $a_1 = 7$ ja $a_n = a_{n-1} + 5$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

Vastaus: **a)** Lukujonon ensimmäinen jäsen on 7. Toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 5.
b) $a_1 = 7$ ja $a_n = a_{n-1} + 5$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

237. **a)** $a_1 = 5$
$a_2 = 5 + 4 = 9$
$a_3 = 9 + 4 = 13$
$a_4 = 13 + 4 = 17$
$a_5 = 17 + 4 = 21$

b) Ensimmäisessä kuviossa on viisi janaa ja toisesta kuviosta alkaen kuviossa on neljä janaa enemmän kuin edellisessä kuviossa.
$a_1 = 5$ ja $a_n = a_{n-1} + 4$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

Vastaus: **a)** 5, 9, 13, 17 ja 21 **b)** $a_1 = 5$ ja $a_n = a_{n-1} + 4$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

238. **a)** Lukujonon jäsenen laskemiseen ei tarvitse tietää edellisiä jäseniä, joten sääntö on analyyttinen.

b) Lukujonon jäsenen laskemiseen tarvitsee tietää edelliset jäsenet, joten sääntö on rekursiivinen.

Vastaus: **a)** analyyttinen **b)** rekursiivinen

239. **a)** Lukujonon ensimmäinen jäsen on 3 ja toisesta jäsenestä alkaen jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 3.
$a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1} + 3$, $n = 2, 3, 4, ...$

b) $a_1 = 3 \cdot 1$
$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
$a_3 = 3 \cdot 3 = 9$
$a_4 = 3 \cdot 4 = 12$

Lukujonon jäsen saadaan kertomalla järjestysluku luvulla 3.
$a_n = 3n$

Vastaus: **a)** $a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1} + 3$, $n = 2, 3, 4, ...$ **b)** $a_n = 3n$

240. **a)** ”=A1+3”

b) Soluun A2 kirjoitetaan kaava ”=A1+3”. Tämän jälkeen solun oikean alanurkan pienestä mustasta neliöstä raahaamalla alaspäin saadaan lukujonon 15 ensimmäistä jäsentä.

	A
1	-1
2	2
3	5
4	8
5	11
6	14
7	17
8	20
9	23
10	26
11	29
12	32
13	35
14	38
15	41

Vastaus: **a)** ”=A1+3”
b) –1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 35, 38 ja 41

241. Soluun A1 kirjoitetaan luku 2 ja soluun A2 kaava ”=A1–3”. Tämän jälkeen solun oikean alanurkan pienestä mustasta neliöstä raahaamalla alaspäin saadaan lukujonon 10 ensimmäistä jäsentä.

	A
1	2
2	-1
3	-4
4	-7
5	-10
6	-13
7	-16
8	-19
9	-22
10	-25

Vastaus: 2, –1, –4, –7, –10, –13, –16, –19, –22 ja –25

242. Soluun A1 kirjoitetaan luku 2010 ja soluun A2 kaava ”=A1+1”. Solun A2 oikean alanurkan pientä mustaa neliötä raahaamalla saadaan vuosiluvut 2011–2030 soluihin A2–A21.

Soluun B1 kirjoitetaan luku 80. Koska elinikä kasvaa kahdella kuukaudella eli $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ vuodella, niin soluun B2 kirjoitetaan kaava ”=B1+1/6”. Solun B2 oikean alanurkan pientä mustaa neliötä raahaamalla saadaan vuosilukuja 2011–2030 vastaavat eliniät soluihin B2–B21.

Desimaalien lukumäärää voi muuttaa taulukkolaskentaohjelman asetuksista.

2010	80
2011	80.17
2012	80.33
2013	80.5
2014	80.67
2015	80.83
2016	81
2017	81.17
2018	81.33
2019	81.5
2020	81.67
2021	81.83
2022	82
2023	82.17
2024	82.33
2025	82.5
2026	82.67
2027	82.83
2028	83
2029	83.17
2030	83.33

Vastaus: 80; 80,17; 80,33; 80,5; 80,67; 80,83; 81; 81,17; 81,33; 81,5; 81,67; 81,83; 82; 82,17; 82,33; 82,5; 82,67; 82,83; 83; 83,17 ja 83,33

243. **a)** Ensimmäisessä kuviossa keltaisia neliöitä on 5.
Toisessa kuviossa keltaisia neliöitä on neljä enemmän kuin ensimmäisessä kuviossa eli $5 + 4 = 9$.
Kolmannessa kuviossa keltaisia neliöitä on taas neljä enemmän kuin toisessa kuviossa eli $9 + 4 = 13$.

Toisen kuvion neliöiden lukumäärä 9 voidaan esittää ensimmäisen kuvion neliöiden lukumäärän 5 ja lisäyksen 4 avulla, joten kolmannen kuvion keltaisten neliöiden lukumäärä voidaan esittää muodossa $5 + 4 + 4 = 5 + 2 \cdot 4 = 13$.

Kuviojonon jäsen saadaan, kun kuviojonon ensimmäiseen jäseneen 5 lisätään luku 4 yhden kerran vähemmän kuin kuviojonon jäsenen järjestysluku osoittaa.
Kuviojonon 10. jäsenessä on siten keltaisia neliöitä
$a_{10} = 5 + 9 \cdot 4 = 41$.

Keltaisten neliöiden lukumäärä n. jäsenessä saadaan yhtälöstä
$a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1$.

b) Ensimmäisessä kuviossa oransseja neliöitä on 16.
Toisessa kuviossa oransseja neliöitä on kahdeksan enemmän kuin ensimmäisessä kuviossa eli $16 + 8 = 24$.
Kolmannessa kuviossa oransseja neliöitä on taas kahdeksan enemmän kuin toisessa kuviossa eli $24 + 8 = 32$.

Toisen kuvion neliöiden lukumäärä 24 voidaan esittää ensimmäisen kuvion neliöiden lukumäärän 16 ja lisäyksen 8 avulla, joten kolmannen kuvion oranssien neliöiden lukumäärä voidaan esittää muodossa $16 + 8 + 8 = 16 + 2 \cdot 8 = 32$.

Kuviojonon jäsen saadaan, kun kuviojonon ensimmäiseen jäseneen 16 lisätään luku 8 yhden kerran vähemmän kuin kuviojonon jäsenen järjestysluku osoittaa. Kuviojonon 10. jäsenessä on siten oransseja neliöitä $a_{10} = 16 + 9 \cdot 8 = 88$.

Oranssien neliöiden lukumäärä n. jäsenessä saadaan yhtälöstä
$a_n = 16 + (n - 1) \cdot 8 = 8n + 8$.

Vastaus: **a)** $a_{10} = 41$, $a_n = 4n + 1$ **b)** $a_{10} = 88$, $a_n = 8n + 8$

244. **a)** Parillisten positiivisten kokonaislukujen jono on 2, 4, 6, 8, ...

$a_1 = 1 \cdot 2$
$a_2 = 2 \cdot 2 = 4$
$a_3 = 3 \cdot 2 = 6$
$a_4 = 4 \cdot 2 = 8$

Lukujonon jäsen saadaan, kun järjestyslukua kerrotaan luvulla 2, joten $a_n = 2n$.

b) Parittomien positiivisten kokonaislukujen jono on 1, 3, 5, 7, ...

$a_1 = 1 \cdot 2 - 1 = 1$
$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
$a_3 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$
$a_4 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$

Lukujonon jäsen saadaan, kun järjestyslukua kerrotaan luvulla 2 ja vähentämällä tulosta luku 1, joten
$a_n = 2n - 1$

c) Kolmella jaollisten positiivisten kokonaislukujen jono on 3, 6, 9, 12, ...

$a_1 = 1 \cdot 3$
$a_2 = 2 \cdot 3 = 6$
$a_3 = 3 \cdot 3 = 9$
$a_4 = 4 \cdot 3 = 12$

Lukujonon jäsen saadaan, kun järjestyslukua kerrotaan luvulla 3, joten
$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 3 = 3 + 3n - 3 = 3n$

d) Positiivisten kokonaislukujen neliöiden jono on 1, 4, 9, 16, ...

$a_1 = 1^2 = 1$
$a_2 = 2^2 = 4$
$a_3 = 3^2 = 9$
$a_4 = 4^2 = 16$

Lukujonon jäsen saadaan korottamalla järjestysluku neliöön, joten
$a_n = n^2$

Vastaus: **a)** $a_n = 2n$ **b)** $a_n = 2n - 1$ **c)** $a_n = 3n$ **d)** $a_n = n^2$

245. **a)** $a_1 = \frac{5}{6}$

$$a_2 = {}^{2)}\frac{5}{6} - {}^{3)}\frac{1}{4} = \frac{10}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$a_3 = \frac{7}{12} - {}^{3)}\frac{1}{4} = \frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4}{12}^{(4} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = {}^{4)}\frac{1}{3} - {}^{3)}\frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

$$a_5 = \frac{1}{12} - {}^{3)}\frac{1}{4} = \frac{1}{12} - \frac{3}{12} = -\frac{2}{12}^{(2} = -\frac{1}{6}$$

b) Rekursiivinen sääntö

$$a_1 = \frac{5}{6} \text{ ja } a_n = a_{n-1} - \frac{1}{4},\ n = 2, 3, 4, \ldots$$

Analyyttinen sääntö

$$a_1 = \frac{5}{6}$$

$$a_2 = \frac{5}{6} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = {}^{2)}\frac{5}{6} - {}^{3)}\frac{1}{4} = \frac{10}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$a_3 = \frac{5}{6} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{6} - \frac{2}{4}^{(2} = \frac{5}{6} - {}^{3)}\frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6}^{(2} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{5}{6} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = {}^{2)}\frac{5}{6} - {}^{3)}\frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$$

$$a_5 = \frac{5}{6} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{6} - \frac{4}{4} = \frac{5}{6} - 1^{(6} = \frac{5}{6} - \frac{6}{6} = -\frac{1}{6}$$

Lukujonon jäsen saadaan lisäämällä lukuun $\frac{5}{6}$ järjestyslukua yhtä vähemmän kertaa luku $-\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{5}{6} + (n-1)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{5}{6} - \frac{1}{4}n + \frac{1}{4} \\
&= {}^{2)}\frac{5}{6} + {}^{3)}\frac{1}{4} - \frac{1}{4}n \\
&= \frac{10}{12} + \frac{3}{12} - \frac{1}{4}n \\
&= \frac{13}{12} - \frac{1}{4}n
\end{aligned}$$

Vastaus: **a)** $a_1 = \frac{5}{6}$, $a_2 = \frac{7}{12}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{12}$ ja $a_5 = -\frac{1}{6}$

b) rekursiivinen $a_1 = \frac{5}{6}$ ja $a_n = a_{n-1} - \frac{1}{4}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$,

analyyttinen $a_n = \frac{13}{12} - \frac{n}{4}$

246. **a)** $a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1^2}{1+1}$

$$a_2 = \frac{4}{3} = \frac{2^2}{2+1}$$

$$a_3 = \frac{9}{4} = \frac{3^2}{3+1}$$

$$a_4 = \frac{16}{5} = \frac{4^2}{4+1}$$

$$a_{10} = \frac{10^2}{10+1} = \frac{100}{11} = 9\frac{1}{11}$$

Lukujonon jäsenen osoittajat ovat järjestysluvun neliöitä ja nimittäjät ovat järjestysluku lisättynä luku 1.

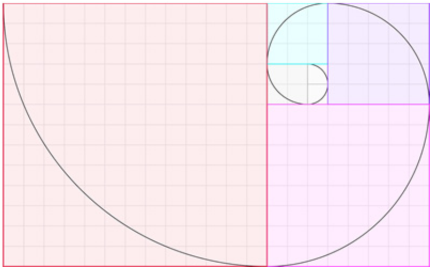
b) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

Vastaus: **a)** $a_{10} = \dfrac{100}{11}$ **b)** $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

247. **a)** Neliöiden sivujen pituudet ovat Fibonaccin lukujonon jäseniä.

b)

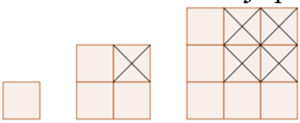


Vastaus: **a)** Neliöiden sivujen pituudet ovat Fibonaccin lukujonon jäseniä.

248. 1. kuvion neliöiden määrä: 1
2. kuvion neliöiden määrä: $1 + 1 \cdot 2$
3. kuvion neliöiden määrä: $1 + 2 \cdot 2$

Neliöiden määrä saadaan lisäämällä lukuun 1 kuvion järjestyslukua yhden kerran vähemmän lukua 2.
$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$

Toisella tavalla sääntö saadaan ajattelemalla toisesta kuviosta lähtien kuvio isoksi neliöksi ja poistamalla siitä ylimääräiset neliöt.



1. kuvion neliöiden määrä: 1
2. kuvion neliöiden määrä: $2^2 - 1^2$
3. kuvion neliöiden määrä: $3^2 - 2^2$

Neliöiden määrä saadaan kuvion järjestysluvun neliöstä vähentämällä järjestysluvusta yhden pienemmän luvun neliö.
$a_n = n^2 - (n-1)^2$

Vastaus: esim. $a_n = 2n - 1$ tai $a_n = n^2 - (n-1)^2$

249. **a)** $(n + 4)n = n^2 + 4n$. Sääntö on oikea.

Siirretään ylhäällä ja alhaalla olevat neliöt sivulle niin, että muodostuu suorakulmio.

b) $n(n + 2) + n(n + 2) - n^2 = n^2 + 2n + n^2 + 2n - n^2 = n^2 + 4n$.
Sääntö on oikea. Kaksi suorakulmiota $n(n + 2)$, josta vähennetään kahteen kertaan tuleva keskusneliö eli n^2.

Vastaus: **a)** Sääntö on oikea. Siirretään ylhäällä ja alhaalla olevat neliöt sivulle niin, että muodostuu suorakulmio.
b) Sääntö on oikea. Lasketaan vaaka- ja pystysuunnissa olevien suorakulmioiden ruutujen lukumäärät yhteen ja vähennetään keskellä oleva neliö, joka on laskettu kahteen kertaan mukaan.

250. **a)** $a_3 = a_2 - a_1 = 3 - 2 = 1$
$a_4 = a_3 - a_2 = 1 - 3 = -2$
$a_5 = a_4 - a_3 = -2 - 1 = -3$

b) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n = 3, 4, 5, ...$

Vastaus: **a)** $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$, $a_4 = -2$ ja $a_5 = -3$
b) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n = 3, 4, 5, ...$

251. **a)** Soluun A3 kirjoitetaan ”=A2–A1”.

b)

	A
1	1
2	1
3	0
4	-1
5	-1
6	0
7	1
8	1
9	0
10	-1
11	-1
12	0
13	1
14	1
15	0
16	-1

Jonon 7. ja 8. jäsen ovat samat kuin 1. ja 2. Siten lukujonossa alkaa toistumaan sama kuuden luvun jakso.

c) Jos ensimmäiset jäsenet ovat $a_1 = 2$ ja $a_2 = 2$, jaksollisuus säilyy. (Taulukossa on testattu myös muita ensimmäisiä jäseniä)

	A	B	C	D
1	2	-1	4	-3
2	2	-1	5	2
3	0	0	1	5
4	-2	1	-4	3
5	-2	1	-5	-2
6	0	0	-1	-5
7	2	-1	4	-3
8	2	-1	5	2
9	0	0	1	5
10	-2	1	-4	3
11	-2	1	-5	-2
12	0	0	-1	-5
13	2	-1	4	-3
14	2	-1	5	2
15	0	0	1	5
16	-2	1	-4	3
17	-2	1	-5	-2
18	0	0	-1	-5
19	2	-1	4	-3

Näyttäisi siltä, että lukujonossa toistuu kuuden luvun jakso olivatpa ensimmäiset jäsenet mitä tahansa kokonaislukuja.

Vastaus: **a)** ”=A2–A1”
b) 1, 1, 0, –1, –1, 0, 1, 1, 0, –1, –1, 0, 1, 1, 0 ja –1. Jonon 7. ja 8. jäsen ovat samat kuin 1. ja 2. Siten lukujonossa alkaa toistumaan sama kuuden luvun jakso.
c) Näyttäisi siltä, että lukujonossa toistuu kuuden luvun jakso olivatpa ensimmäiset jäsenet mitä tahansa kokonaislukuja.

252. **a)** Sarakkeen A luvut ovat peräkkäisiä positiivisia kokonaislukuja, joten soluun A2 kirjoitetaan ”=A1+1” ja kopioidaan tätä solua alaspäin.

Sarakkeen B toisesta rivistä lähtien luvut ovat kahden ylemmän rivin A ja B sarakkeen summa, joten soluun B2 kirjoitetaan ”=A1+B1”.

b) Sarakkeessa A on lukujonon (b_n) jäsenen järjestysluku.
Sarakkeen B ensimmäinen luku on lukujonon (b_n) ensimmäinen jäsen ja seuraavat jäsenet saadaan, kun edellinen jäsen ja sen järjestysluku summataan.
$b_1 = 1$ ja $b_n = b_{n-1} + n - 1$, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$

Vastaus: **b)** $b_1 = 1$ ja $b_n = b_{n-1} + n - 1$, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$

253. **a)** $a_1 = (-1)^1 = -1$
$a_2 = (-1)^2 = 1$
$a_3 = (-1)^3 = -1$
$a_4 = (-1)^4 = 1$ ja
$a_5 = (-1)^5 = -1$

b) a-kohdan nojalla $(-1)^n$ muuttaa jäsenen etumerkkiä. Lukujonossa
$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ vaihtuu etumerkki ja järjestysluku on nimittäjänä.

$$a_1 = -1 = (-1)^1 \cdot \frac{1}{1}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} = (-1)^2 . \frac{1}{2}$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} = (-1)^3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

c) Lukujonon 0, 1, 0, 1, ... jäsenet saadaan, kun vuorotellen luvusta $\frac{1}{2}$ vähennetään luku $\frac{1}{2}$ ja lukuun $\frac{1}{2}$ lisätään luku $\frac{1}{2}$.

$$a_1 = 0 = \frac{1}{2} + (-1)^1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_2 = 1 = \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_3 = 0 = \frac{1}{2} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_4 = 1 = \frac{1}{2} + (-1)^4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2}$$

Vastaavasti lukujonon 1, 0, 1, 0, ... yleinen jäsen on
$a_n = \frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2}$, jolloin ensimmäinen jäsen on
$a_1 = \frac{1}{2} + (-1)^{1+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Vastaus: **a)** $-1, 1, -1, 1$ ja -1 **b)** $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

c) $a_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2}$

254. **a)** $a_1 = 2$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left({}^{3)}\frac{3}{2} + {}^{2)}\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{6} + \frac{8}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{6} = \frac{17}{12}$$

Laskentataulukko

	A
1	2
2	1.5
3	1.4166666667
4	1.4142156863
5	1.4142135624
6	1.4142135624
7	1.4142135624
8	1.4142135624
9	1.4142135624
10	1.4142135624

Lukujonon kaikki jäsenet ovat viidennestä jäsenestä alkaen 1,4142135624.

b) Luvun 2 neliöjuuri on 1,1414213562... joten lukujonoa käyttäen voidaan laskea luvun 2 neliöjuuri.

c) Kokeillen taulukkolaskentaohjelmaa käyttäen huomataan, että luvun 5 neliöjuuri saadaan vaihtamalla $a_1 = 5$ ja $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{5}{a_{n-1}})$. Tätä voi hyödyntää esimerkiksi laskimissa tai tietokoneissa minkä tahansa luvun neliöjuuren määrittämisessä.

Vastaus: **a)** $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$ ja $a_3 = \frac{17}{12}$. Lukujonon jäsenet ovat viidennestä jäsenestä alkaen 10 desimaalin tarkkuudella 1,4142135624.
b) Luvun 2 neliöjuuri on 1,1414213562... joten lukujonoa käyttäen voidaan laskea luvun $\sqrt{2}$ likiarvon.
c) $a_1 = 5$ ja $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{5}{a_{n-1}})$

255. a)

Kolme peräkkäistä Fibonaccin lukujonon jäsentä	Sääntö
1, 1, 2	$1 \cdot 2 - 1 = 1 = 1^2$
1, 2, 3	$1 \cdot 3 + 1 = 4 = 2^2$
2, 3, 5	$2 \cdot 5 - 1 = 9 = 3^2$
3, 5, 8	$3 \cdot 8 + 1 = 25 = 5^2$
5, 8, 13	$5 \cdot 13 - 1 = 64 = 8^2$
8, 13, 21	$8 \cdot 21 + 1 = 169 = 13^2$

Jos kolmen peräkkäisen Fibonaccin luvun suurimman järjestysluku on parillinen, pienimmän ja suurimman luvun tulo lisättynä luvulla 1 on keskimmäisen luvun neliö.

Jos kolmen peräkkäisen Fibonaccin luvun suurimman järjestysluku on pariton, pienimmän ja suurimman luvun tulo vähennettynä luvulla 1 on keskimmäisen luvun neliö.

b) Jos kolme peräkkäistä Fibonaccin lukua ovat F_{n-2}, F_{n-1} ja F_n, a-kohdan säännönmukaisuus voidaan kirjoittaa muodossa
$F_{n-2} \cdot F_n + (-1)^n = (F_{n-1})^2$.

Vastaus: **a)** Jos kolmen peräkkäisen Fibonaccin luvun suurimman järjestysluku on parillinen, pienimmän ja suurimman luvun tulo lisättynä luvulla 1 on keskimmäisen luvun neliö. Jos kolmen peräkkäisen Fibonaccin luvun suurimman järjestysluku on pariton, pienimmän ja suurimman luvun tulo vähennettynä luvulla 1 on keskimmäisen luvun neliö. **b)** $F_{n-2} \cdot F_n + (-1)^n = (F_{n-1})^2$.

2.3 Aritmeettinen lukujono

LUO PERUSTA

256. **a)** 9 – 5 = 4, 13 – 9 = 4, 17 – 13 = 4

Peräkkäisten jäsenten erotus on aina 4, joten lukujono voi olla aritmeettinen jono.

b) 6 – 3 = 3, 12 – 6 = 6, 24 – 12 = 12

Peräkkäisten jäsenten erotus ei ole aina sama, joten lukujono ei ole aritmeettinen jono.

c) 18 – 20 = –2, 16 – 18 = –2, 14 – 16 = –2

Peräkkäisten jäsenten erotus on aina –2, joten lukujono voi olla aritmeettinen jono.

Vastaus: **a)** Erotus on aina 4. Voi olla.
b) Erotukset ovat 3, 6, 12. Ei voi olla. **c)** Erotus on aina –2. Voi olla.

257. **a)** Aritmeettisen lukujonon erotusluku d = 11 – 8 = 3. Lisätään siis luku 3 aina edelliseen jäseneen.

Ensimmäinen puuttuva jäsen on 14 + 3 = 17 ja toinen 20 + 3 = 23.

b) Erotusluku d = 10 – 14 = –4.

Ensimmäinen puuttuva luku saadaan, kun lukuun 14 lisätään luku 4, eli 14 + 4 = 18.
Toinen puuttuva luku on 6 + (–4) = 2.

Vastaus: **a)** Puuttuvat jäsenet ovat 17 ja 23. d = 3.
b) Puuttuvat jäsenet ovat 18 ja 2. d = –4.

258. A Jäsen saadaan lisäämällä edelliseen luku 5, jolloin $d = 5$. Vaihtoehto I.
B $d = a_2 - a_1 = 9 - 3 = 6$. Vaihtoehto III.
C Jäsen saadaan lisäämällä edelliseen luku –2, jolloin $d = -2$. Vaihtoehto II.
D Kun jonon jäsenet ovat yhtä suuria, niin $d = 0$. Vaihtoehto V.
E $a_5 + 2d = a_7$

$$8 + 2d = 2$$
$$2d = -6 \quad \| :2$$
$$d = -3$$

Vaihtoehto IV.

Vastaus: A–I, B–III, C–II, D–V ja E–IV

259. **a)** Erotusluku $d = 5 - 2 = 3$.
$a_{100} = 2 + (100 - 1) \cdot 3 = 2 + 99 \cdot 3 = 299$

b) $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$

Vastaus: **a)** $a_{100} = 299$ **b)** $a_n = 3n - 1$

260. **a)** Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$ ja erotusluku $d = 6 - 2 = 4$.
Yleisen jäsenen lauseke $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 4 = 2 + 4n - 4 = 4n - 2$.

b) $a_{260} = 4 \cdot 260 - 2 = 1040 - 2 = 1038$

c) $a_n = 2610$

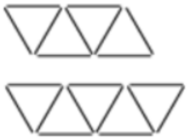
$$4n - 2 = 2610$$
$$4n = 2612 \quad \| :4$$
$$n = 653$$

Ratkaisuksi tulee kokonaisluku, joten luku 2610 on lukujonon jäsen.

Vastaus: **a)** $a_n = 4n - 2$ **b)** 1038 **c)** On.

VAHVISTA OSAAMISTA

261. **a)**



b) Ensimmäisessä kuviossa on 3 tikkua.

Seuraavissa kuvioissa on aina kaksi tikkua enemmän kuin edellisessä. Kuviot muodostavat aritmeettisen jonon, joten n:nnen kuvion tikkujen määrä saadaan aritmeettisen jonon yleisen jäsenen kaavalla, missä $a_1 = 3$ ja $d = 2$.

$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$

c) Ratkaistaan, onko sellaista järjestyslukua, että $a_n = 101$.

$$
\begin{aligned}
2n + 1 &= 101 \\
2n &= 100 \qquad \| : 2 \\
n &= 50
\end{aligned}
$$

Luku 101 on lukujonon 50. jäsen, joten 50. kuviossa 101 tikkua.

Vastaus: **b)** $a_n = 2n + 1$ **c)** On.

262. **a)** $23 - 27 = -4$, $19 - 23 = -4$, $15 - 19 = -4$

Peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, joten lukujono voi olla aritmeettinen jono.

b) $6 - 1 = 5$, $11 - 6 = 5$, $16 - 11 = 5$

Peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, joten lukujono voi olla aritmeettinen jono.

c) $-1\frac{1}{3}-\left(-2\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right)=-\frac{4}{3}+\frac{7}{3}=\frac{3}{3}=1$,
$-\frac{1}{3}-\left(-1\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{3}{3}=1$,
$\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$

Peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, joten lukujono voi olla aritmeettinen jono.

d) 60 – 120 = –60, 40 – 60 = –20, 30 – 40 = –10

Peräkkäisten jäsenten erotus ei ole sama vakio, joten lukujono ei ole aritmeettinen jono.

Vastaus: **a)** Voi olla. **b)** Voi olla. **c)** Voi olla. **d)** Ei voi olla.

263. **a)** 8.17 – 8.07 = 0.10
8.27 – 8.17 = 0.10
8.37 – 8.27 = 0.10
8.47 – 8.37 = 0.10
8.57 – 8.47 = 0.10
9.07 – 8.57 = 0.10

Peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, joten voi olla aritmeettinen jono.

b) 6.18 – 6.07 = 0. 11
6.27 – 6.18 = 0.09

Peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio, joten ei ole aritmeettinen jono.

Vastaus: **a)** kyllä, erotus 10 minuuttia **b)** ei

264. **a)** Ensimmäisen askelman korkeus on $\frac{51\text{ cm}}{3} = 17\text{ cm}$.

10. askelma on 10 · 17 cm = 170 cm.

b) Jokainen askelma lisää korkeuseroa lattiaan 17 cm verran, joten lukujono on aritmeettinen. Aritmeettisen jonon $a_1 = 17$ ja $d = 17$, joten $a_n = 17 + (n - 1) \cdot 17 = 17 + 17n - 17 = 17n$

Vastaus: **a)** 17 cm, 170 cm. **b)** Portaiden jokainen nousu on yhtä suuri, joten lukujono on aritmeettinen. $a_n = 17n$ (cm)

265. **a)** *Siniset kolmiot*

Ensimmäisessä kuviossa on yksi kolmio, joten $a_1 = 1 = 1^2$.
Toisessa kuviossa on neljä kolmiota, joten $a_2 = 4 = 2^2$.
Kolmannessa kolmiossa on yhdeksän kolmiota, joten $a_3 = 9 = 3^2$.
Kolmioiden lukumäärä on kuvion järjestysluvun neliö, joten $a_n = n^2$.

Vihreät puoliympyrät
Ensimmäisessä kuviossa on kolme puoliympyrää, joten $a_1 = 3$.
Toisessa kuviossa on kuusi puoliympyrää, joten $a_2 = 6 = 3 + 1 \cdot 3$.
Kolmannessa kuviossa on yhdeksän puoliympyrää, joten
$b_3 = 9 = 3 + 2 \cdot 3$.

Puoliympyröiden lukumäärä saadaan, kun lukuun 3 lisätään järjestysluku yhtä vähemmän kertaa luku 3.
$b_n = 3 + (n - 1) \cdot 3 = 3n$

b) Sinisten kolmioiden muodostama lukujono ei ole aritmeettinen lukujono, koska peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio.
$a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$, $a_3 - a_2 = 9 - 4 = 5$

Vihreiden puoliympyröiden muodostaman lukujonon seuraava jäsen saadaan lisäämällä aina luku 3, joten lukujono on aritmeettinen lukujono.

c) 1000. kuviossa on $b_n = 3 \cdot 1000 = 3000$ vihreää puoliympyrää. Ratkaistaan yhtälön avulla, kuinka monennessa kuviossa on 1000 vihreää puoliympyrää.

$$\begin{aligned} 3n &= 1000 \qquad \| : 3 \\ n &= 333{,}33... \end{aligned}$$

Yli 1000 vihreää puoliympyrää on 334. kuviossa.

Vastaus: **a)** Kolmioiden lukumäärä $a_n = n^2$ ja puoliympyröiden lukumäärä $b_n = 3n$. **b)** (b_n) on **c)** 334. kuvion

266. **a)** Erotusluku saadaan, kun kymmenen vuoden kulutuksen muutos jaetaan vuosien määrällä, joten

$$d = \frac{20{,}5 - 23{,}5}{10} = -0{,}3.$$

Vuoden 1971 rukiin kulutus on lukujonon ensimmäinen jäsen, eli $a_1 = 23{,}5 - 0{,}3 = 23{,}2$.

Rukiin vuosittainen kulutus on $a_n = 23{,}2 + (n - 1) \cdot (-0{,}3) = 23{,}2 - 0{,}3n + 0{,}3 = 23{,}5 - 0{,}3n$ (kg), jossa n on vuosia vuodesta 1970 lähtien.

b) Koska järjestysluku n on vuosia vuodesta 1970 lähtien, niin vuosi 1990 on lukujonon 20. jäsen.

Vuosi 2020 on jonon 50. jäsen, joten rukiin kulutus tällöin on $a_{50} = 23{,}5 - 0{,}3 \cdot 50 = 8{,}5$ (kg)

c) Lasketaan, kuinka monen vuoden kuluttua kulutus on 10 kg.

$$\begin{aligned} 23{,}5 - 0{,}3n &= 10 \\ -0{,}3n &= -13{,}5 \qquad \| : (-0{,}3) \\ n &= 45 \end{aligned}$$

Mallin mukaan 45. jäsen (vastaa vuotta 2015) on 10, joten mallin mukaan vuonna 2016 kulutus on alle 10 kg.

Vastaus: **a)** $a_n = 23{,}5 - 0{,}3n$ **b)** 20. jäsen, 8,5 kg **c)** vuonna 2016

267. Isopandojen lukumäärän vuosittainen kasvu on kymmenen vuoden muutos jaettuna vuosien määrällä eli

$$\frac{1850-1600}{10}=25.$$

Isopandojen lukumäärä 2000-luvun alusta lukien: 1600, 1625, 1650, ...

Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1600$ ja erotusluku $d = 25$, joten

$$\begin{aligned} a_n &= 1600 + (n-1)\cdot 25 \\ &= 1600 + 25n - 25 \\ &= 25n + 1575 \end{aligned}$$

Vastaus: $a_1 = 1600$, $a_2 = 1625$ ja $a_3 = 1650$; $a_n = 25n + 1575$

268. **a)** 1. viikko 175 € + 15 € = 190 €
2. viikko 175 € + 2 · 15 € = 205 €
3. viikko 175 € + 3 · 15 € = 220 €
4. viikko 175 € + 4 · 15 € = 235 €
5. viikko 175 € + 5 · 15 € = 250 €

b) Lukujonon jäsen saadaan, kun lukuun 175 lisätään järjestysluku kerrottuna luvulla 15.
$a_n = 175 + 15n$

Säästötavoitteen täyttyminen saadaan ratkaistua yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} 175 + 15n &= 650 \\ 15n &= 475 \qquad \| : 15 \\ n &= 31{,}666... \end{aligned}$$

Säästötavoite täyttyy 32 viikon kuluttua.

Vastaus: **a)** 190 €, 205 €, 220 € , 235 €, 250 €.
b) $a_n = 175 + 15n$, viikon 32 kuluttua.

269. Erotusluku d saadaan 3. ja 6. jäsenen avulla. Koska $a_3 = 3$ ja $a_6 = a_3 + 3d = -3$, niin

$$3 + 3d = -3$$
$$3d = -6 \quad \| : 3$$
$$d = -2$$

Toisaalta $a_3 = a_1 + 2d$, joten

$$a_1 + 2 \cdot (-2) = 3$$
$$a_1 - 4 = 3$$
$$a_1 = 7$$

Nyt

$a_n = 7 + (n - 1) \cdot (-2) = 7 - 2n + 2 = 9 - 2n$.

Ratkaistaan, onko luku –100 lukujonon jäsen.

$$9 - 2n = -100$$
$$-2n = -109 \quad \| : (-2)$$
$$n = \frac{-109}{-2} = 54,5$$

n ei ole kokonaisluku, joten se ei voi olla lukujonon jäsenen järjestysluku. Tällöin –100 ei ole lukujonon jäsen.

Ratkaistaan, onko –201 lukujonon jäsen.

$$9 - 2n = -201$$
$$-2n = -210 \quad \| : (-2)$$
$$n = 105$$

Luku –201 on lukujonon 105. jäsen.

Vastaus: $a_n = 9 - 2n$, –100 ei ole lukujonon jäsen, luku –201 on.

270. **a)** Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = \frac{1}{2}$ ja erotusluku

$$d = 1\frac{1}{6} - {}^{3)}\frac{1}{2} = \frac{7}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{2}{3} \\ &= {}^{3)}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}n - {}^{2)}\frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}n + \frac{3}{6} - \frac{4}{6} \\ &= \frac{2}{3}n - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$a_{10} = \frac{2}{3}\cdot 10 - \frac{1}{6} = {}^{2)}\frac{20}{3} - \frac{1}{6} = \frac{40}{6} - \frac{1}{6} = \frac{39}{6} = 6\frac{3}{6} = 6\frac{1}{2}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}n - \frac{1}{6} &= 10 \\ \frac{2}{3}n &= {}^{6)}10 + \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3}n &= \frac{61}{6} \qquad \Big\| : \frac{2}{3} \\ n &= \frac{61}{6} : \frac{2}{3} = \frac{61}{\cancel{6}_{2}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{2} = \frac{61}{4} = 15\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Koska n on 15. ja 16. jäsenen välissä, varmistetaan, kumpi jäsen on lähempänä lukua 10 laskemalla jäsenet.

15. jäsen on $a_{15} = \frac{2}{3}\cdot 15 - \frac{1}{6} = {}^{2)}\frac{30}{3} - \frac{1}{6} = \frac{60}{6} - \frac{1}{6} = \frac{59}{6} = 9\frac{5}{6}$

16. jäsen on $a_{16} = \frac{2}{3}\cdot 16 - \frac{1}{6} = {}^{2)}\frac{32}{3} - \frac{1}{6} = \frac{64}{6} - \frac{1}{6} = \frac{63}{6} = 10\frac{3}{6} = 10\frac{1}{2}$

15. jäsen on lähempänä lukua 10.

Vastaus: **a)** $a_n = \frac{2}{3}n - \frac{1}{6}$, $a_{10} = 6\frac{1}{2}$ **b)** 15. jäsen

271. **a)** $\frac{2}{3}$ cm

b) $a_1 = \frac{2}{3},\ d = \frac{2}{3}$

$$a_n = \frac{2}{3} + (n-1)\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}n$$

c) Soluun A1 kirjoitetaan 30, soluun A2 ”= A1 + 1” ja solua A2 kopioidaan alaspäin.
Soluun B1 kirjoitetaan ”= A1 · 2 / 3” ja kopioidaan solua alaspäin.

	A	B
1	30	20
2	31	20.67
3	32	21.33
4	33	22
5	34	22.67
6	35	23.33
7	36	24
8	37	24.67
9	38	25.33
10	39	26
11	40	26.67
12	41	27.33
13	42	28
14	43	28.67
15	44	29.33
16	45	30
17	46	30.67
18	47	31.33
19	48	32
20	49	32.67
21	50	33.33

Vastaus: **a)** $\frac{2}{3}\ (\text{cm})$ **b)** $a_n = \frac{2}{3}n$
c) sisäpituudet: 20; 20,67; 21,33; 22; 22,67; 23,33; 24; 24,67; 25,33; 26; 26,67; 27,33; 28; 28,67; 29,33; 30; 30,67; 31,33; 32; 32,67; 33,33

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

272. **a)** Kuvion x-koordinaatti on järjestysluku ja y-koordinaatti on järjestyslukua vastaava jäsen. Kuvion pisteistä (1, 4) ja (5, 2) tiedetään, että $a_1 = 4$ ja $a_5 = 2$.

Kun 1. jäseneen lisätään 4 kertaa erotusluku d, saadaan 5. jäsen. Ratkaistaan yhtälön avulla erotusluku d.

$$a_1 + 4d = a_5$$
$$4 + 4d = 2$$
$$4d = -2 \qquad \| : 4$$
$$d = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$a_n = 4 + (n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}n + 4\frac{1}{2}$$

b) Lasketaan, kuinka mones lukujonon jäsen on 0.

$$-\frac{1}{2}n + 4\frac{1}{2} = 0$$
$$-\frac{1}{2}n = -\frac{9}{2} \qquad \| : \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$n = -\frac{9}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{\cancel{2}}\cdot\left(-\frac{\cancel{2}}{1}\right) = 9$$

Koska lukujonossa jäsenen arvo pienenee, kun järjestysluku kasvaa, lukujonon 10. jäsen alittaa nollan.

$$-\frac{1}{2}n + 4\frac{1}{2} = -100$$
$$-\frac{1}{2}n = {}^{2)}-100 - \frac{9}{2}$$
$$-\frac{1}{2}n = -\frac{209}{2} \qquad \| : \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$n = -\frac{209}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{209}{\cancel{2}}\cdot\left(-\frac{\cancel{2}}{1}\right) = 209$$

Lukujonon 210. jäsen alittaa luvun –100.

Vastaus: **a)** $a_n = -\frac{1}{2}n + 4\frac{1}{2}$ **b)** 10. jäsen, 210. jäsen

273. **a)** $a_1 = 2$
$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
$a_3 = 3 \cdot 3 = 9$

Ei ole aritmeettinen jono, koska $6 - 2 = 4$ ja $9 - 6 = 3$.

b) Lukujonon kaksi peräkkäistä jäsentä on a_{n-1} ja a_n. Jäsen a_n voidaan esittää a_{n-1} avulla muodossa $a_n = 3 + a_{n-1}$.

Lukujono on aritmeettinen jono, koska peräkkäisten jäsenten erotus on vakio eli
$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + 3 - a_{n-1} = 3$.

c) $a_1 = 5 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3$
$a_2 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$
$a_3 = 5 - 2 \cdot 3 = 5 - 6 = -1$

Lukujonon jäsen saadaan, kun edellisestä jäsenestä vähennetään luku 2, joten sääntö rekursiivisessa muodossa on
$a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1} - 2$, $n = 2, 3, 4, ...$

Vastaus: **a)** Ei ole. **b)** On. **c)** $a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1} - 2$, $n = 2, 3, 4,...$

274. Ensimmäinen lukujono näyttää aritmeettiselta, koska peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Koska ei tiedetä sääntöä, ei voida varmasti tietää, mikä on lukujonon 5. jäsen.

Lukujonon (a_n) kahden peräkkäisen jäsenen erotus on
$a_{n+1} - a_n$
$= (1 + 2(n + 1)) - (1 + 2n)$
$= 1 + 2n + 2 - 1 - 2n$
$= 2$

Erotus on vakio kaikilla n:n arvoilla, joten jono on aritmeettinen.

275. **a)** *Bulgarian väkiluku*

Erotusluku saadaan, kun 20 vuoden väkiluvun muutos jaetaan vuosien määrällä.

$$d = \frac{7{,}4 - 8{,}7}{20} = -0{,}065$$

Lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 on vuoden 2011 väkiluku eli $a_1 = 7{,}4 - 0{,}065 = 7{,}335$.

$$\begin{aligned} a_n &= 7{,}335 + (n-1) \cdot (-0{,}065) \\ &= 7{,}335 - 0{,}065n + 0{,}065 \\ &= 7{,}4 - 0{,}065n \end{aligned}$$

Suomen väkiluku

Erotusluku saadaan, kun 20 vuoden väkiluvun muutos jaetaan vuosien määrällä

$$d = \frac{5{,}4 - 5{,}0}{20} = 0{,}02$$

Lukujonon ensimmäinen jäsen b_1 on vuoden 2011 väkiluku eli $b_1 = 5{,}4 + 0{,}02 = 5{,}42$.

$$\begin{aligned} b_n &= 5{,}42 + (n-1) \cdot 0{,}02 \\ &= 5{,}42 + 0{,}02n - 0{,}02 \\ &= 5{,}4 + 0{,}02n \end{aligned}$$

Käytetään saatuja lukujonojen sääntöjä taulukon tekemiseen.
Kirjoitetaan soluun A1 ”2010” ja soluun A2 ”=A1+1” ja kopioidaan tätä solua alaspäin.
Soluun B1 kirjoitetaan ”7.4” ja soluun B2 ”=B1–0.065” ja kopioidaan tätä solua alaspäin.
Soluun C1 kirjoitetaan ”5.4” ja soluun C2 ”=C1+0.02” ja kopioidaan tätä solua alaspäin.

A	B	C
2010	7.4	5.4
2011	7.34	5.42
2012	7.27	5.44
2013	7.21	5.46
2014	7.14	5.48
2015	7.08	5.5
2016	7.01	5.52
2017	6.95	5.54
2018	6.88	5.56
2019	6.82	5.58
2020	6.75	5.6
2021	6.69	5.62
2022	6.62	5.64
2023	6.56	5.66
2024	6.49	5.68
2025	6.43	5.7
2026	6.36	5.72
2027	6.3	5.74
2028	6.23	5.76
2029	6.17	5.78
2030	6.1	5.8
2031	6.03	5.82
2032	5.97	5.84
2033	5.9	5.86
2034	5.84	5.88
2035	5.77	5.9
2036	5.71	5.92
2037	5.64	5.94
2038	5.58	5.96
2039	5.51	5.98

Havainnollistuksen perusteella Suomen väkiluku ylittää Bulgarian väkiluvun vuonna 2034, jolloin Bulgarian väkiluku on 5,84 miljoonaa ja Suomen 5,88 miljoonaa.

b) Maiden väkiluvut ovat yhtä suuret, kun $a_n = b_n$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$7{,}4 - 0{,}065n = 5{,}4 + 0{,}02n$$
$$-0{,}065n - 0{,}02n = 5{,}4 - 7{,}4$$
$$-0{,}085n = -2 \quad || : (-0{,}085)$$
$$n = 23{,}52...$$

Koska n on vuosia vuosiluvusta 2010 lähtien, väkiluvut ovat yhtä suuret vuonna 2034.

Vastaus: **a)** Vuonna 2034. Bulgarian asukasluku on 5,84 milj. ja Suomen 5,88 milj.
b) Bulgarian väkiluku $a_n = 7{,}4 - 0{,}065n$, Suomen $b_n = 5{,}4 + 0{,}02n$.
Vuonna 2034

276. **a)** $a_1 = 115$ ja $d = 117 - 115 = 2$
$a_n = 115 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 113$

$b_1 = 2$ ja $d = 5 - 2 = 3$
$b_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 1$

Jos lukujonoilla on sama luku samalla järjestysluvulla, yhtälöllä $a_n = b_n$ on kokonaislukuratkaisu. Ratkaistaan yhtälö $a_n = b_n$.

$$\begin{aligned} 2n + 113 &= 3n - 1 \\ -n &= -114 \\ n &= 114 \end{aligned}$$

Lukujonoilla on yhtä suuri 114. jäsen.
$a_{114} = 2 \cdot 114 + 113 = 341$ ja $b_{114} = 3 \cdot 114 - 1 = 341$

b) Ensimmäinen yhteinen jäsen löytyy, kun lukujonon (b_n) jäsenet ovat suurempia tai yhtä suuri kuin lukujonon (a_n) ensimmäinen jäsen. Ratkaistaan, kuinka monennes lukujonon (b_n) jäsen on 115.

$$\begin{aligned} 3n - 1 &= 115 \\ 3n &= 116 \qquad \| : 3 \\ n &= \frac{116}{3} \approx 38{,}7 \end{aligned}$$

Lukujonon (b_n) jäsenet ovat suurempia kuin 115 lähtien jäsenestä 39. Lasketaan lukujonon (b_n) jäseniä alkaen 39. jäsenestä
$b_{39} = 3 \cdot 39 - 1 = 116$
$b_{40} = 3 \cdot 40 - 1 = 119$

Ensimmäinen yhteinen jäsen on 119. Koska lukujonon (a_n) jäseniin lisätään aina luku 2 ja lukujonon (b_n) jäseniin lisätään aina luku 3, joka kuudes jäsen on yhteinen. Yhteiset jäsenet ovat siis
119, 125, 131, 137, ...

$a_n = 119 + (n - 1) \cdot 6 = 113 + 6n$

Vastaus: **a)** On. Molempien 114. jäsen on 341.
b) 119, 125, 131, 137, ..., $a_n = 113 + 6n$.

277. *Siniset neliöt*

$a_1 = 8 = 1 + 1 + 3 + 3 = 1^2 + 1^2 + 1 \cdot (1 + 2) + 1 \cdot (1 + 2)$
$a_2 = 24 = 4 + 4 + 8 + 8 = 2^2 + 2^2 + 2 \cdot (2 + 2) + 2 \cdot (2 + 2)$
$a_3 = 48 = 3^2 + 3^2 + 3 \cdot (3 + 2) + 3 \cdot (3 + 2)$

Tarkastelemalla jokaisen nurkan sinisten neliöiden lukumäärän kasvua saadaan

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 + n^2 + n \cdot (n + 2) + n \cdot (n + 2) \\ &= 2n^2 + 2n(n + 2) \\ &= 2(n^2 + n(n + 2)) \\ &= 2(n^2 + n^2 + 2n) \\ &= 2(2n^2 + 2n) \\ &= 4n^2 + 4n \end{aligned}$$

Ei ole aritmeettinen jono, koska jäsenten erotus ei ole vakio.

$a_2 - a_1 = 24 - 8 = 16$
$a_3 - a_2 = 48 - 24 = 24$

Valkoiset neliöt

$b_1 = 7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 3$
$b_2 = 11 = 1 + 2 + 2 + 2 + 4$
$b_3 = 15 = 1 + 3 + 3 + 3 + 5$

Valkoisia neliötä on keskimmäinen neliö, kolmessa sakarassa on järjestysluvun verran neliöitä ja yhdessä sakarassa on järjestyslukuun lisättynä 2 neliötä.

$b_n = 1 + n + n + n + (n + 2) = 4n + 3$

Lukujono on aritmeettinen, koska valkoisten neliöiden määrä kasvaa aina neljällä.

Vastaus: Sinisten neliöiden lukumäärä saadaan esim. $a_n = 4n^2 + 4$ ja valkoisten neliöiden lukumäärä saadaan esim. $b_n = 4n + 3$. Jono (b_n) on aritmeettinen lukujono.

278. **a)** Valitaan aritmeettiseksi jonoksi esimerkiksi 5, 8, 11, 14, 17, 20, ..., jolloin lukujonon seuraava jäsen saadaan aina lisäämällä edelliseen jäseneen luku 3.

$$\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{5+11}{2}=8=a_2$$
$$\frac{a_2+a_4}{2}=\frac{8+14}{2}=11=a_3$$
$$\frac{a_3+a_5}{2}=\frac{11+17}{2}=14=a_4$$
$$\frac{a_4+a_6}{2}=\frac{14+20}{2}=17=a_5$$

Kolmen peräkkäisen aritmeettisen jonon jäsenen keskimmäinen jäsen näyttäisi olevan laitimmaisten aritmeettinen keskiarvo.

b) Valitaan aritmeettiseksi jonoksi 0, –1, –2, –3, –4, ..., jolloin lukujonon seuraava jäsen saadaan aina lisäämällä edelliseen jäseneen luku –1.

$$\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{0-2}{2}=-1=a_2$$
$$\frac{a_2+a_4}{2}=\frac{-1-3}{2}=-2=a_3$$
$$\frac{a_3+a_5}{2}=\frac{-2-4}{2}=-3=a_4$$

c) Olkoon a_n, a_{n+1} ja a_{n+2} aritmeettisen lukujonon kolme peräkkäistä jäsentä. Nyt

$$\begin{aligned}a_n &= a_1+(n-1)d\\ &= a_1+nd-d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_1+((n+1)-1)d\\ &= a_1+nd\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{n+2} &= a_1+((n+2-1)d\\ &= a_1+(n+1)d\\ &= a_1+nd+d\end{aligned}$$

Toisesta jäsenestä lähtien edellisen ja seuraavan jäsenen keskiarvo on

$$\begin{aligned}&\frac{a_{n+2}+a_n}{2}\\&=\frac{a_1+nd+d+a_1+nd-d}{2}\\&=\frac{2a_1+2nd}{2}\\&=\frac{2(a_1+dn)}{2}\\&=a_1+n\cdot d\\&=a_{n+1}\end{aligned}$$

a-kohdan havainto pitää paikkansa kaikille aritmeettisille jonoille, eli jokainen aritmeettisen jonon jäsen toisesta jäsenestä alkaen on edellisen ja seuraavan jäsenen aritmeettinen keskiarvo.

Vastaus: **a)** esim. 5, 8, 11, 14, 17, 20, ... Keskiarvot 8, 11, ...

LUVUN 2 PÄÄTÖSSIVUN TEHTÄVÄT

1. **a)** Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 100$.
Toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsenet saadaan mallin avulla. Koska hanhien lukumäärä on aina kokonaisluku, säännöstä saatu tulos pyöristetään alaspäin.

$$a_2 = 100 + 0{,}07 \cdot \frac{500-100}{500} \cdot 100 = 105{,}6 \approx 105$$

$$a_3 = 105 + 0{,}07 \cdot \frac{500-105}{500} \cdot 105 = 110{,}8... \approx 110$$

$$a_4 = 110 + 0{,}07 \cdot \frac{500-110}{500} \cdot 110 = 116{,}0... \approx 116$$

$$a_5 = 116 + 0{,}07 \cdot \frac{500-116}{500} \cdot 116 = 122{,}2... \approx 122$$

b) Soluun A1 kirjoitetaan luku 100.
Taulukkolaskennassa alaspäin kokonaislukuun pyöristämiseen käytetään floor-komentoa, joten soluun A2 kirjoitetaan "= floor(A1+0.07·(500–A1)/500·A1)" ja kopioidaan tätä solua alaspäin.

	A
1	100
2	105
3	110
4	116
5	122
6	128
7	134
8	140
9	147
10	154
11	161
12	168
13	175
14	182
15	190
16	198
17	206
18	214
19	222
20	230

c) Jos hanhien lukumäärä on alle 500 yksilöä, mallissa kohta $\frac{500-a_{n-1}}{500}$ on positiivinen luku. Tällöin myös tulo $0,7\cdot\frac{500-a_{n-1}}{500}a_{n-1}$ on positiivinen, joten seuraavan vuoden hanhien lukumäärä saadaan, kun kuluvan vuoden hanhien lukumäärään lisätään positiivinen luku. Seuraavana vuonna hanhia on siis enemmän.

Vastaus: **a)** 100, 105, 110, 116 ja 122
b) Vastaus: 100, 105, 110, 116, 122, 128, 134, 140, 147, 154, 161, 168, 175, 182, 190, 198, 206, 214, 222 ja 230

2. **a)** Kun alussa hanhien lukumäärä on suurempi kuin 500 yksilöä, populaation koko vähenee.

b) Rekursiokaavan osa $0{,}07 \cdot \frac{500 - a_{n-1}}{500} a_{n-1} = 0{,}07 \cdot (500 - a_{n-1}) \cdot \frac{a_{n-1}}{500}$, kertoo, minkä verran populaation koko muuttuu.

Jos populaation koko a_{n-1} on lähellä lukua 500, erotus $500 - a_{n-1}$ ja luku $\frac{a_{n-1}}{500}$ ovat pieniä. Näin ollen populaation muutoksen kertova luku on pieni.

Jos populaation koko on reilusti alle 500, mutta enemmän kuin vain muutama yksilö, erotus $500 - a_{n-1}$ on suuri. Vaikka luku $\frac{a_{n-1}}{500}$ on alle yhden, lukujen tulo on selvästi positiivinen.

Jos populaation koko on reilusti yli 500, niin erotus $500 - a_{n-1}$ on negatiivien luku ja luku $\frac{a_{n-1}}{500}$ on yli yhden. Populaation koko vähenee selvästi.

Vastaus: **a)** Se vähenee.
b) Hanhien lukumäärä muuttuu nopeasti, kun niiden lukumäärä on kaukana luvusta 500. Lukumäärä muuttuu hitaasti, kun lukumäärä on lähellä lukua 500.