KOKOAVIA TEHTÄVIÄ

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **A** Luku x kasvaa 3 %, jolloin se on 100 % + 3 % = 103 % alkuperäisestä luvusta x. Tätä vastaa lauseke $1{,}03x$. Siis A–II.

B Luku x pienenee 3 %, jolloin se on 100 % – 3 % = 97 % alkuperäisestä luvusta x. Tätä vastaa lauseke $0{,}97x$. Siis B–III.

C Koska 3 % on desimaalilukuna 0,03, niin 3 % luvusta x merkitään lausekkeena $0{,}03x$. Siis C–IV.

D Luku x kasvaa 97 %, jolloin se on 100 % + 97 % = 197 % alkuperäisestä luvusta x. Tätä vastaa lauseke $1{,}97x$. Siis D–I.

Vastaus: A–II, B–III, C–IV ja D–I

2. **a)** Sijoitetaan yleisen jäsenen lausekkeeseen n:n paikalle luku 3:

$$a_3 = \frac{6^3}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}} \cdot 6 \cdot 6}{\underset{1}{\cancel{6}}} = 6 \cdot 6 = 36.$$

b) Jäsenen 6^{17} järjestysluku n toteuttaa yhtälön $\frac{6^n}{6} = 6^{17}$:

$$\begin{aligned} \frac{6^n}{6} &= 6^{17} \quad \| \cdot 6 \\ 6^n &= 6 \cdot 6^{17} \\ 6^n &= 6^{18} \\ n &= 18 \end{aligned}$$

Lukujonon 18. jäsen on luku 6^{17}.

Vastaus: **a)** $a_3 = 36$ **b)** 18. jäsen

3. Ensimmäisten viikkojen valmistusmäärät ovat 15, 15 + 3 = 18, 18 + 3 = 21, 21 + 3 = 24, …

Valmistusmäärät muodostavat aritmeettisen lukujonon 15, 18, 21, 24, …, jossa erotusluku $d = 18 - 15 = 3$.

Muodostetaan aritmeettisen lukujonon yleisen jäsenen a_n lauseke kaavan $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ sekä tietojen $a_1 = 15$ ja $d = 3$ avulla:
$a_n = 15 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 12$.

Tuotteita valmistettiin 31. viikolla $3 \cdot 31 + 12 = 93 + 12 = 105$ (kpl), joten 31 ensimmäisen viikon aikana valmistettujen tuotteiden lukumäärä saadaan aritmeettisena summana 15 + 18 + 21 + … + 105.

Summan ensimmäinen yhteenlaskettava on 15, viimeinen yhteenlaskettava 105 ja yhteenlaskettavien lukumäärä 31:

$$S_{31} = 31 \cdot \frac{15+105}{2} = 31 \cdot \frac{120}{2} = 31 \cdot 60 = 1860.$$

Vastaus: 1860 tuotetta

4. **a)** Funktion f arvot ovat suurempia kuin funktion g arvot, kun funktion f kuvaaja on ylempänä kuin funktion g kuvaaja. Kuvaajien perusteella funktion f arvot ovat suurempia kuin funktion g arvot, kun $-1 < x < 3$.

b) Lukujono $a_n = -n^2 + 3n + 5$ on määritelty positiivisilla kokonaislukuarvoilla n. Funktion f kuvaajalla on lukujonoa (a_n) vastaavat pisteet (1, 7), (2, 7), (3, 5) ja (4, 1).

Lukujono $b_n = n + 2$ on määritelty myös positiivisilla kokonaislukuarvoilla n. Funktion g kuvaajalla on lukujonoa (b_n) vastaavat pisteet (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6) ja (5, 7).

Kuvaajilla on yhteinen piste (3, 5), joten kummankin lukujonon 3. jäsen on 5. Lukujonoissa (a_n) ja (b_n) on siis 3. jäsen sama.

Vastaus: **a)** $-1 < x < 3$ **b)** 3. jäsen

5. **a)**

$$4^x = 9$$
$$x = \log_4 9$$

b)

$$27 - 5^x = 0$$
$$27 = 5^x$$
$$5^x = 27$$
$$x = \log_5 27$$

c)

$$3^x = 2^3$$
$$3^x = 8$$
$$x = \log_3 8$$

Vastaus: **a)** $x = \log_4 9$ **b)** $x = \log_5 27$ **c)** $x = \log_3 8$

6. Merkitään annettua lukua kirjaimella x.

a) Kun luku x kerrotaan kolmella, saadaan lauseke $3x$. Kun tuloon $3x$ lisätään luku 5, saadaan kysytty lauseke $3x + 5$.

Funktio f on siis $f(x) = 3x + 5$ ja $f(-1) = 3 \cdot (-1) + 5 = -3 + 5 = 2$.

b) Kun luvusta x vähennetään 4, saadaan lauseke $x - 4$. Kun erotus $x - 4$ kerrotaan luvulla 6, saadaan kysytty lauseke $6(x - 4) = 6x - 24$.

Funktio f on siis $f(x) = 6x - 24$ ja $f(-1) = 6 \cdot (-1) - 24 = -6 - 24 = -30$.

Vastaus: **a)** $f(x) = 3x + 5$, $f(-1) = 2$ **b)** $f(x) = 6x - 24$, $f(-1) = -30$

7. Asukasluku on kasvanut vuoden aikana 5050 – 5000 = 50. Kasvu on prosentteina $\frac{50}{5000}=0,01=1\ \%.$ Asukasluku on vuoden lopussa 1 % enemmän kuin vuoden alussa eli 101 % vuoden alun asukasluvusta. Vuoden lopussa oleva asukasluku saadaan kertomalla vuoden alun asukasluku kertoimella 1,01.

Ensimmäisen vuoden lopussa asukaslukua kuvaa lauseke $1{,}01 \cdot 5000$. Toisen vuoden aikana ensimmäisen vuoden lopun asukasluku $1{,}01 \cdot 5000$ kasvaa taas 1,01-kertaiseksi eli asukasluku toisen vuoden lopussa on $1{,}01^2 \cdot 5000$.

Kolmannen vuoden aikana toisen vuoden lopun asukasluku $1{,}01^2 \cdot 5000$ kasvaa taas 1,01-kertaiseksi eli asukasluku kolmannen vuoden lopussa on $1{,}01^3 \cdot 5000$.

Samalla tavalla asukasluku n vuoden kuluttua on $1{,}01^n \cdot 5000$.

Vastaus: $1{,}01^n \cdot 5000$

8. Taulukoidaan lukujonon jäseniä ja päätellään lukujonon yleinen jäsen.

1. jäsen	$1 \cdot 3 = 3$
2. jäsen	$2 \cdot 4 = 8$
3. jäsen	$3 \cdot 5 = 15$
4. jäsen	$4 \cdot 6 = 24$

Lukujonon jäsen saadaan tulosta, jossa ensimmäinen tekijä on lukujonon jäsenen järjestysluku n. Toinen tulon tekijä on ensimmäistä tekijää n kaksi suurempi $n + 2$, joten lukujonon yleinen jäsen a_n saadaan lausekkeesta $n(n + 2) = n^2 + 2n$.

Vastaus: $a_n = n(n + 2) = n^2 + 2n$

9. **a)** Suorakulmion A_1 pinta-ala saadaan kannan ja korkeuden tulona, joten $A_1 = f(x) = (x + 5)x = x^2 + 5x$.

b) Suorakulmion A_2 pinta-ala saadaan kannan ja korkeuden tulona, joten $A_2 = g(x) = (x + 3)x = x^2 + 3x$.

c) Lasketaan suorakulmioiden A_1 ja A_2 pinta-aloja pituuden x eri arvoilla:

x	$A_1 = f(x) = x^2 + 5x$	$A_2 = g(x) = x^2 + 3x$
1	$1^2 + 5 \cdot 1 = 6$	$1^2 + 3 \cdot 1 = 4$
2	$2^2 + 5 \cdot 2 = 14$	$2^2 + 3 \cdot 2 = 10$
3	$3^2 + 5 \cdot 3 = 24$	$3^2 + 3 \cdot 3 = 18$
4	$4^2 + 5 \cdot 4 = 36$	$4^2 + 3 \cdot 4 = 28$
5	$5^2 + 5 \cdot 5 = 50$	$5^2 + 3 \cdot 5 = 40$

Sivun pituuden x arvolla 5 pinta-alojen A_1 ja A_2 erotus on 10.

Koska pinta-ala A_1 on suurempi, niin muodostetaan ehdosta yhtälö $A_1 - A_2 = 10$ ja tarkistetaan laskemalla saatu tulos:

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 &= 10 \\ x^2 + 5x - (x^2 + 3x) &= 10 \\ x^2 + 5x - x^2 - 3x &= 10 \\ 2x &= 10 \qquad \| :2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vastaus: **a)** $f(x) = x^2 + 5x$ **b)** $g(x) = x^2 + 4x + 3$ **c)** $x = 5$

10. Koska n on pariton kokonaisluku, on $n - 1$ parillinen luku. Kirjoitetaan summa $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \ldots + (n - 2) - (n - 1) + n$ kahden peräkkäisen luvun summien avulla viimeistä yhteenlaskettavaa n lukuun ottamatta:

$$\underbrace{1-2}_{=-1}+\underbrace{3-4}_{=-1}+\underbrace{5-6}_{=-1}+\ldots+\underbrace{(n-2)-(n-1)}_{=-1}+n.$$

Kahden peräkkäisen luvun summia -1 on yhteensä $\frac{n-1}{2}$ kappaletta, joten niiden summa saadaan tulosta $\frac{n-1}{2}\cdot(-1)=\frac{-n+1}{2}$. Kun saatuun tulokseen $\frac{-n+1}{2}$ lisätään viimeinen yhteenlaskettava n, saadaan lauseke kysytylle summalle $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \ldots + (n - 2) - (n - 1) + n$:

$$\frac{-n+1}{2}+n=\frac{-n+1}{2}+{}^{2)}\frac{n}{1}=\frac{-n+1+2n}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

Vastaus: $\frac{n+1}{2}$

APUVÄLINEET SALLITTU

11. **a)** Paidasta annettiin 20 % alennusta, jolloin paidan alkuperäisestä hinnasta jäi maksettavaksi 100 % – 20 % = 80 %, joka on prosenttikertoimena 0,80.

Paidan hinta 20 %:n alennuksessa saadaan kertomalla paidan alkuperäinen hinta 42 € kertoimella 0,80:
$0{,}80 \cdot 42\ € = 33{,}60\ €$.

b) Merkitään laukun alentamatonta hintaa kirjaimella x. Koska alennusprosentti oli 30, maksettiin laukusta alennusmyynnissä 100 % – 30 % = 70 % sen alentamattomasta hinnasta. Prosenttilukua 70 % vastaa prosenttikerroin 0,70, joten tehtävän tiedoista saadaan yhtälö $0{,}70 \cdot x = 35$.

Yhtälön ratkaisuna saadaan laukun alentamaton hinta:

$$0{,}70x = 35 \quad \| : 0{,}70$$

$$x = \frac{35}{0{,}70}$$

$$x = 50$$

Laukun alentamaton hinta oli 50 €.

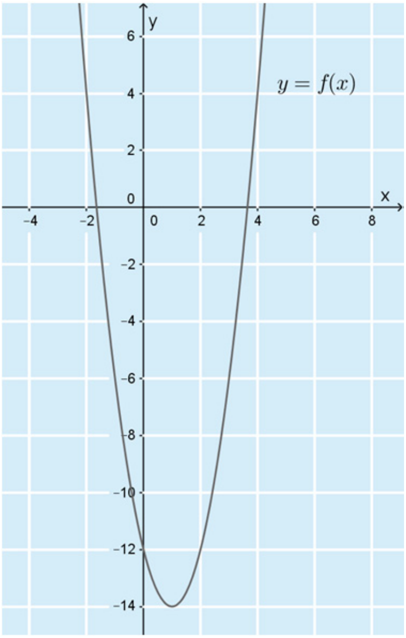
c) Merkitään osakkeiden arvoa ensimmäisen vuoden alun tilanteessa kirjaimella x. Osakkeiden arvo nousi 1. vuoden aikana 7 %, joten arvo 1. vuoden lopussa oli 107 % vuoden alun arvosta. Vuoden lopun arvoa kuvaa lauseke $1{,}07 \cdot x$.

Koska osakkeiden arvo nousi toisen vuoden aikana 10 %, oli osakkeiden arvo 2. vuoden lopussa 110 % ensimmäisen vuoden lopun osakkeiden arvosta $1{,}07x$. Toisen vuoden lopun osakkeiden arvoa kuvaa lauseke $1{,}10 \cdot 1{,}07x = 1{,}177x$.

Toisen vuoden lopussa osakkeiden arvo oli $1{,}177x$, joten kahden vuoden jälkeen osakkeiden arvo oli $\frac{1{,}177\,\cancel{x}^{1}}{\cancel{x}_{1}} = 1{,}177 = 117{,}7\ \%$ ensimmäisen vuoden alun osakkeiden arvosta. Osakkeiden arvo nousi kahden ensimmäisen vuoden aikana 117,7 % – 100 % = 17,7 %.

Vastaus: **a)** 33,60 € **b)** 50 € **c)** 17,7 %

12.



Funktion arvo on kuvaajalla olevan pisteen y-koordinaatti.

a) Funktion f arvot ovat suurempia kuin 4, kun käyrän pisteiden y-koordinaatit ovat suurempia kuin 4. Kuvaajan perusteella funktion f arvot ovat suurempia kuin 4, kun $x < -2$ tai $x > 4$.

b) Funktion f arvot ovat pienempiä kuin –6, kun $-1 < x < 3$.

Vastaus: **a)** $x < -2$ tai $x > 4$ **b)** $-1 < x < 3$

13. **a)** Sijoitetaan lukujonon jäsenen lausekkeeseen $n^3 - 7n$ muuttujan n paikalle luku 25, jolloin $a_{25} = 25^3 - 7 \cdot 25 = 15\,450$.

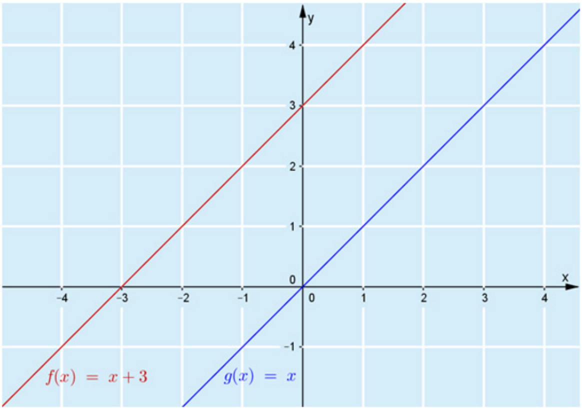
b) Lukujono on rekursiivinen, joten lukujonon 25. jäsentä ei voi laskea ennen kuin edeltävät jäsenet on laskettu. Lasketaan lukujonon jäsenet taulukkolaskentaohjelman avulla:

	A	B
1	1	3
2	2	5
3	3	9
4	4	17
5	5	33
6	6	65
7	7	129
8	8	257
9	9	513
10	10	1025
11	11	2049
12	12	4097
13	13	8193
14	14	16385
15	15	32769
16	16	65537
17	17	131073
18	18	262145
19	19	524289
20	20	1048577
21	21	2097153
22	22	4194305
23	23	8388609
24	24	16777217
25	25	33554433

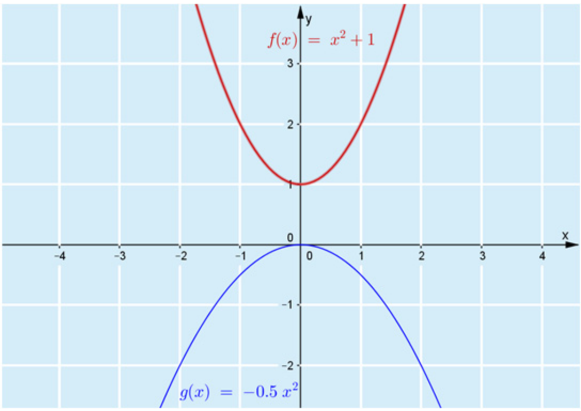
Lukujonon 25. jäsen on 33 554 433.

Vastaus: **a)** $a_{25} = 15\,450$ **b)** $a_{25} = 33\,554\,433$

14. **a)** esim.



b) esim.



15. Jos lukujono olisi aritmeettinen, niin lukujono muodostuisi seuraavasti:

$$a_1 \overset{+d}{\frown} \mathbf{5} \overset{+d}{\frown} a_3 \overset{+d}{\frown} \mathbf{8} \overset{+d}{\frown} a_5 \overset{+d}{\frown} a_6 \overset{+d}{\frown} a_7 \overset{+d}{\frown} a_8 \overset{+d}{\frown} a_9 \overset{+d}{\frown} a_{10} \overset{+d}{\frown} a_{11} \overset{+d}{\frown} \mathbf{21} \quad \ldots$$

Tällöin lukujonon 2. ja 4. jäsenen perusteella saadaan ratkaistua erotusluku d:

$2d = 8 - 5 = 3$, josta $d = \frac{3}{2}$.

Vastaavasti lukujonon 2. ja 12. jäsenen osalta $10d = 21 - 5 = 16$, josta $d = \frac{8}{5}$.

Koska lukujonon jäsenten $a_2 = 5$, $a_4 = 8$ ja $a_{12} = 21$ välillä erotusluku d ei ole sama vakio, jäsenet $a_2 = 5$, $a_4 = 8$ ja $a_{12} = 21$ sisältävä lukujono ei voi olla aritmeettinen.

Vastaus: Ei voi olla.

16. Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 80$ ja suhdeluku $q = 0{,}5$, joten 20 ensimmäisen jäsenen summa on

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{80(1-0{,}5^{20})}{1-0{,}5} \\ &= 159{,}9... \\ &\approx 160. \end{aligned}$$

Vastaus: $S_{20} \approx 160$

17. Yrityksen myynnit kasvavat 3 % jokaisen kuukauden aikana, joten myynnit muodostavat geometrisen lukujonon
$23000,\ 1{,}03 \cdot 23000,\ 1{,}03^2 \cdot 23000,\ \ldots,$
jossa $a_1 = 23000$ ja $q = 1{,}03$.

Vuoden myynti saadaan geometrisen summan kaavan avulla.
Nyt ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 23000$, suhdeluku $q = 1{,}03$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 12$:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{23000(1-1{,}03^{12})}{1-1{,}03} \\ &= 326416{,}7\ldots \\ &\approx 330000. \end{aligned}$$

Vastaus: n. 330 000 €

18. **a)**

$$\begin{aligned} 1{,}7 \cdot 8^x &= 362 \quad \|:1{,}7 \\ 8^x &= \frac{362}{1{,}7} \\ x &= \log_8 \frac{362}{1{,}7} \\ x &= 2{,}578\ldots \\ x &\approx 2{,}58 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 5^4 \cdot 5^x &= 1700 \quad \|:5^4 \\ 5^x &= \frac{1700}{5^4} \\ 5^x &= 2{,}72 \\ x &= \log_5 2{,}72 \\ x &= 0{,}621\ldots \\ x &\approx 0{,}62 \end{aligned}$$

c)

$$7^x = 75 \cdot 2^x \quad || : 2^x$$

$$\frac{7^x}{2^x} = 75$$

$$(\frac{7}{2})^x = 75$$

$$3,5^x = 75$$

$$x = \log_{3,5} 75$$

$$x = 3,446...$$

$$x \approx 3,45$$

Vastaus: **a)** $x \approx 2,58$ **b)** $x \approx 0,62$ **c)** $x \approx 3,45$

19. **a)** Esimerkiksi soluun B2 kirjoitetaan kaava ”=1,012*500”. Soluun B3 kirjoitetaan kaava ”=1,012*B2”. Sarakkeen B jokaisen solun kaava saadaan saman mallin mukaan. Sarakkeen C solusta C3 alkaen kaavat ovat samat kuin sarakkeessa B. Sama toistuu kaikkien sarakkeiden C–K osalta.

Sarakkeeseen L kirjoitetaan summa kaavalla, joka on esimerkiksi solussa L2 ”=SUMMA(B2:K2)”. Viimeisen rivin solussa L11 on kaikkien talletusten arvo 10. vuoden lopussa. Summa saadaan kaavalla ”=SUMMA(B11:K11)”.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		1. talletus	2. talletus	3. talletus	4. talletus	5. talletus	6. talletus	7. talletus	8. talletus	9. talletus	10. talletus	**Yhteensä**
2	1. vuoden lopussa	506,00 €										506,00 €
3	2. vuoden lopussa	512,07 €	506,00 €									1 018,07 €
4	3. vuoden lopussa	518,22 €	512,07 €	506,00 €								1 536,29 €
5	4. vuoden lopussa	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €							2 060,72 €
6	5. vuoden lopussa	530,73 €	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €						2 591,45 €
7	6. vuoden lopussa	537,10 €	530,73 €	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €					3 128,55 €
8	7. vuoden lopussa	543,54 €	537,10 €	530,73 €	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €				3 672,09 €
9	8. vuoden lopussa	550,07 €	543,54 €	537,10 €	530,73 €	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €			4 222,16 €
10	9. vuoden lopussa	556,67 €	550,07 €	543,54 €	537,10 €	530,73 €	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €		4 778,82 €
11	10. vuoden lopussa	563,35 €	556,67 €	550,07 €	543,54 €	537,10 €	530,73 €	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €	5 342,17 €

b) $$S_n = \frac{506 \cdot (1-1{,}012^n)}{1-1{,}012} = -\frac{506 \cdot (1-1{,}012^n)}{0{,}012}.$$

Vastaus: **a)** Talletusten arvot 10. vuoden lopussa ovat 563,35 €; 556,67 €; 550,07 €; 543,54 €; 537,10 €; 530,73 €; 524,44 €; 518,22 €; 512,07 € ja 506,00 €. Talletusten arvot yhteensä kunkin vuoden lopussa ovat 506,00 €, 1018,07 €, 1536,29 €, 2060,72 €, 2591,45 €, 3128,55 €, 3672,09 €, 4222,16 €, 4778,82 € ja 5342,17 €.

b) $S_n = -\frac{506 \cdot (1-1{,}012^n)}{0{,}012}$

20. **a)** Aritmeettisessa lukujonossa

$a_4 = a_3 + d$
$a_5 = a_4 + d = a_3 + d + d = a_3 + 2d$
$a_6 = a_3 + 2d + d = a_3 + 3d$
$a_7 = a_3 + 3d + d = a_3 + 4d.$

Koska $a_3 = 8$, $a_7 = 20$ ja $a_7 = a_3 + 4d$, niin tiedoista saadaan yhtälö erotusluvun d ratkaisemiseksi:

$$\begin{aligned} 8 + 4d &= 20 \\ 4d &= 20 - 8 \\ 4d &= 12 \quad \|:4 \\ d &= 3. \end{aligned}$$

Koska $a_3 = a_1 + 2d$, $a_3 = 8$ ja $d = 3$, niin

$$\begin{aligned} 8 &= a_1 + 2 \cdot 3 \\ a_1 &= 8 - 6 \\ a_1 &= 2. \end{aligned}$$

Lukujonon yleinen jäsen saadaan kaavan $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ sekä tietojen $a_1 = 2$ ja $d = 3$ avulla muotoon:
$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 1.$

Kokeilemalla huomataan, että $a_{33} = 3 \cdot 33 - 1 = 99 - 1 = 98$ ja $a_{34} = 3 \cdot 34 - 1 = 102 - 1 = 101$. Pienin kolminumeroinen jäsen on tällä perusteella 101.

b) Lukujonon suurin kolminumeroinen jäsen saadaan kokeilemalla:
$a_{333} = 3 \cdot 333 - 1 = 999 - 1 = 998$
$a_{334} = 3 \cdot 334 - 1 = 1002 - 1 = 1001$.

Lukujonon 333. jäsen on suurin kolminumeroinen jäsen. Tarkasteltavat luvut ovat aritmeettisen lukujonon jäseniä
101, 104, …, 998, …

Koska jäsen 101 on lukujonon 34. jäsen ja 998 on lukujonon 333. jäsen, on yhteenlaskettavia kaiken kaikkiaan 333 – 33 = 300. Summassa 101 + 104 + … + 998 ensimmäinen yhteenlaskettava on 101, viimeinen 998 ja yhteenlaskettavien lukumäärä 300, joten summa on

$$300 \cdot \frac{101+998}{2} = 164\ 850.$$

Vastaus: **a)** 101 **b)** 164 850