

KERTAUS

Lukujono

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K1. Ratkaisussa annetaan esimerkit mahdollisista säännöistä.

a) Jatketaan lukujonoa: $-2, -4, -6, -8, -10, -12, -14, -16, \dots$

Rekursiivinen sääntö on, että lukujonon ensimmäinen jäsen on -2 ja tämän jälkeen seuraava jäsen saadaan vähentämällä edellisestä jäsenestä luku 2 .

Analyttinen sääntö on, että jäsenen järjestysluku kerrotaan luvulla -2 . Toisin sanoen n . jäsen on $-2n$.

b) Jatketaan lukujonoa: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$

Analyttinen sääntö on, että lukujonon jäsen saadaan korottamalla järjestysluku toiseen. Toisin sanoen n . jäsen on n^2 .

c) Jatketaan lukujonoa: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{2}, 2, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{2}, \dots$

Rekursiivinen sääntö on, että lukujonon ensimmäinen jäsen on $\frac{1}{2}$ ja tämän jälkeen seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneseen luku $\frac{1}{4}$.

Analyttinen sääntö on, että lukuun $\frac{1}{4}$ lisätään jäsenen järjestysluku

jaettuna luvulla 4 . Toisin sanoen n . jäsen on $\frac{1}{4} + \frac{n}{4}$.

K2. a) $a_{10} = 3 \cdot 10^2 + 1 = 300 + 1 = 301$.

b) Ratkaistaan milloin $a_n = 100$.

$$7n - 5 = 100$$

$$7n = 105$$

$$n = \frac{105}{7}$$

$$n = 15$$

Luku 100 on lukujonon 15. jäsen.

Vastaus: **a)** $a_{10} = 301$ **b)** 15. jäsen.

K3.



kuvio 1



kuvio 2



kuvio 3

a) Kuvioden laattojen määrä muodostaa lukujonon $5, 5 + 15 = 20, 5 + 15 + 25 = 45, 5 + 15 + 25 + 35 = 80, \dots$, joten neljännessä kuviossa on 80 laattaa

b) Lukujono $5, 20, 45, 80, \dots$ voidaan ilmaista muodossa $5, 5 \cdot 4, 5 \cdot 9, 5 \cdot 16, \dots, 5 \cdot n^2$, missä n on kuvion järjestysnumero, joten $a_n = 5 \cdot n^2$.

Vastaus: **a)** 80

b) $a_n = 5 \cdot n^2$.

- K4.** a) Lukujonon seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäsenen luku 7. Ensimmäinen jäsen on 3 ja yleinen jäsen a_n saadaan lisäämällä ensimmäiseen jäsenen $n - 1$ kertaa luku 7, joten
- $$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 7 = 3 + 7n - 7 = 7n - 4.$$
- b) Rekursiivinen sääntö on a-kohdan perusteella $a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1} + 7$, $n = 2, 3, 4, \dots$

Vastaus: a) $a_n = 7n - 4$ b) $a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1} + 7$, $n = 2, 3, 4, \dots$

- K5.** Jonojen ensimmäiset jäsenet ovat $a_1 = 6 - 2 \cdot 1 = 4$ ja $b_1 = 15$. Lukujonossa (b_n) jäsen saadaan kertomalla edellinen luvulla 1,05. Kerrottaessa luvulla 1,05 luku suurenee. Siten lukujonon jäsen on aina edellistä suurempi. Toisin sanoen jonon pienin jäsen on 15.

Lukujonossa (a_n) puolestaan n . jäsen saadaan vähentämällä luvusta 6 luku $2n$. Mitä suurempi luku n on, sitä suurempi luku vähennetään. Näin ollen lukujonon (a_n) jäsenet pienenevät järjestysluvun kasvaessa. Toisin sanoen jonon suurin jäsen on 4.

Siis lukujonon (a_n) kaikki jäsenet ovat pienempiä kuin lukujonon (b_n) pienin jäsen. Näin ollen lukujonoissa (a_n) ja (b_n) ei ole yhtään samaa lukua.

Aritmeettinen ja geometrinen jono sekä summa

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K6. Tutkitaan onko peräkkäisten jäsenten erotus tai suhde vakio.

$$\text{a) } \begin{aligned} -10 - 5 &= -15 \\ 20 - (-10) &= 30 \end{aligned}$$

Jono ei ole aritmeettinen, sillä peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio.

$$\frac{-10}{5} = -2$$

$$\frac{20}{-10} = -2$$

$$\frac{-40}{20} = -2$$

Jono voi olla geometrinen, sillä annetussa lukujonon alussa peräkkäisten jäsenten suhde on vakio.

$$\text{b) } \begin{aligned} 8 - 15 &= -7 \\ 1 - 8 &= -7 \\ -6 - 1 &= -7 \end{aligned}$$

Jono voi olla aritmeettinen, sillä annetussa lukujonon alussa peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.

$$\frac{8}{15}$$

$$\frac{1}{8}$$

Jono ei ole geometrinen, sillä peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio.

$$\begin{aligned} \text{c) } 4 - 2 &= 2 \\ 8 - 4 &= 4 \end{aligned}$$

Jono ei ole aritmeettinen, sillä peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio.

$$\frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

Jono ei ole myöskään geometrinen, sillä peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio.

Vastaus: **a)** Jono voi olla geometrinen. **b)** Jono voi olla aritmeettinen.
c) Jono ei voi olla aritmeettinen eikä geometrinen.

K7. **a)** Lasketaan aritmeettisen lukujonon erotusluku $d = 18 - 6 = 12$. Tällöin

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= 6 + (n-1) \cdot 12 \\ &= 12n - 6 \end{aligned}$$

b) Lasketaan geometrisen lukujonon suhdeluku $q = \frac{18}{6} = 3$.

$$\text{Tällöin } a_n = a_1 q^{n-1} = 6 \cdot 3^{n-1}.$$

c) Päätellään aritmeettisen lukujonon erotusluku d .

Koska $a_5 - a_1 = 7 - 19 = -12$ ja koska 5. jäsen saadaan lisäämällä 1.

jäsenen erotusluku d neljä kertaa, on $d = \frac{-12}{4} = -3$.

$$\text{Joten } a_n = a_1 + (n-1)d = 19 + (n-1)(-3) = -3n + 22.$$

Vastaus: **a)** $a_n = 12n - 6$ **b)** $a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$ **c)** $a_n = -3n + 22$

K8. a) Jokainen jonon jäsen on $\frac{1}{3}$. Siis kuuden ensimmäisen jäsenen summa on $6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

b) Kyseessä on aritmeettinen lukujono, jossa $a_1 = 3 + 5 \cdot 1 = 8$ ja $a_6 = 3 + 5 \cdot 6 = 33$. Siis 6 ensimmäisen jäsenen summa on

$$S = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 6 \cdot \frac{8 + 33}{2} = 6 \cdot \frac{41}{2} = 123.$$

c) Kyseessä on geometrinen lukujono, jossa $a_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$ ja $q = 2$. Siis 6 ensimmäisen jäsenen summa on

$$S = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{6(1 - 2^6)}{1 - 2} = \frac{6(1 - 64)}{-1} = 378.$$

Vastaus: **a)** 2 **b)** 183 **c)** 378

K9. a) Aritmeettisen lukujonon säännöllä summa $1 + 2 + 3 + \dots + 50$ on

$$S_{50} = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 50 \cdot \frac{1 + 50}{2} = 50 \cdot \frac{51}{2} = 1275.$$

b) Geometrisen lukujonon suhdeluku on $q = \frac{2}{1} = 2$. Viidenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa on

$$\begin{aligned} S_{50} &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \\ &= \frac{1(1 - 2^{50})}{1 - 2} \\ &= \frac{1 - 2^{50}}{-1} \\ &= 2^{50} - 1 \\ &= 1125899906842623 \\ &\approx 1,1 \cdot 10^{15} \end{aligned}$$

Vastaus: **a)** 1275 **b)** $1125899906842623 \approx 1,1 \cdot 10^{15}$

K10.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=5}^{20} (-3k + 4) \\ &= -3 \cdot 5 + 4 + (-3) \cdot 6 + 4 + \dots + (-3) \cdot 20 + 4 \\ &= -11 - 14 - \dots - 56 \end{aligned}$$

Tehtävänannon mukaan kyseessä on aritmeettinen summa, jossa $a_1 = -11$ ja $a_{20} = -56$. Koska numerointi alkaa k :n arvosta 5, on yhteenlaskettavia on $20 - 4 = 16$, joten $n = 16$ ja summa on

$$S_{16} = 16 \cdot \frac{-11 - 56}{2} = -536$$

Vastaus: -536

Prosenttilaskenta

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K11. a) Alennettu hinta oli $100\% - 30\% = 70\% = 0,7$ -kertainen alkuperäiseen verrattuna, joten alennettu hinta oli $0,7 \cdot 120 \text{ €} = 84 \text{ €}$.

b) Alennettu hinta oli $100\% - 40\% = 60\% = 0,6$ -kertainen alkuperäiseen hintaan x verrattuna, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 0,6 \cdot x &= 17,94 & \parallel : 0,6 \\ x &= 29,90 \text{ €} \end{aligned}$$

Vastaus: **a)** 84 € **b)** 29,90 €

K12. a) Ryhmän koko pienenee $11 - 8 = 3$ hengellä. Lasketaan, kuinka monta prosenttia vähennys on alkuperäisestä ryhmäkoosta 11.

$$\frac{3}{11} = 0,2727\dots \approx 27\%$$

b) Prosenttikertoimet

$$\text{Palkannousu } 100\% + 5\% = 105\% = 1,05$$

$$\text{Palkanlasku } 100\% - 2\% = 98\% = 0,98$$

Lopullinen palkka saadaan kertomalla alkuperäinen palkka prosenttikertoimilla

$$1,05 \cdot 0,98 \cdot 2800 \text{ €} = 2881,20 \text{ €}$$

c) Prosenttikertoimet

$$\text{Vuokrannousu } 100\% + 20\% = 120\% = 1,2$$

$$\text{Vuokranlasku } 100\% - 15\% = 85\% = 0,85$$

Lopullinen vuokra saadaan kertomalla alkuperäinen vuokra prosenttikertoimilla. Kerrotaan prosenttikertoimet keskenään ja päätellään vuokran prosentuaalinen muutos.

$$1,2 \cdot 0,85 = 1,02 \text{ eli vuokra nousi } 2\%.$$

Vastaus: **a)** 27 % **b)** 2881,20 € **c)** nousi 2 %

K13. a) Lasketaan vähenemiskerroin $100\% - 5\% = 95\% = 0,95$.

Kymmenennen vuoden lopussa voitto oli vähentynyt 9 kertaa, joten voitto oli 10. vuotena $0,95^9 \cdot 100\,000\text{ €} \approx 63\,025\text{ €}$

b) Kyseessä on geometrinen summa, jossa $a_1 = 100\,000$ ja $q = 0,95$.

$$S_{10} = \frac{100\,000(1 - 0,95^{10})}{1 - 0,95} \approx 802\,526(\text{€})$$

Vastaus: **a)** n. 63 025 €

b) n. 802 526 €

K14. Laaditaan taulukko, jonka 1. sarakkeessa on prosenttikerroin, joka kasvaa aina tuhannesosalla. Toiseen sarakkeeseen kirjoitetaan kaava, jossa viereisen sarakkeen prosenttikerroin korotetaan potenssiin 50 ja se kerrotaan luvulla 1000. Etsitään taulukosta kohta, jossa kasvanut talletus ylittää 2000 €. Ohessa taulukon osa.

5	1.012	1815.623
6	1.013	1907.534
7	1.014	2004
8	1.015	2105.242

Koska $1000 \cdot 1,014^{50} = 2004,00\dots$, on kysytty korko noin 1,40 %.

Vastaus: n. 1,40 %

Eksponttiyhtälö ja logaritmi

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K15. a) $6^x = 36$
 $6^x = 6^2$
 $x = 2$

b) $4^{x-3} = 16$
 $4^{x-3} = 4^2$
 $x - 3 = 2$
 $x = 5$

c) $3 \cdot 2^x = 24$ $\| : 3$
 $2^x = 8$
 $2^x = 2^3$
 $x = 3$

Vastaus: **a)** $x = 2$ **b)** $x = 5$ **c)** $x = 3$

K16. a) $7^x = 70$
 $x = \log_7 70$

b) $2^3 \cdot 1,5^x = 160$ $\| : 2^3$
 $1,5^x = \frac{160}{2^3}$
 $1,5^x = 20$
 $x = \log_{1,5} 20$

c) $\frac{5^x}{2} = 5^2$ $\| \cdot 2$
 $5^x = 50$
 $x = \log_5 50$

Vastaus: **a)** $x = \log_7 70$ **b)** $x = \log_{1,5} 20$ **c)** $x = \log_5 50$

K17. a) $\log_3 9 = 2$, koska $3^2 = 9$

b) $\log_2 8 = 3$, koska $2^3 = 8$

c) $\log_{10} 1000 = 3$, koska $10^3 = 1000$

Vastaus: **a)** 2 **b)** 3 **c)** 3

K18. a) Yhtälöä $x = \log_2 32$ vastaa eksponenttiyhtälö $2^x = 32$. Näin ollen $x = 5$, koska $2^5 = 32$.

b) Yhtälöä $x = \log_4 16$ vastaa eksponenttiyhtälö $4^x = 16$, joten $x = 2$, koska $4^2 = 16$.

c) Yhtälöä $x = \log_9 9$ vastaa eksponenttiyhtälö $9^x = 9$, joten $x = 1$, koska $9^1 = 9$.

Vastaus: **a)** $2^x = 32$, $\log_2 32 = 5$ **b)** $4^x = 16$, $\log_4 16 = 2$

c) $9^x = 9$, $\log_9 9 = 1$

K19. a)

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n - 2^3 \\ 120 &= 2^n - 2^3 \\ 128 &= 2^n \\ 2^7 &= 2^n \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Koska saatiin kokonaislukuvastaus, on luku 120 lukujonon 7. jäsen.

b)

$$\begin{aligned} a_n &= 4 \cdot 3^{n-1} \\ 120 &= 4 \cdot 3^{n-1} & \parallel : 4 \\ 30 &= 3^{n-1} \end{aligned}$$

Luku 30 ei ole luvun 3 kokonaislukupotenssi, joten yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisua eikä siis lukujonossa ole lukua 120.

Vastaus: **a)** on 7. jäsen

b) ei ole jonon jäsen

- K20.** Kävijöiden lukumäärä on
1. viikon jälkeen 1000
2. viikon jälkeen 3000
jne.

Lukumäärät muodostavat geometrisen lukujonon, jossa $a_1 = 1000$ ja $q = 3$.
Ratkaistaan yhtälöstä, milloin lukujonon jäsenen arvo on yli 1 000 000.

$$1000 \cdot 3^{x-1} = 1\,000\,000 \quad || : 1000$$

$$3^{x-1} = 1\,000$$

$$x - 1 = \log_3 1000$$

$$x = \log_3 1000 + 1$$

$$x = 7,287\dots$$

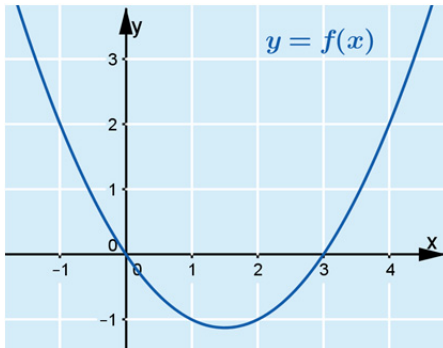
Seitsemän viikkoa ei riitä, joten 8 viikon kuluttua vierailijoita on käynyt yli 1000 000 ihmistä.

Vastaus: 8 viikon kuluttua

Funktio

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K21.



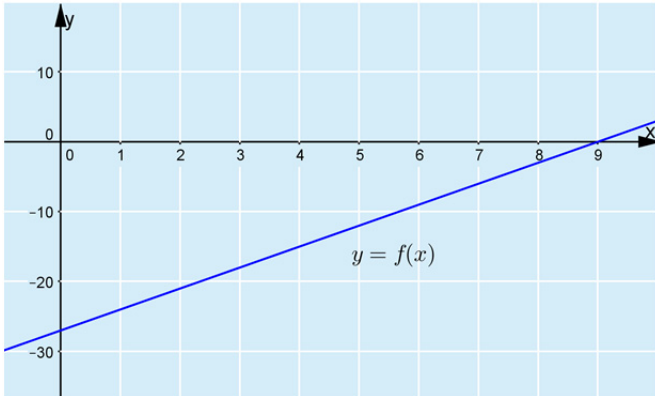
Kuvaajan perusteella

- a) $f(2) \approx -1$
- b) Funktio f saa arvon 2, kohdissa $x \approx -1$ ja $x \approx 4$
- c) Funktion f nollakohdat ovat $x \approx 0$ ja $x \approx 3$

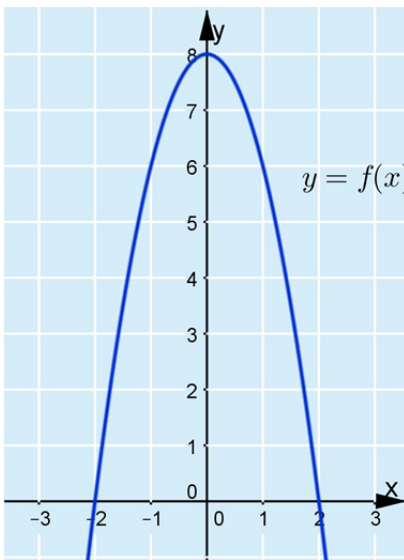
Vastaus: **a)** -1 **b)** $x \approx -1$ ja $x \approx 4$ **c)** $x \approx 0$ ja $x \approx 3$

K22. Funktion f kuvaajan perusteella

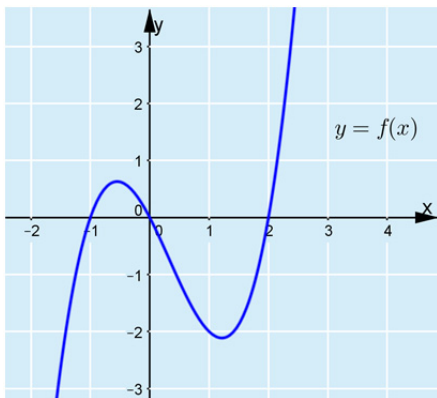
- a) $f(x) = 3x - 27 < 0$ eli funktio saa negatiivisia arvoja, kun y -koordinaatit ovat pienempiä kuin nolla eli, kun $x < 9$.



- b) $f(x) = -2x^2 + 8 < 0$, eli funktio saa negatiivisia arvoja, kun y -koordinaatit ovat pienempiä kuin nolla eli, kun $x < -2$ tai $x > 2$.



- c) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x < 0$ eli funktio saa negatiivisia arvoja, kun y -koordinaatit ovat pienempiä kuin nolla eli, kun $x < -1$ tai $0 < x < 2$.



Vastaus: a) $x < 9$ b) $x < -2$ tai $x > 2$ c) $x < -1$ tai $0 < x < 2$

K23. A) $f(3) = 2$, kuvaaja III, koska kuvaaja kulkee pisteen $(3, 2)$ kautta.

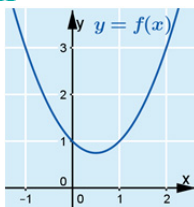
B) $f(x) = x + 1$, taulukko I, koska taulukon funktion f arvot saadaan lausekkeesta $x + 1$.

C) $f(x) = x^2 - x + 1$, kuvaaja II, koska esim. kuvaajan pisteet $(-1, 3)$ ja $(0, 1)$ sekä $(2, 3)$ vastaavat funktion arvoja ja toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on paraabeli.

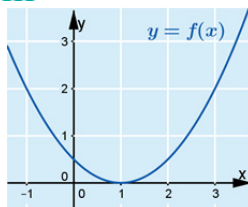
I

x	$f(x)$
-3	-2
-2	-1
-1	0
1	2
2	3
3	4

II

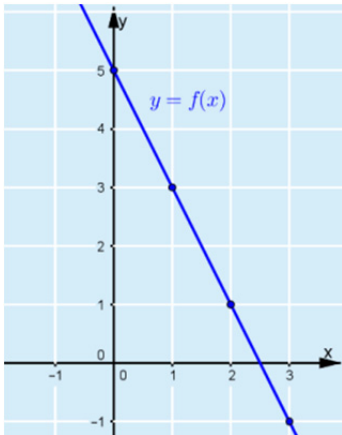


III

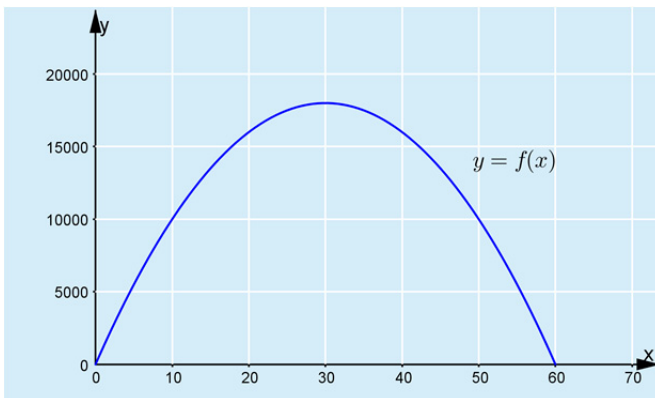


Vastaus: A ja III, B ja I, C ja II

- K24.** Lasketaan funktion $f(x) = -2x + 5$ arvoja eri muuttujan arvoilla ja sijoitetaan saadut pisteet koordinaatistoon. Huomataan, että pisteet ovat samalla suoralla. Funktion $f(x) = -2x + 5$ kuvaaja.



- K25.** Tuotto = myyntimäärä · kilohinta, joten funktio on $f(x) = x(1200 - 20x)$ ja kuvaajasta nähdään, että myyntihinnalla 30 €/kg tuotto on suurimmillaan.



Vastaus: $f(x) = x(1200 - 20x)$, myyntihinnalla 30 €/kg.