

Logaritmien laskusäännöt

Todistetaan tulon logaritmin laskusääntö. Muut säännöt todistetaan harjoitustehtävissä 12.10 ja 12.19.

Oletetaan, että $\log_a x = m$ ja $\log_a y = n$. Tällöin $x = a^m$ ja $y = a^n$.

Muokataan logaritmin $\log_a xy$ lauseketta.

$$\log_a xy$$

$$x = a^m \text{ ja } y = a^n$$

$$= \log_a a^m a^n$$

$$\text{Samankantaisten potenssien tulo: } a^m a^n = a^{m+n}.$$

$$= \log_a a^{m+n}$$

Merkintä $\log_a a^{m+n}$ tarkoittaa sitä lukua, johon kantaluku a on korotettava, jotta saadaan a^{m+n} .

$$m = \log_a x \text{ ja } n = \log_a y$$

$$= m + n$$

$$= \log_a x + \log_a y$$

On osoitettu, että $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. $\square$

Kirja kpl 12 s. 118
Todistamista ei 'kysytä'
kurssikokeessa
tässä jaksossa,
mutta voidaan
kysyä
kirjoituksissa

Laskukaavoja:

MAFY

Kaavan nimi	Kaava	Ehdot
tulon logaritmi	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	$a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$
osamäärän logaritmi	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	$a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$
potenssin logaritmi	$\log_a x^y = y \log_a x$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
kantaluvun vaihto	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0, b > 0, b \neq 1$
luvun 1 logaritmi	$\log_a 1 = 0$	$a > 0, a \neq 1$
kantaluvun logaritmi	$\log_a a = 1$	$a > 0, a \neq 1$
kantaluvun potenssin logaritmi	$\log_a a^x = x$	$a > 0, a \neq 1$
saman kantaluven logaritmi eksponentissa	$a^{\log_a x} = x$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$

12.5 Laske ilman laskinta (Sievennä)

$$\log_9 36 - \log_3 2 \quad \text{MAFY: } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Muunnetaan kaikki kantaluvuksi 3

$$\frac{\log_3 36}{\log_3 9} - \log_3 2 = \frac{\log_3 36}{\log_3 3^2} - \log_3 2 \quad \text{MAFY: } \log_a x^y = y \log_a x$$

$$\frac{\log_3 36}{2 \cdot \log_3 3} - \log_3 2 \quad \text{MAFY: } \log_a a = 1$$

$$\frac{\log_3 36}{2} - \log_3 2 = \frac{1}{2} \cdot \log_3 36 - \log_3 2 = \log_3 36^{\frac{1}{2}} - \log_3 2$$

$$\log_3 \sqrt{36} - \log_3 2 = \log_3 6 - \log_3 2 \quad \text{MAFY: } \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_3 \left(\frac{6}{2} \right) = \log_3 3 = 1$$

12.14 Laske ilman laskinta (Sievennä)

$$\frac{\lg 50 - \frac{\log_2 5}{\log_2 10}}{\log_4 8 + \log_4 2} = \frac{\lg 5 \cdot 10 - \frac{\log_2 5}{\log_2 10}}{\log_4 16} = \frac{\lg 5 + \lg 10 - \frac{\log_2 5}{\log_2 10}}{\log_4 4^2} = \frac{\lg 5 + 1 - \frac{\log_2 5}{\log_2 10}}{2}$$
$$\frac{\frac{\log_2 5}{\log_2 10} + 1 - \frac{\log_2 5}{\log_2 10}}{2} = \frac{1}{2}$$

Kuinka monta numeroa on luvussa 8888^{9999} ja mitkä ovat sen 3. ensimmäistä numeroa?

ABICUS:

$$8888^{9999}$$

$$= 1,23496679915092848224e+39484$$

Toinen tapa: Logaritmien avulla.

$$x = 8888^{9999} \quad || \lg$$

$$\lg x = \lg 8888^{9999}$$

$$\lg x = 9999 \cdot \lg 8888$$

$$9999 \times \log(8888)$$

$$39484,0916552821791955$$

$$\lg x = 39484,09\dots$$

$$x = 10^{39484,09\dots} = 10^{0,09\dots+39484} = 10^{0,09\dots} \cdot 10^{39484}$$

$$\Rightarrow x = 1,234966\dots \cdot 10^{39484}$$

Luvussa 39 485 numeroa ja 3. ensimmäistä 1, 2 ja 3