

5.

$$v = 8,5 \text{ Mm/s}, F = 3,5 \text{ mWb}, A = 15 \text{ cm}^2$$

Koska magneettivuo on $F = AB$, protoniin magneettikentästä kohdistuvan voiman suuruus saadaan muotoon $F_m = QvB = Qv \frac{\Phi}{A}$. Voiman suuruus on

$$F_m = \frac{Qv\Phi}{A} = \frac{1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 8,5 \text{ Mm/s} \cdot 3,5 \text{ mWb}}{15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \approx 3,2 \text{ fN}.$$

6.

$$B = 1,4 \text{ T}, Q = 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C}, m = 6,64466 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Newtonin II lain mukaan on $\vec{F}_m = m\vec{a}_n$, jossa magneettisen voiman suuruus on $F_m = QvB$ ja

normaalikiihtyvyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$. Saadaan yhtälö $QvB = m \frac{v^2}{r}$, josta saadaan α -hiukkasen

nopeudelle yhtälö $v = \frac{QBr}{m}$. Toisaalta nopeus on $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}$.

Yhtälöstä $\frac{QBr}{m} = \frac{2\pi r}{T}$ saadaan α -hiukkasen kiertoajaksi

$$T = \frac{2\pi m}{QB} = \frac{2\pi \cdot 6,64466 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{2 \cdot 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,4 \text{ T}} \approx 93 \text{ ns}.$$

7.

- a) D-kohtioiden välissä ionit kiihdytetään sähkökentän avulla kohtisuoraan magneettikenttää vastaan. Koska ionin tulovauhti magneettikenttään kasvaa aina sähkökentän ylityksen jälkeen, myös radan säde magneettikentässä kasvaa: radasta tulee spiraalin muotoinen.

- b) $E_{k,\max} = 7,0 \text{ MeV}$, $r = 1,03 \text{ m}$, $Q = 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 $^3\text{He}^{2+}$ -ionin massa on $3,01603 \text{ u}$ ja $1 \text{ u} = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Newtonin II lain mukaan on $\vec{F}_m = m\vec{a}_n$, jossa magneettisen voiman suuruus on $F_m = qvB$ ja

normaalikiihtyvyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$. Saadaan yhtälö $QvB = m \frac{v^2}{r}$.

Ionien suurin liike-energia on $E = \frac{1}{2}mv^2$, joten suurin nopeus on $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$.

Kun nopeus $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ sijoitetaan yhtälöön $QvB = m \frac{v^2}{r}$, saadaan magneettivuon tiheydeksi

$$B = \frac{mv}{Qr} = \frac{m\sqrt{\frac{2E}{m}}}{Qr} = \frac{\sqrt{m \cdot 2E}}{Qr} \\ = \frac{\sqrt{3,01603 \cdot 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 2 \cdot 7,0 \cdot 10^6 \cdot 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}{2 \cdot 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,03 \text{ m}} \approx 0,32 \text{ T}.$$

Syklotronin taajuus on

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{s/v} = \frac{1}{2\pi r/v} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{\sqrt{\frac{2E}{m}}}{2\pi r} = \frac{\sqrt{2 \cdot 7,0 \cdot 10^6 \cdot 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}{2\pi \cdot 1,03 \text{ m}} \approx 3,3 \text{ MHz}.$$

8.

$$U = 32 \text{ kV}$$

Newtonin II lain mukaan on $\vec{F}_m = m\vec{a}_n$, jossa magneettisen voiman suuruus on $F_m = QvB$ ja normaalikiihtyvyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$. Saadaan yhtälö $QvB = m\frac{v^2}{r}$, josta saadaan ympyräradan säteeksi $r = \frac{mv}{QB}$.

Levosta lähteneen, jännitteellä U kiihdytetyn hiukkasen liike-energia on $E = \frac{1}{2}mv^2 = QU$, josta saadaan hiukkasen loppunopeudeksi $v = \sqrt{\frac{2QU}{m}}$.

Kun yhtälöön $r = \frac{mv}{QB}$ sijoitetaan loppunopeus $v = \sqrt{\frac{2QU}{m}}$, radan säteen yhtälö saadaan muotoon

$$r = \frac{m}{QB} \sqrt{\frac{2QU}{m}} = \sqrt{\frac{2mU}{QB^2}}.$$

Jotta protonin ja α -hiukkasen ratojen säteet olisivat yhtä suuret, on oltava

$$\sqrt{\frac{2m_p U_p}{Q_p B^2}} = \sqrt{\frac{2m_\alpha U_\alpha}{Q_\alpha B^2}}.$$

Protonin kiihdytysjännite on

$$U_p = \frac{m_\alpha Q_p U_\alpha}{m_p Q_\alpha} = \frac{m_\alpha Q_p}{m_p Q_\alpha} U_\alpha = \frac{6,64466 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot e}{1,67262 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 2e} \cdot 32 \text{ kV} \approx 64 \text{ kV}.$$

5-15.

$$d = 1,00 \text{ m}, U = 510 \text{ V}, B = 0,10 \text{ mT}, Q = |-e| = 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C}, m = 9,10939 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

- a) Sähkökenttä kiihdyttää elektronia. Elektronin kohdistuva paino on merkityksetön. Kun hiukkaseen vaikuttaa vain sähköinen voima, työ-energiaperiaatteen mukaan sähköisen voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin hiukkasen liike-energian muutos eli $\Delta E_k = W$ eli $\frac{1}{2}mv^2 = QU$, jossa Q on elektronin varauksen itseisarvo. Elektroni saa kiihdytyksen johdosta vauhdin

$$v = \sqrt{\frac{2QU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 510 \text{ V}}{9,10939 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 1,33940 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$$

Elektroni tulee tällä vauhdilla kohtisuorasti magneettikenttään, jolloin sen rata kaareutuu. Magneettisen voiman vaikutuksesta elektroni liikkuu ympyrärataa pitkin. Koska elektroniin kohdistuva paino on merkityksetön, Newtonin II lain $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ mukaan on $\vec{F}_m = m\vec{a}_n$. Kun suunta kohti radan keskipistettä on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö

$$QvB = m \frac{v^2}{r}.$$

Ympyräradan säde on

$$r = \frac{mv}{QB} = \frac{9,10939 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,33940 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,10 \cdot 10^{-3} \text{ T}} = 0,761534 \text{ m} \approx 0,76 \text{ m}.$$

- b) Elektronin liike koostuu kolmesta eri vaiheesta:

1. kiihdytys sähkökentässä nopeuteen v
2. suunnan muutos magneettikentässä, nopeus on vakio $= v$
3. jarrutus sähkökentässä nopeudesta v nopeuteen 0

Elektronin nopeus sen saapuessa katodille on siis 0 m/s.

Tämä johtuu siitä, että kiihdytys ja jarrutus tapahtuvat samassa sähkökentässä (samalla jännitteellä). Kiihdytettäessä elektroni liikkui kenttäviivojen vastaan, jarrutettaessa kenttäviivojen suuntaisesti.

- c) Sähkökentän voimakkuus on $E = \frac{U}{d} = \frac{510 \text{ V}}{1,00 \text{ m}} = 510 \text{ V/m}$. Tässä kentässä elektroniin vaikuttava sähköinen voima antaa elektronille kiihtyvyyden

$$a = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m} = \frac{1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 510 \frac{\text{V}}{\text{m}}}{9,10939 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 8,96998 \cdot 10^{13} \text{ m/s}^2.$$

Elektroni lähti levosta, joten sen kulkema matka on $s = d = \frac{1}{2}at^2$.

Sähkökentässä kiihdytykseen kuluu aikaa

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,00 \text{ m}}{8,96998 \cdot 10^{13} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1,49320 \cdot 10^{-7} \text{ s}.$$

Symmetrian vuoksi jarrutusaika on yhtä suuri.

Magneettikentässä elektroni kulkee matkan

$$s = \frac{2\pi r}{2} = \pi r = \pi \cdot 0,761534 \text{ m} = 2,39243 \text{ m} \text{ vakiovauhdilla.}$$

Tähän kuluu aikaa

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2,39243 \text{ m}}{1,33940 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,78620 \cdot 10^{-6} \text{ s}.$$

Kokonaisaika on siis $2 \cdot 0,149320 \mu\text{s} + 0,178620 \mu\text{s} \approx 0,48 \mu\text{s}$.

5-14.

$$\Delta d = 10,2 \text{ mm}, E = 28,6 \text{ kV/m}, B_1 = 0,110 \text{ T}, m = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Ioniin kohdistuvaa painoa voidaan pitää merkityksettömänä. Myöskään liikettä vastustavia voimia ei tarvitse huomioida, koska hiukkaset liikkuvat lähes tyhjiössä. Newtonin II lain $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ mukaan vakionopeudella nopeusvalitsimessa kulkeville ioneille on $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ eli $\vec{F}_m + \vec{F}_s = \vec{0}$, jossa $\vec{F}_m$ on magneettinen voima ja $\vec{F}_s$ sähköinen voima.

Kun magneettisen voiman suunta on positiivinen, saadaan $F_m - F_s = 0$ eli $F_m = F_s$, joten yhtälöstä $QvB = Eq$ analysoivaan magneettikenttään saapuvien ionien nopeus on

$$v = \frac{EQ}{QB_1} = \frac{E}{B_1} = \frac{28,6 \text{ kV}}{0,110 \text{ T}} = 0,260 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Analysoivassa magneettikentässä ionit liikkuvat magneettisen voiman vaikutuksesta pitkin

ympyrärataa, jonka säde saadaan yhtälöstä $QvB_2 = m \frac{v^2}{r}$. Radan säteeksi saadaan $r = m \frac{v}{QB_2}$.

Erilaisten ionien ratojen halkaisijoiden erotus on

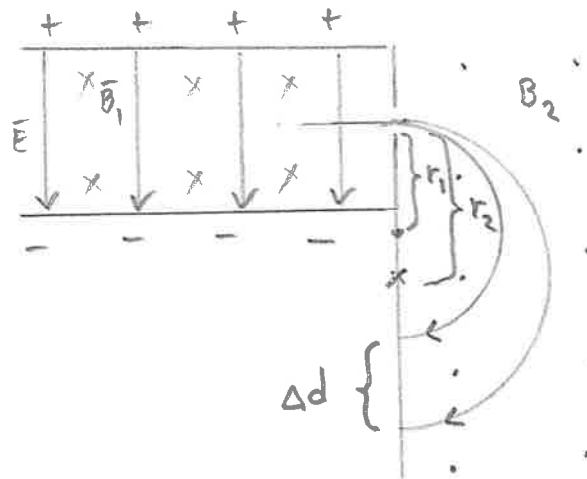
$$\Delta d = 2r_2 - 2r_1 = 2(r_2 - r_1) = 2 \left(m_2 \frac{v}{QB_2} - m_1 \frac{v}{QB_2} \right) = 2(m_2 - m_1) \frac{v}{QB_2}.$$

$^{114}\text{Sn}^+$ - ja $^{115}\text{Sn}^+$ -ionien massaluvut ovat 115 ja 114, joten ionien massojen erotus on yhden atomimassayksikön suuruinen. Analysoivan magneettikentän magneettivuon tiheys on suuruudeltaan

$$B_2 = 2(m_2 - m_1) \frac{v}{\Delta d Q}$$

$$= 2 \cdot 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \frac{0,260 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{0,0102 \text{ m} \cdot 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \approx 0,528 \text{ T}.$$

- Massaspektrometrin analysoivan magneettikentän magneettivuon tiheys on suuruudeltaan 0,528 T. Suunta on katsojasta pois päin.



Huom!

Nopeudenvalitsimen kenttiä $\vec{E}$ ja $\vec{B}$ muutetaan koko ajan niin, että erimassaiset ionit pääsevät läpi vuoron perään.

Huom!

Kiihdyttävä sähkökenttä antaa eri nopeudet eri massaisille ioneille.