

FY6 Sähkömagnetismi pakolliset peda.net -tehtävät: Ratkaisuehdotelmia tehtäviin 1-14

1. Taajuus $f = 450 \cdot 10^6 \text{ Hz}$, radioaaltojen etenemisnopeus on valonnopeus $c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Aallonpituus on tälle radioaallolle ratkaistavissa aaltoyhtälöstä

$$c = f \cdot \lambda$$

eli

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{450 \cdot 10^6 \text{ Hz}} \approx 0,67 \text{ m}.$$

2. Valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. Tässä
 $r_1 = 1,2 \text{ m}, E_1 = 100 \text{ lx}, E_2 = 300 \text{ lx}$
ja verrannollisuudesta johtuen

$$E_1 \cdot r_1^2 = E_2 \cdot r_2^2,$$

minkä voi kirjoittaa muodossa

$$r_2 = \sqrt{\frac{E_1 \cdot r_1^2}{E_2}} = \sqrt{\frac{100 \text{ lx} \cdot (1,2 \text{ m})^2}{300 \text{ lx}}} = \frac{1,2 \text{ m}}{\sqrt{3}} \approx 0,7 \text{ m}.$$

Vastaus on siis noin 70 cm.

3. Valon taittumista käsittelee Snellin laki

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}$$

Tässä siis $\alpha_1 = 40^\circ, \alpha_2 \approx 28^\circ, n_1 = 1,00$.

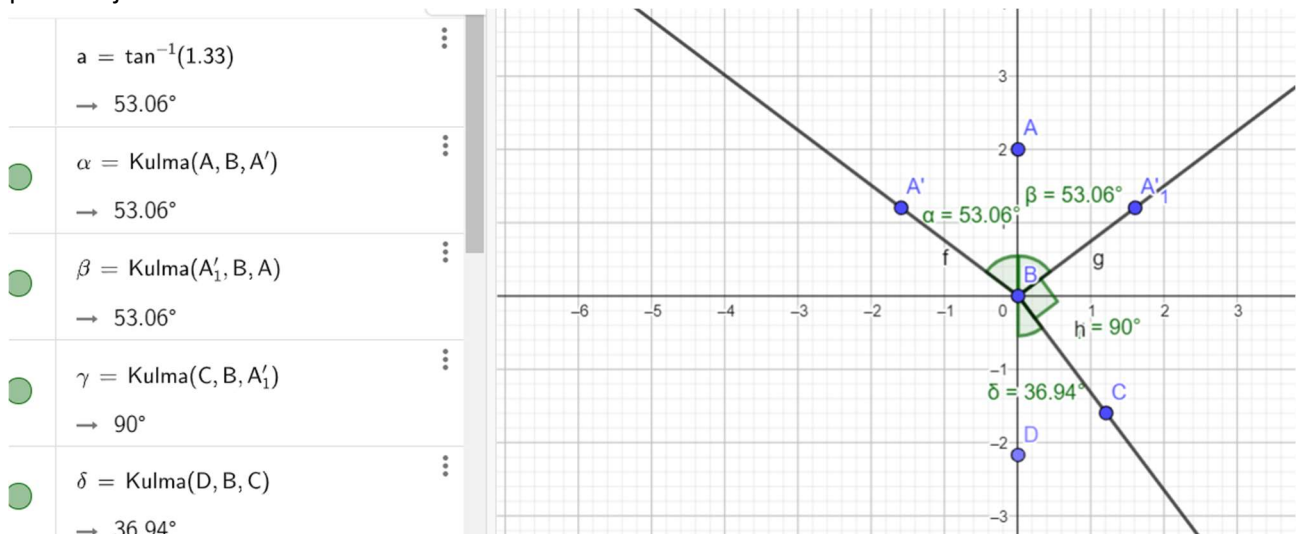
Ratkaistaan nesteen taitekerroin

$$n_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot n_1 \approx \frac{\sin 40^\circ}{\sin 28^\circ} \cdot 1,00 \approx 1,37.$$

Nesteen tunnistamista vaikeuttaa taitekertoimen riippuvuus aallonpituudesta ja aineesta.

Taulukkokirjan aineiden taitekertoimia taulukosta kannattaa yrittää katsella saraketta C, jossa aallonpituus on 656,3 nm, joka ei ole kovin kaukana arvosta 633 nm. Taulukossa mainitussa sarakeessa on taitekertoimet 1,360 etanolille ja 1,33 vedelle. Näistä etanoli on selvästi havaittua taitekerrointa 1,37 lähempänä, joten neste lienee etanolia.

4. Kuvan piirtämisessä on kätevää käyttää Geogebraa. Pääsee vähän vähemmällä pohtimisella kuin piirto-ohjelmissa.



Kuvassa on olennaiset yhtälöt

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} = \frac{1,33}{1,00} = 1,33$$

ja matematiikan puolelta geometriasta ja trigonometriasta seuraavat

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + 90^\circ &= 180^\circ \\ \alpha_2 &= 90^\circ - \alpha_1\end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin(90^\circ - \alpha_2)} = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \tan \alpha_1 = 1,33.$$

Näin löytyy oikea tulokulma

$$\alpha_1 = \text{atan } 1,33 \approx 53,06^\circ.$$

Kuvan piirtämisessä taitekulmaa ei tarvitse laskea, koska kuvan voi piirtää heijastuksen ja suoran kulman avulla. Taitekulman voi toki laskea:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} &= 1,33 \\ \sin \alpha_2 &= \frac{\sin \alpha_1}{1,33} = \frac{\sin 53,06^\circ}{1,33} \approx 0,60\end{aligned}$$

eli

$$\alpha_2 \approx \text{asin } 0,60 \approx 36,94^\circ.$$

Kirjoita kaava tähän.

5. Valo heijastuu kahdessa eri rajapinnassa: ilmasta öljyyn tuleva valo heijastuu ja heijastuessa tapahtuu puolen aallonpituuden suuruinen vaihesiirto ja öljystä asfalttiin tuleva valo (ei tietenkään etene asfalttiin) heijastuu ja heijastuessa tapahtuu puolen aallonpituuden suuruinen vaihesiirto. Kahden heijastuneen aallon matkaero on öljykerroksen paksuus kerrottuna kahdella eli $2 \cdot d$. Interferenssi vahvistaa takaisin menevää vihreää aaltoa, jos edellinen on aallonpituuden monikerta eli

$$k \cdot \lambda = 2 \cdot d.$$

Tässä k on siis jokin kokonaisluku.

Taittumislaita saadaan laskettua vihreän valon aallonpituus öljyssä, kun ilmassa se on 540 nm:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,42}{1,00} = 1,42$$

eli

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{1,42} = \frac{540\text{nm}}{1,42} \approx 380\text{nm}.$$

Öljykerroksen paksuus d on siis

$$d = \frac{k\lambda}{2} = k \cdot \frac{380\text{nm}}{2} = k \cdot 190\text{nm}.$$

Kerrointa k on mahdotonta määrittää. Öljykerroksen mahdollisia paksuuksia ovat 190nm, 380nm, 570nm, 760nm, 950nm, ...

6. Varjostin on 4,0 metrin päässä ja sille muodostuu valomaksimikuvio, jossa keskimmäisistä kolmesta reunimmaisten etäisyys on 7,5 mm. Tämä tarkoittaa, että valo on taipunut $7,5\text{mm}/2 = 3,75\text{ mm}$ sivulle. Vastaava taipumiskulma (huomaa ei siis taitekulma – se on ihan eri juttu) on

$$\alpha = \text{atan } \frac{3,75\text{mm}}{4000\text{mm}} \approx 0,0537^\circ$$

eli todella pieni kulma.

Hilayhtälön mukaan

$$d \cdot \sin \alpha = k \cdot \lambda$$

missä d on hilan rakojen välinen etäisyys $d = 0,60\text{mm}$ ja λ valon aallonpituus. Kerroin k on tässä tapauksessa 1. Aallonpituus on

$$\lambda = d \cdot \sin \alpha = 0,60\text{mm} \cdot \sin 0,054^\circ \approx 5,635 \cdot 10^{-4}\text{mm} = 0,5635\mu\text{m} = 563,5\text{nm}.$$

Pitäisi olla keltaista. Aika vihertävää keltaista.

7. Seinälle muodostuvan 15cm väli täplärivistössä tarkoittaa, että ensimmäiset valomaksimit muodostuvat kulman

$$\alpha = \text{atan} \frac{15\text{cm}}{600\text{cm}} \approx 1,432^\circ$$

välein. Voidaan siis käyttää tätä kulmaa kertaluvulle $k = 1$.

Hilayhtälön

$$d \cdot \sin \alpha = k \cdot \lambda$$

avulla voidaan laskea hilan rakosten välimatka d, kun $k = 1$ ja aallonpituus $\lambda = 633\text{nm}$.

$$d = \frac{k \cdot \lambda}{\sin \alpha} = \frac{1 \cdot 633\text{nm}}{\sin 1,432^\circ} \approx 25328\text{nm} \approx 25,3\mu\text{m} \approx 0,03\text{mm}.$$

8. Suunnistus on kivaa ja suunnistaa voi ihan hyvin ilman kompassia. Suomesta ostettu suomalaismetsiin tarkoitettu kompassi on tarkoitettu magneettisiin olosuhteisiin, joissa inkliinaatio on noin 70° ja maan magneettikenttä suuntautuu melko jyrkästi kohti maanpintaa. Uusi -Seelanti on maapallon eteläisellä puolella ja näin ollen inkliinaatio on siellä päinvastainen: Maan magneettikenttä suuntautuu pinnasta ulos ja ylöspäin.

Kompassi on melko varmasti täysin hyödytön suunnistuksen kannalta.

9. a) Kysymyksen asettelussa sanotaan, että sähköjohdin kelluu magneettikentässä. Tämä tarkoittaa, että kun gravitaatio suuntautuu alaspäin, suuntautuu magneettisen vuorovaikutuksen aiheuttama voima vastakkaiseen suuntaan eli ylöspäin. Oikean käden säännöllä (sähkövirta tai positiivinen hiukkanen) saadaan asettamalla etusormi etelään ja peukalo ylöspäin keskisormi suuntautumaan itään. Magneettivuon tiheys on siis itään.

b) Oletetaan, että johdon pituus on yksi metri: $l = 1,0\text{m}$ ja siis sen massa on $m = 0,00212\text{kg}$.

Putoamiskiihtyvyyden on $g = 9,81\text{m/s}^2$. Magneettivuon tiheys $B = 0,56\text{T}$.

Newtonin toisen lain mukaan

$$F_m = l \cdot I \cdot B = m \cdot g = G,$$

eli

$$I = \frac{m \cdot g}{l \cdot B} = \frac{0,00212\text{kg} \cdot 9,81\text{m/s}^2}{1,0\text{m} \cdot 0,56\text{T}} \approx 0,037\text{A} \approx 37\text{mA}.$$

10. Auton moottoritelassa ei ole varmaankaan yhtään riittävän suoraa johtoa, mutta sovelletaan tässä silti Biot-Savart -magneettikenttälakia:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\text{Vs/Am}}{2\pi \cdot 0,30\text{m}} \cdot 100\text{A} = \frac{2 \cdot 10^{-7}\text{Vs}}{0,30\text{m}} \cdot 100\text{A} \approx 6,67 \cdot 10^{-5}\text{T} \approx 0,0667\text{mT} \approx 66,7\mu\text{T}.$$

11. Elektronin potentiaalienergia voidaan laskea sen varauksen e ja jännitteen U avulla: $E = eU$. Näin energian säilymislain mukaan potentiaalienergia muuttuu liike-energiaksi ja saadaan yhtälö

$$eU = \frac{1}{2}mv^2,$$

missä m on elektronin massa ja v kysytty nopeus. Koska $m = 9,11 \cdot 10^{-31}\text{kg}$ saadaan nopeudeksi

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}\text{C} \cdot 2000\text{V}}{9,11 \cdot 10^{-31}\text{kg}}} \approx 26524372 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 27 \frac{\text{Mm}}{\text{s}}.$$

b) Magneettikentässä varattu hiukkanen joutuu ympyräradalle, koska magneettisen vuorovaikutuksen aiheuttama voima on kohtisuorassa kulkusuunnan ja siis nopeusvektorin kanssa. Magneettisen vuorovaikutuksen aiheuttaman voiman suuruus on

$$F = evB.$$

$$F = ma$$

Newtonin toisen lain mukaan. Normaalikiikkyvyys ympyräliikkeessä on

$$a_n = \frac{v^2}{r}.$$

Yhdistämällä nämä yhteen yhtälöön saadaan

$$evB = \frac{mv^2}{r}.$$

Tästä voidaan jakaa nopeus molemmilta puolilta pois ja jakamalla elektronin varauksella e saadaan

$$B = \frac{mv}{er} = \frac{9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 26,5 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,10 \text{ m}} \approx 1,51 \cdot 10^{-3} \text{ T} \approx 1,5 \text{ mT}.$$

12. Kyseessä on siis nopeudenvälitys, jossa sähkökentän ja hiukkasen välisen vuorovaikutuksen aiheuttama voima ja magneettikentän ja hiukkasen välisen vuorovaikutuksen aiheuttama voima kumoavat toisensa. Niiden on oltava yhtä suuria ja vastakkaisuuntaisia. Tämä onnistuu, jos sähkökentän ja magneettikentän välinen kulma on suora ja hiukkaset lentävät täsmälleen suorassa kulmassa molempien kenttien kanssa. Kenttien aiheuttamat voimat ovat

$$F_s = e \cdot E$$

ja

$$F_m = e \cdot v \cdot B.$$

Koska voimien on oltava yhtä suuria, saadaan yhtälö

$$e \cdot v \cdot B = e \cdot E.$$

Hiukkasen nopeus on siis oltava

$$v = \frac{E}{B} = \frac{1,5 \text{ V/m}}{0,020 \text{ T}} = 75 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

13. Hiukkasten massalla tai varauksella ei ole nopeudenvälityksessä väliä. Vastaus on protoneilla sama kuin elektroneilla: 75 m/s.

14. Heliumionin sanotaan olevan +2 ioni, eli sen varaus on

$$q = 2 \cdot 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 3,2044 \cdot 10^{-19} \text{ C},$$

massa on

$$m = 5,0 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

ja liike-energia

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 4,3 \cdot 10^{-12} \text{ J}.$$

Liike-energian perusteella on mahdollista selvittää ionin nopeus

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,3 \cdot 10^{-12} \text{ J}}{5,0 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} \approx 41472883 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 41,5 \frac{\text{Mm}}{\text{s}}.$$

Magneettisen vuorovaikutuksen aiheuttama voima, Newtonin II laki ja normaalikiikkyvyys voidaan yhdistää yhtälöksi

$$F_m = qvB = ma = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

eli magneettivuon tiheys B on

$$B = \frac{mv}{qr} = \frac{5,0 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 41472883 \text{ m/s}}{3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,03 \text{ m}} \approx 0,628 \text{ T}.$$

Syklotronitaajuus saadaan laskettua selvittämällä ensin yhteen kierrokseen kuluva aika. Taajuus on tämän jaksonajan käänteisluku. Kierroksen pituus on

$$p = 2\pi r,$$

joten aika on

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 1,03m}{41472883 \frac{m}{s}} \approx 1,5605 \cdot 10^{-7}s.$$

Taajuus on

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,5605 \cdot 10^{-7}s} \approx 6408363Hz \approx 6,4MHz.$$