

Benvenuto a
MATH 2017
- Bardonecchia -

Compila questa pagina e, insieme ai tuoi compagni, scegli un “**portavoce**” del gruppo di lavoro.

<i>Gruppo N.</i>
<i>Questo quaderno appartiene a: (nome, scuola, città)</i>
<i>I compagni del mio gruppo sono: (nome, scuola, città)</i>
<i>Il nostro “portavoce” è:</i>



La parola “**INFINITO**” a cosa ti fa pensare?

- *Discuti con i compagni del tuo gruppo.*
- *Concordate su un pensiero comune e riportate la frase del gruppo sul cartoncino che vi è stato dato.*

Attività 1 – Torte & Co.

Ti diamo il benvenuto con una torta

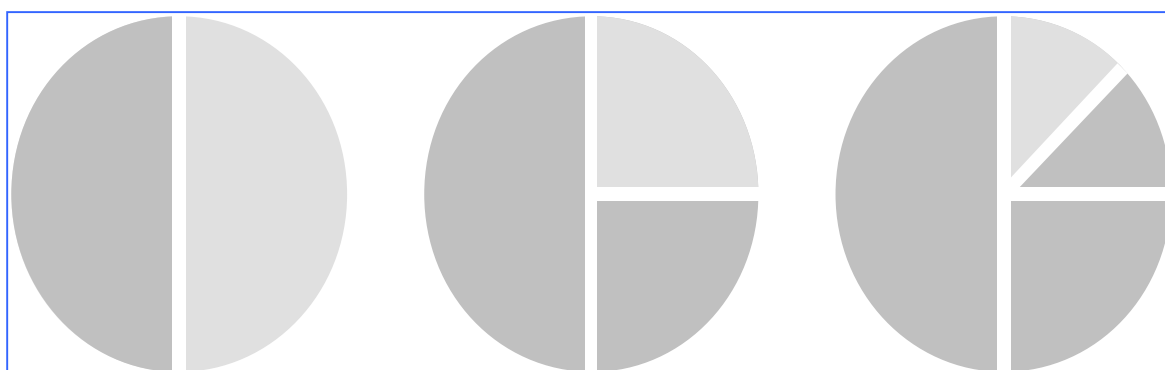


Step A

Hai davanti a te una torta. Puoi mangiarla seguendo queste regole:

- dividi la torta in due parti uguali e mangi in un sol boccone una delle due parti;
- dividi a metà la parte rimasta; mangi in un sol boccone una delle due parti ;
- ripeti infinite volte il procedimento.

Ai professori devi riservare la torta rimasta. *Avanzerà qualche cosa ?*



Step B

Prendi adesso una **torta di carta**,

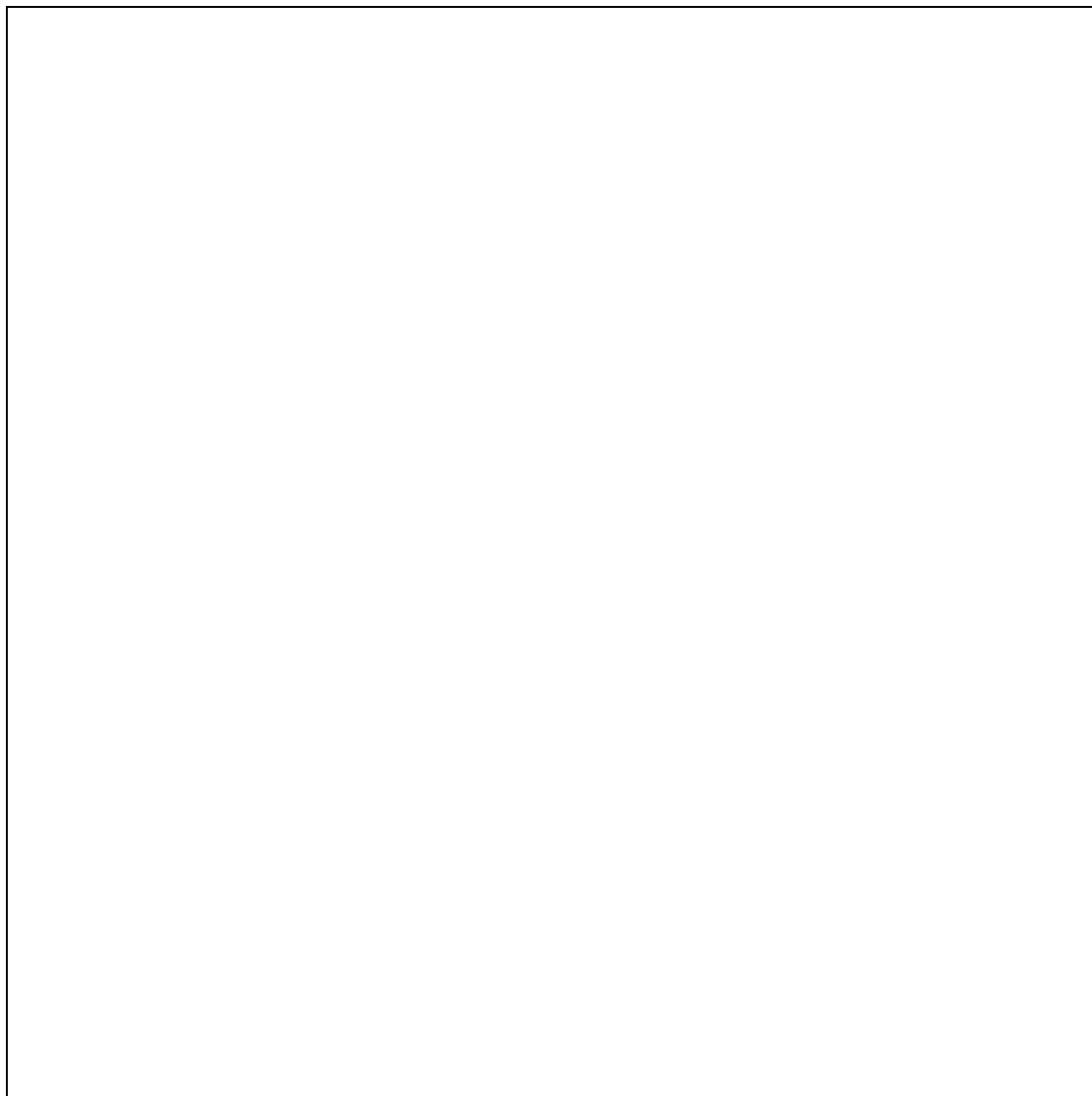
- tagliala in tre parti uguali;
 - ne "mangi" una
- dai la seconda ad un compagno
ripeti "infinite volte" il procedimento con la fetta rimasta.

(aiutati ritagliando le torte di cartoncino che ti danno i docenti)

Chi dei due (tra te ed il tuo compagno) ha "mangiato" di più?

Step C

Passiamo a torte quadrate:



- Dividi la torta in quattro parti uguali, colorane una;
- Tra le restanti, dividi una parte in quattro parti uguali, colorane una;
- Ripeti il procedimento "infinite volte".

Che cosa puoi notare ?

Attività 2 – Dal concreto all'astratto.

I giochi appena fatti possono trovare risposta in questi calcoli, assai particolari perché si ripetono all'infinito.

Infatti con le torte dello *step A* hai:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \dots + \dots + \dots = \dots$$

Con le torte dello *step B* hai:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \dots + \dots = \dots$$

Con le torte dello *step C* hai:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \dots + \dots = \dots$$

Ora procediamo e pensiamo ad una situazione in cui sommiamo successive potenze di 1/5

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \dots + \dots + \dots = \dots$$

Credi a questo punto di poter ricavare una regola valida, in circostanze analoghe, per qualunque valore del denominatore n ?

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots + \dots + \frac{1}{n^m} + \dots = \dots$$

Questo è un modo di affermare una proprietà dopo averla osservata in un certo numero di casi.

Ma il **buon matematico** procede con maggiore cautela. Egli dice che l'affermazione è "*probabilmente vera*" e si riserva di dimostrare che è *effettivamente vera*.

Osserviamo qualche esempio.

Attività 3 – Congettura di Goldbach

Considera un numero n naturale con $n > 3$ e l'operazione di addizione.

Osserva: $4 = 2 + 2$
 $5 = 2 + 3$
 $6 = 3 + 3$
 $7 = 5 + 2$

Come vedi ciascun numero considerato può essere scritto come **somma di due numeri primi** (anche uguali tra loro).

Analizza ancora due casi: $8 =$ $9 =$

La regola sembra funzionare e potremmo estenderla ad ogni numero naturale, cioè potremmo estenderla ... all'infinito.

	<p>“OGNI NUMERO MAGGIORE DI 3</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	---

Ma non facciamoci prendere dall'entusiasmo e eseguiamo ancora qualche controllo.

La regola funziona per $n = 10$? $10 =$

E per $n = 11$? $11 =$

Cerca ora altri due numeri **per cui la regola non vale**: e

Ne hai trovati di pari ?

Questa questione ha una lunga storia.

Nel 1742 **Christian Goldbach**, matematico tedesco, scrisse, in una lettera ad Eulero, di aver constatato **su molti casi che un numero pari, a parte 2, è somma di due numeri primi.**

Finora non si è trovato alcun **esempio contrario**, ma per i matematici questo non basta per poter affermare che la proprietà è vera.

Per ora possiamo solo parlare di una
CONGETTURA

cioè di una *spiegazione di un fenomeno fondato su indizi* (così scrive il dizionario).

Nel 2000 è stato istituito, da un ricco americano, un premio cospicuo per chi fosse riuscito a dimostrare la congettura o a confutarla.



Troviamo **congetture** in tutta la storia della matematica. Esse rappresentano le prime intuizioni, le prime idee di un matematico, su cui lavorare per giungere a formulare un **teorema**, non appena ne avrà trovata la **dimostrazione**.



Fai attenzione però: sui giornali o in televisione, persone poco informate e spesso dichiaratamente ignoranti in matematica, parlano di teorema intendendo il teorema come una teoria astratta, indimostrabile. Ma non è così!

Riprendiamo il nostro cammino: ci stavamo occupando del fatto che

*una regola, una proprietà, in matematica ha sempre bisogno di **dimostrazione** e che non bastano molte o moltissime prove per indicarne l'assoluta validità, cioè per dimostrarla.*

proviamo con dei un gioco a trovare un metodo matematico che ci possa aiutare

Attività 4a – Giochiamo tutti insieme

Attività plenaria:

- cartoncini colorati
- gioco delle password

con i giochi eseguiti avete visto che:

in matematica per dimostrare che una proprietà vale per infiniti casi, esiste un metodo, chiamato **INDUZIONE MATEMATICA**.

Per dimostrare che una proprietà vale per tutti gli infiniti elementi di una successione è sufficiente dimostrare che la proprietà:

- vale per un *elemento iniziale*;
- se vale per un qualunque elemento vale sicuramente anche per il suo *successivo*.

Attività 4b – Gioco del Domino

Per chiarire il concetto di induzione, si possono utilizzare le tessere del domino: si tratta di tessere rettangolari che possono essere messe in modo verticale, per costruire un lungo percorso. Si costruisce un percorso (se riuscite non rettilineo) così sarà più facile capire il ragionamento che segue.

In questo gioco la *proprietà* è:

*ciascun pezzo cadendo fa cadere il successivo
(il famoso effetto domino citato sovente dai mass-media),*

Perciò i pezzi dovrebbero essere collocati ad una distanza opportuna.

Tu sai quale?

Ora :

SE cade il primo pezzo
E SE la caduta di un generico pezzo
provoca inevitabilmente la
caduta del pezzo successivo

ALLORA potremo essere certi che
tutti i pezzi del domino
cadranno



Attività 4c – Origami tessera del Domino

Costruiamo insieme un grande domino, ma per renderlo più personale creiamo e firmiamo le nostre tessere.

Il metodo di induzione è un procedimento potente ma solitamente complesso. Abbiamo però un caso in cui si può lavorare anche soltanto con l'algebra che conoscete.

Attività 4d – Somma di n numeri dispari

Applichiamo ora il *principio di induzione matematica* per dimostrare una proprietà che alcuni di voi potrebbero aver già visto:

la somma dei primi n numeri dispari è sempre uguale al quadrato di n

cioè:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Per induzione si procede come segue:

1) si dimostra che la proprietà vale nel **caso iniziale**, cioè se $n = 1$; è banale! Infatti

$$1 = 1^2$$

2) si dimostra poi che se la proprietà è vera per i primi k numeri dispari, allora è necessariamente vera anche per i primi $k+1$ numeri dispari.

Anche questo è facile; infatti se si scrive la proprietà per i primi k numeri dispari, cioè si scrive

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

aggiungendo ad entrambi i membri il numero dispari successivo a $2k - 1$, la relazione diventa:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$$

e se riscriviamo il secondo membro come quadrato di un binomio otteniamo:

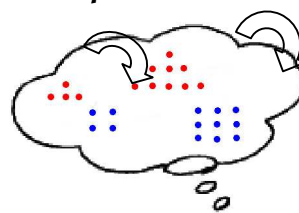
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (2k + 1)^2$$

questo esprime proprio la medesima proprietà per i primi $k + 1$ numeri dispari!

In base al principio di induzione siamo certi che:

la proprietà vale per tutti i numeri dispari.

In matematica, anche l'occhio vuole la sua parte, la proprietà poteva essere intuita rappresentando i *numeri naturali con punti disposti in modo particolare* (osserva il disegno accanto):



Rispondi disegnando ciò che hai ottenuto utilizzando le strisce di quadretti



Quindi, ritornando alle torte, per poter dimostrare la congettura

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^m} + \dots = \frac{1}{n-1}$$

basterebbe provare che

1) la proprietà vale per $n = 2$ cioè $\frac{1}{2} + \frac{\dots\dots}{\dots\dots} + \frac{\dots\dots}{\dots\dots} + \dots = \dots\dots$

2) se $\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \dots + \frac{1}{k^m} + \dots = \frac{1}{k-1}$

allora anche

$$\frac{1}{\dots\dots} + \frac{1}{\dots\dots 2} + \frac{1}{\dots\dots 3} + \dots + \frac{1}{\dots\dots m} + \dots = \frac{1}{\dots\dots\dots\dots}$$

Il metodo ci aiuta, ma non è facile dimostrare quest'ultimo passaggio.

Ti presenteremo fra qualche pagina un altro metodo per affrontare il problema.



Attività 5 – Achille e la Tartaruga

Riprendiamo dunque il calcolo relativo al gioco delle torte che altro non è se non una versione mangereccia del famoso **paradosso di Zenone**.

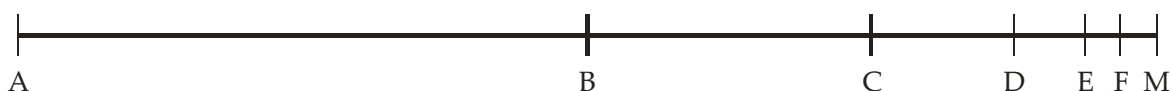
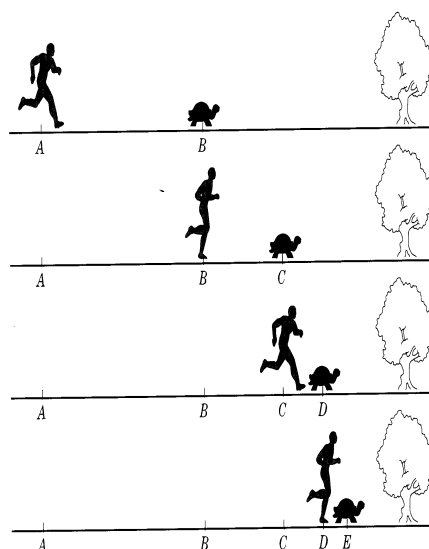
Achille, piè veloce, ed una **tartaruga**, notoriamente un animale molto lento, si apprestano ad una gara di corsa.

Achille è molto più veloce e concede quindi alla tartaruga un certo vantaggio.

Achille raggiungerà la tartaruga ?

Zenone, filosofo greco del V secolo a.C. presentò una argomentazione analoga a quella che segue, che è rappresentata nella figura a fianco.

Supponiamo che Achille dia un vantaggio alla tartaruga pari a metà della distanza da percorrere e viaggi ad una velocità doppia



Il tragitto da compiere è AM. M sta per *Meta*.

Alla partenza *Achille* si trova in A e la *tartaruga* in B che è il punto medio di AM.

Quando *Achille* arriva in B, la *tartaruga* sarà arrivata in C.

Quando *Achille* arriva in C, la *tartaruga* sarà arrivata in D e così via: ad ogni percorso rapidamente effettuato da *Achille*, la *tartaruga* compie un percorso che è la metà di quello di *Achille*, ma che è tuttavia sempre maggiore di zero.

$$AB = \frac{1}{2} AM \quad BC = \frac{1}{4} AM \quad CD = \frac{1}{8} AM \quad DE = \dots\dots\dots \quad EF = \dots\dots\dots$$

Dunque la tartaruga sarà sempre un po' più avanti di Achille ed Achille non la raggiungerà mai.

Zenone sosteneva questo ed il suo ragionamento sembra convincente.



Se però analizziamo la questione come avviene nella realtà, la conclusione è diversa.
 Quando la tartaruga raggiunge il traguardo, Achille, che corre con velocità doppia, dove si trova ?

.....

Però secondo Zenone, Achille per raggiungere la tartaruga deve percorrere
 tratti del percorso.

***E quanto varrà la somma di questi infiniti tratti?
 Qui sta la questione!***

I successivi tratti percorsi da Achille si possono indicare con

$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$ questo è un esempio di *successione* di numeri

mentre il percorso totale è dato dalla somma

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ che rappresenta un esempio di *serie* di numeri

con i puntini indichiamo infiniti addendi, ciascuno la metà del precedente.
 Da situazioni già analizzate (vedi *Attività 1: gioco con la torta*) **ci è parso di poter concludere** che questa somma potesse dare risultato quindi un risultato finito e come tale percorribile in un tempo finito.

Come sommare infiniti addendi è stata una questione importante nella storia della matematica.
 Se si esegue una addizione con due o tre addendi, non c'è problema.

$$2 + 3 = 5$$

$$2 + 3 + 7 = 12$$

Non c'è difficoltà neppure se i termini sono tanti, tantissimi, ma sempre in numero finito.

C'è addirittura un simbolo per rappresentare questi calcoli:

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

che si legge: *sommatoria dei termini a_i per i che va da 1 ad n*

Sai calcolare la somma di tutti i numeri naturali da 1 a 1000

$$\sum_{i=1}^{1000} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 1000 = \dots\dots\dots$$

sicuramente qualcuno di voi si ricorda "il gioco di Gauss".

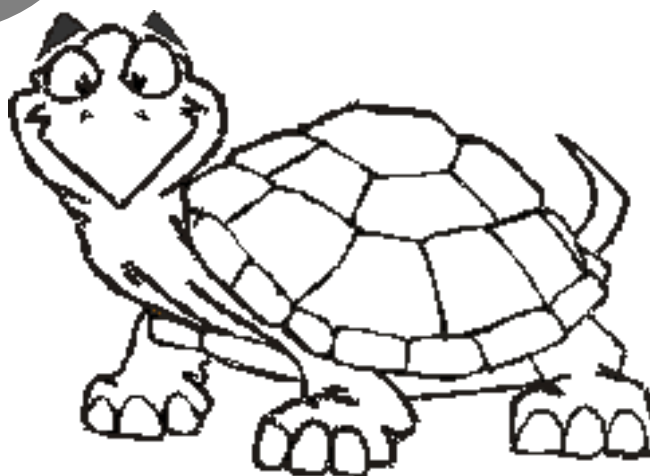
Pensare ad una addizione, con infiniti termini, è sconvolgente, eppure, nonostante l'imbarazzo dovresti aver trovato che

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

Effettivamente la soluzione del problema di Achille e la tartaruga, considerando le distanze, sembra portare anch'essa a questa conclusione.

Speriamo di essere stati convincenti, ma per chi ancora ha dei dubbi in proposito ritorneremo su Achille più tardi.

A dopo



Attività 6 – L'Infinito nei numeri periodici

Trovare una somma di *infiniti addendi* che abbia un *valore finito* non dovrebbe essere una novità.

Se rifletti un po' ti viene subito in mente che un numero periodico è proprio quello che risponde a questa situazione. Ad esempio:

$$0,\bar{4} = 0,4444\dots = 0 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \dots$$

Ma sai anche che $0,\bar{4} = \frac{4}{9}$

C'è una regola fornita dai testi, ma per esserne sicuri è *meglio cercare di capire il perché*.

Riprendiamo $0,\bar{4}$ e indichiamolo con x , poniamo cioè:

$$x = 0,\bar{4}$$

Se moltiplichiamo entrambi i termini per 10 avremo

$$10x = \dots\dots\dots$$

Il secondo termine può essere scritto come $4 + 0,4444\dots$ cioè $4 + x$

Otteniamo dunque l'equazione

$$10x = 4 + x$$

A te la conclusione

La formula relativa alla *frazione generatrice* di un numero decimale illimitato periodico è accettata di buon grado da tutti, e non c'è motivo di non accettarla, visto anche la dimostrazione algebrica data.

Ma quando c'è di mezzo il *periodo 9* spesso viene vista con diffidenza.

Infatti $0,\bar{9} = 0,99999999\dots = 1$ lascia perplessi.

... e tu come la pensi?



Attività 7 – Numeri periodici in altre basi

Il sistema di numerazione da noi usato non è l'unico sistema di numerazione posizionale possibile. Dovresti aver già incontrato i sistemi di numerazioni in altre basi, come ad esempio 2 (sistema binario)

Se non conosci o non ricordi i cambiamenti di base possiamo riassumerteli in breve:



Ricordiamo che i numeri sono scritti in notazione posizionale e in base 10.

Ad esempio, abbiamo:

$$2359 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

Per poter scrivere tutti i numeri con un sistema posizionale in una data base n le cifre richieste sono tante quante il valore della base, da 0 fino al numero che precede la base.

Per scrivere i numeri **non interi** si utilizza ancora la **virgola**.

Come per la base *dieci* il cui il valore delle cifre dopo la virgola si ottengono moltiplicando per potenze di 10 con esponente negativo, anche per le altre basi, le cifre dopo la virgola dovranno essere moltiplicate per le corrispondenti potenze della base ma con esponente negativo.

Ad esempio:

$$0,364 = 0 + 3 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3} = 0 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000}$$

e con un numero non intero in base 2:

$$(1,011)_2 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right)_{10} = \left(\frac{11}{8} \right)_{10} = (1,375)_{10}$$



E i numeri periodici?

Vogliamo ora a considerare il valore $0,\bar{1}$ in sistemi di numerazione con basi diverse.

Per iniziare proviamo con la base due.

$$0,111111111\dots_{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

perciò la serie precedente può essere pensata come un numero periodico in base 2. Incredibile!

Per determinarne il valore di questo numero periodico possiamo pensare di riprendere in base *due* lo stesso procedimento usato in base dieci per trasformare il numero periodico in una frazione.

Proviamo a dimostrarlo:

- Poniamo $x = 0, \bar{1}_{(2)}$
- Vogliamo ora spostare la virgola di un posto ed ottenere $1, \bar{1}_{(2)}$:
occorre moltiplicare per $10_{(2)}$ (cioè 2 scritto in base due)

$$10_{(2)}x = 1, \bar{1}_{(2)} \Rightarrow 10_{(2)}x = 1 + 0, \bar{1}$$

da cui $10_{(2)}x - x = 1$ quindi $x(10_{(2)} - 1) = 1$

- Il calcolo nella parentesi corrisponde a $2-1$ ed è uguale ad 1

si ottiene infine $x = \frac{1}{1} = 1$



Abbiamo finalmente **dimostrato** che :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2-1} = 1$$

Come avevamo congetturato con l'attività delle torte.

**Idea
Geniale!**



A questo punto possiamo pensare di volta in volta di **cambiare la base** per poter scrivere la serie come un numero decimale periodico di periodo 1 e trasformarlo poi nella frazione corrispondente.

$$0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 0,111111111\dots_{(2)} = 0, \bar{1}_{(2)}$$

$$0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = 0,111111111\dots_{(3)} = 0, \bar{1}_{(3)}$$

$$0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = 0,111111111\dots_{(4)} = 0, \bar{1}_{(4)}$$

$$0 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = 0,111111111\dots_{(10)} = 0, \bar{1}_{(10)}$$

$$0 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots = 0,111111111\dots_{(n)} = 0, \bar{1}_{(n)}$$



- Ripetendo per $0, \bar{1}_{(3)}$ il procedimento visto per $0, \bar{1}_{(2)}$

Si ha $x = 0, \bar{1}_{(3)}$,

$$10_{(3)}x = 1, \bar{1}_{(3)} \Rightarrow 10_{(3)}x = 1 + x \Rightarrow x(10_{(3)} - 1)_{(3)} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{(10_{(3)} - 1)_{(3)}} = \frac{1}{\dots\dots}$$

- E in generale per una qualunque base n, si ha $x = 0, \bar{1}_{(n)}$,

$$10_{(n)}x = 1, \bar{1}_{(n)} \Rightarrow 10_{(n)}x = 1 + x \Rightarrow x(10_{(n)} - 1)_{(n)} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{(10_{(n)} - 1)_{(n)}} = \frac{1}{\dots\dots\dots}$$

- Possiamo quindi affermare con convinzione che

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 0,11111111\dots_{(2)} = 0,\overline{1}_{(2)} = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = 0,11111111\dots_{(3)} = 0,\overline{1}_{(3)} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$



e in generale che:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots = 0,11111111\dots_{(n)} = 0,\overline{1}_{(n)} = \frac{1}{n-1}$$

Abbiamo dovuto percorrere una strada tutt'altro che semplice e tirato in gioco diversi concetti matematici (come le basi di numerazione diverse da 10 ed i numeri periodici) ma alla fine...

Abbiamo dimostrato la nostra congettura!

Chiariamo alcuni termini per esprimerci in modo più preciso.



Una **progressione geometrica** è una **successione** di infiniti termini in cui:

- il secondo termine si ottiene dal primo moltiplicando per un certo numero chiamato **ragione**,
- e tutti i termini successivi si ottengono dal precedente moltiplicando sempre per la stessa ragione.



Una **serie geometrica** è la somma degli infiniti termini di una progressione geometrica.

Quindi :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \quad \text{è una serie geometrica di ragione } \dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \quad \text{è una serie geometrica di ragione } \dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots \quad \text{è una serie geometrica di ragione } \dots\dots\dots$$

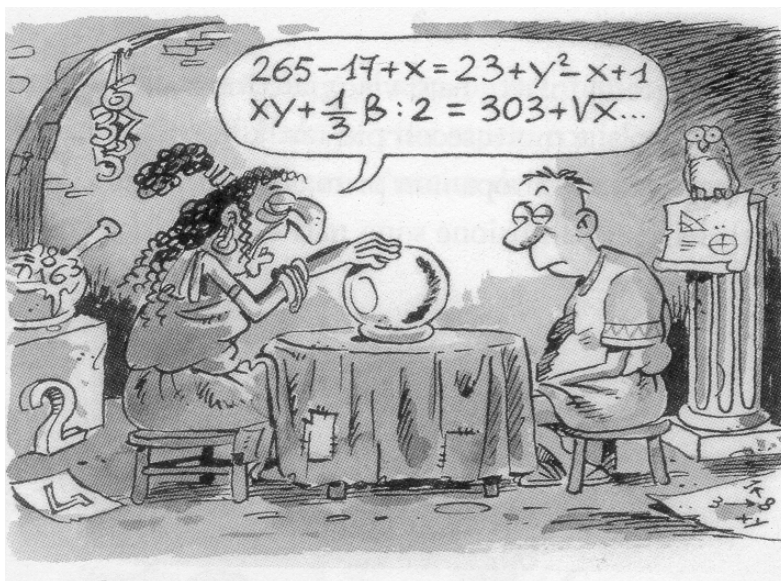
Ebbene, abbiamo dimostrato la regola per trovare la somma della serie geometrica di ragione $\frac{1}{n}$,

che è $\frac{1}{n-1}$

Ci sembra di essere arrivati ad una meta!

Ricorda però che questo è un viaggio infinito, quindi dopo una meta ci aspettiamo ancora una meta e poi ancora...

Senza contare che stiamo trattando gli stessi argomenti da molti punti di vista e questo certo ci serve per rendere il *viaggio infinito*, ma anche per comprendere meglio le questioni.



A proposito: possiamo ritornare alla corsa tra Achille e la tartaruga?

Ma prima vi diamo la possibilità di "rilassarvi".



Sapete la barzelletta dei matematici in un Pub?
I docenti la conoscono!

Attività 8 – Achille e la Tartaruga (reprise)

Problema di Achille e la tartaruga: nuova formulazione!



Certo non è verosimile che Achille corra soltanto ad una velocità doppia di quella di una tartaruga.

Supponiamo così che "Il Più Veloce" corra **10 volte più veloce della tartaruga** e che conceda all'avversaria **un vantaggio di 100 m.**

Completa la tabella che indica la posizione di Achille e della tartaruga in diversi momenti.

	Al Via	Step 1	Step 2	Step 3	Step 4	Step 5
Achille	0	100	100 + 10
Tartaruga	100	$100 + \frac{1}{10} 100$	$110 + \frac{1}{10} \dots\dots$

Ad ogni "Step" considerato la tabella indica che la tartaruga è **sempre davanti ad Achille**, di una frazione sempre più piccola (ovvero di un decimo della potenza di 10 precedente), ma è comunque davanti ad Achille.

Quindi sembra che Achille non possa raggiungerla!

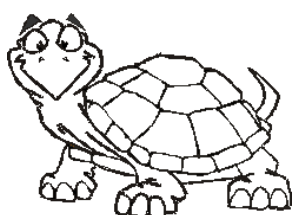


Consideriamo però le situazioni in modo separato, calcoliamo il tragitto percorso da Achille globalmente (cioè "alla fine" di questa corsa particolare).

Distanza percorsa da Achille = $100 + 10 + 1 + \dots\dots + \dots\dots + \dots\dots + \dots\dots$

Tale somma è rappresentata da un numero decimale periodico che può essere trasformato in frazione.

Distanza percorsa da Achille = =



Distanza percorsa dalla Tartaruga = $10 + 1 + 0,1 + 0,01 + \dots + \dots + \dots$

Anche in questo caso si ottiene un numero decimale periodico

Che trasformato in frazione dà:



Achille raggiunge o non raggiunge la tartaruga?

Cerchiamo di risolvere la questione attraverso le equazioni.

Ricordando che la velocità è uguale al rapporto tra lo spazio percorso ed il tempo impiegato, possiamo pensare che la distanza percorsa da **Achille**, indicata con s_A , sarà data dalla sua velocità v_A per il tempo t_A impiegato a percorrerla.

$$s_A = v_A \cdot t_A \quad \text{quindi}$$

$$t_A = \dots \quad (\bullet)$$

Analogamente, **per la tartaruga**

$$s_T = \dots \quad \text{quindi}$$

$$t_T = \dots \quad (\bullet\bullet)$$

Osserviamo quindi che:

- la velocità di Achille è 10 volte quella della tartaruga, ovvero $v_A = 10 \cdot v_T$;
- quando si incontreranno, lo spazio percorso da Achille sarà quello percorso dalla tartaruga più 100 metri, mentre il tempo trascorso sarà lo stesso per entrambi ossia

$$\begin{cases} s_A = \dots + 100 \\ t_A = t_T \end{cases}$$

Per risolvere la questione puoi dunque completare lo schema seguendo le istruzioni:

1. Sostituisci a t_A e t_T le espressioni trovate in (\bullet) e $(\bullet\bullet)$
2. Nella formula scrivi v_A in funzione di v_T e s_A in funzione di s_T

$$t_T = t_A \Rightarrow \boxed{\dots\dots\dots} \Rightarrow \frac{s_T}{v_T} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

Eliminando i denominatori, la velocità "scompare" e resta un'equazione nell'incognita s_T .
Risolvila!

.....

Hai dunque ricavato che $s_T = \dots\dots\dots$

Cioè Achille raggiungerà la tartaruga esattamente a metri dalla partenza!
E subito dopo potrà superarla!

Avevamo già prima ottenuto questo risultato?

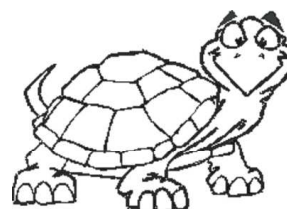
L'infinito spesso produce strani effetti! Va quindi maneggiato con cautela

Conclusion

Il risultato trovato intuitivamente nel "gioco delle torte", come nel calcolo della "strada percorsa da Achille per raggiungere la tartaruga", era esatto, cioè:



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots &= 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



Le serie che abbiamo esaminato hanno un risultato finito perciò vengono dette **CONVERGENTI** cioè che si "avviano" ad un numero finito.

In ciascuna di queste serie si aggiunge sempre qualcosa, ma i termini diventano sempre più piccoli. **Pur aggiungendo sempre qualcosa, si ottiene un risultato finito.**

SORGE SPONTANEA UNA DOMANDA:

"Avviene sempre così quando la serie è formata da una successione di numeri che vanno via via decrescendo?"

Ecco una domanda su cui riflettere:

Un allievo svegliato durante le vacanze decide di svolgere $\frac{1}{2}$ compiti nella prima settimana, $\frac{1}{3}$ nella seconda, $\frac{1}{4}$ nella quarta settimana ... e così via in un anno in cui le settimane di vacanze sono infinite. Concluderà tutto il lavoro svolto prima dell'inizio della scuola?



Discuti con i tuoi compagni



Avrete ora la prima domanda il cui risultato sarà importante per la Caccia al Tesoro.



Domanda n°1

Verrà consegnata a tutti voi contemporaneamente.

A partire da ora, ogni volta che vedrete il bauletto, potrete pensare di riempirlo alla semplice condizione di rispondere correttamente ad una domanda.