

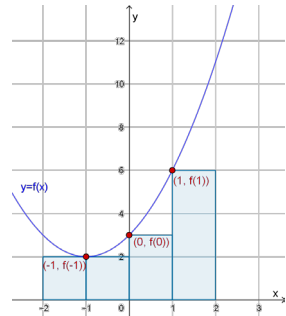
K1

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ ja väli on $[-2, 2]$. Kun väli jaetaan neljään osaväliin, niin yhden osavälin pituus on

$$d = \frac{2 - (-2)}{4} = 1.$$

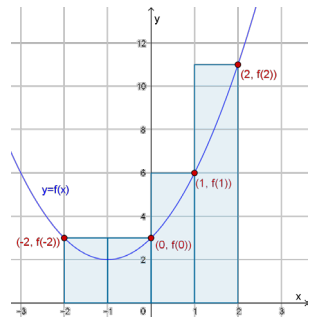
a) Lasketaan alasumma

$$\begin{aligned} s_4 &= \sum_{k=1}^4 m_k d \\ &= f(-1)d + f(-1)d + f(0)d + f(1)d \\ &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \\ &= 13 \end{aligned}$$



b) Lasketaan yläsumma

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{k=1}^4 M_k d \\ &= f(-2)d + f(0)d + f(1)d + f(2)d \\ &= 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 11 \cdot 1 \\ &= 23 \end{aligned}$$



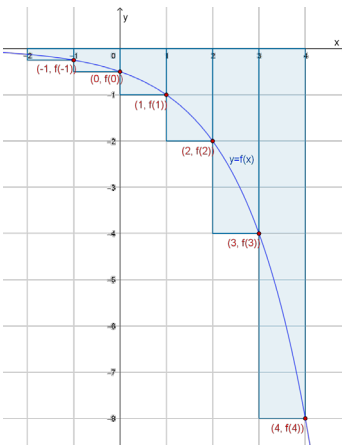
Vastaus a) 13
 b) 23

K2

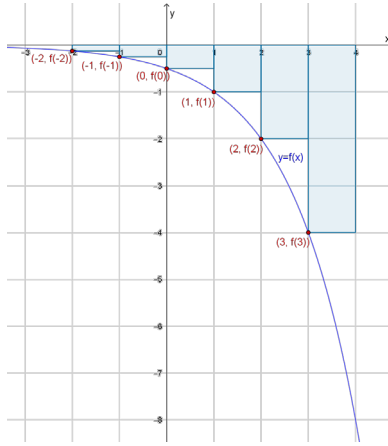
$f(x) = -2^{x-1}$ ja väli on $[-2, 4]$. Kun väli jaetaan kuuteen osaväliin, niin yhden osavälin pituus on

$$d = \frac{4 - (-2)}{6} = 1.$$

Alasumma



Yläsumma



a) Lasketaan ala- ja yläsumma

$$\begin{aligned}
 s_6 &= \sum_{k=1}^6 m_k d \\
 &= f(-1)d + f(0)d + f(1)d + f(2)d + f(3)d + f(4)d \\
 &= -2^{-2} \cdot 1 - 2^{-1} \cdot 1 - 2^0 \cdot 1 - 2^1 \cdot 1 - 2^2 \cdot 1 - 2^3 \cdot 1 \\
 &= -15,75
 \end{aligned}$$

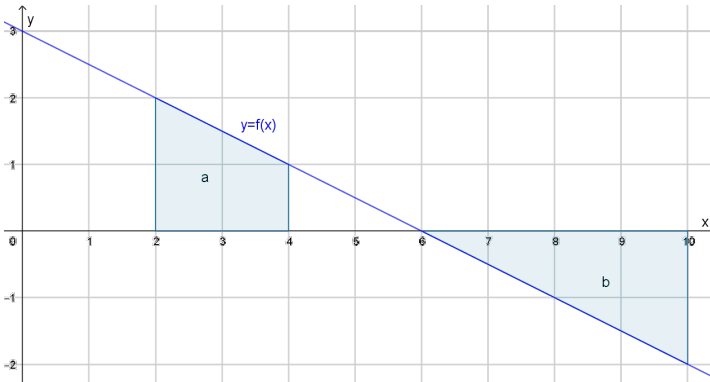
$$\begin{aligned}
S_6 &= \sum_{k=1}^6 M_k d \\
&= f(-2)d + f(-1)d + f(0)d + f(1)d + f(2)d + f(3)d \\
&= -2^{-3} \cdot 1 - 2^{-2} \cdot 1 - 2^{-1} \cdot 1 - 2^0 \cdot 1 - 2^1 \cdot 1 - 2^2 \cdot 1 - 2^3 \cdot 1 \\
&= -7,875
\end{aligned}$$

- b) Funktion f arvot ovat välillä $[-2, 4]$ negatiivisia, jolloin ala- ja yläsumma antavat arvion kuvaajan ja x -akselin rajaaman alueen pinta-alan vastaluvulle. Pinta-alan vastaluku on lukujen $-15,75$ ja $-7,875$ välissä, joten A on lukujen $7,875$ ja $15,75$ välissä. Kokonaislukujen tarkkuudella A on lukujen 7 ja 16 välissä.

Vastaus a) $s_6 = -15,75$ ja $S_6 = -7,875$
 b) lukujen 7 ja 16 välissä

K3

Hyödynnetään integraalin ja pinta-alan yhteyttä.



- a) Kuvaajan ja x -akselin rajaama alue on puolisuunnikas ja se sijaitsee x -akselin yläpuolella. Määrätty integraali on siis yhtä suuri kuin alueen pinta-ala.

$$\int_2^4 f(x)dx = \frac{2+1}{2} \cdot 2 = 3$$

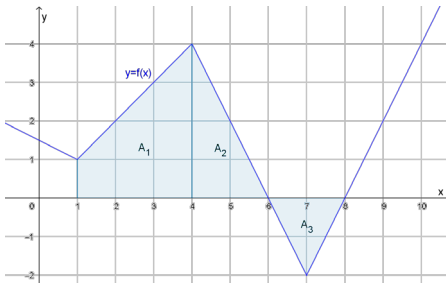
- b) Kuvaajan ja x -akselin rajaama alue on suorakulmainen kolmio ja se sijaitsee x -akselin alapuolella. Määrätty integraali on siis yhtä suuri kuin alueen pinta-alan vastaluku.

$$\int_6^{10} f(x)dx = -\frac{1}{2} \cdot (10-6) \cdot 2 = -4$$

Vastaus a) 3
 b) -4

K4

Hyödynnetään integraalin ja pinta-alan yhteyttä.



- a) Kuvaajan ja x -akselin rajaama alue A_1 on puolisuunnikas ja x -akselin yläpuolella.

$$\int_1^4 f(x)dx = \frac{1+4}{2} \cdot 3 = 7\frac{1}{2}$$

- b) Kuvaajan ja x -akselin rajaama alue muodostaa kaksi kolmiota, joista A_2 on x -akselin yläpuolella ja A_3 sen alapuolella.

$$\begin{aligned} \int_4^8 f(x)dx &= A_2 - A_3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int_1^8 f(x)dx = \underbrace{\int_1^4 f(x)dx}_{a)} + \underbrace{\int_4^8 f(x)dx}_{b)} = 7\frac{1}{2} + 2 = 9\frac{1}{2}$$

- Vastaus
- a) $7\frac{1}{2}$
 - b) 2
 - c) $9\frac{1}{2}$

K5

Hyödynnetään integraalin ja pinta-alan yhteyttä. Jos alue on x -akselin yläpuolella, niin integraalin arvo tuolla välillä on yhtä suuri kuin pinta-ala. Jos alue on x -akselin alapuolella, niin integraalin arvo on yhtä suuri kuin pinta-alan vastaluku.

Lisäksi tiedetään, että $A_1 = A_4$ ja $A_2 = A_3$.

$$\text{a) } \int_{-4}^6 f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 = 10$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{-4}^5 f(x) dx - \int_2^5 f(x) dx &= \int_{-4}^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx - \int_2^5 f(x) dx \\ &= \int_{-4}^2 f(x) dx \\ &= A_1 - A_2 + A_3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_{-2}^4 2f(x) dx + \int_6^2 f(x) dx &= 2 \int_{-2}^4 f(x) dx - \int_2^6 f(x) dx \\ &= 2(-A_2 + A_3 - A_4) - (-A_4 + A_5) \\ &= -A_4 - A_5 \\ &= -5 - 10 \\ &= -15 \end{aligned}$$

Vastaus a) 10
 b) 5
 c) -15

K6

Muokataan lausekkeita määrätyn integraalin laskusääntöjen mukaisesti niin, että voidaan hyödyntää tunnettuja arvoja.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \int_{-6}^6 (x^3 - 2x^2 + 3x - 4) dx \\
 &= \int_{-6}^6 x^3 dx + \int_{-6}^6 -2x^2 dx + \int_{-6}^6 3x dx + \int_{-6}^6 -4 dx \\
 &= \int_{-6}^6 x^3 dx - 2 \int_{-6}^6 x^2 dx + 3 \int_{-6}^6 x dx - 4 \int_{-6}^6 1 dx \\
 &= 0 - 2 \cdot 144 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 12 \\
 &= -336
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \int_{-6}^0 (4x^3 + 2x) dx - 2 \int_6^0 (2x^3 + x) dx \\
 &= \int_{-6}^0 4x^3 dx + \int_{-6}^0 2x dx + 2 \left(\int_0^6 2x^3 dx + \int_0^6 x dx \right) \\
 &= 4 \int_{-6}^0 x^3 dx + 2 \int_{-6}^0 x dx + 4 \int_0^6 x^3 dx + 2 \int_0^6 x dx \\
 &= 4 \int_{-6}^6 x^3 dx + 2 \int_{-6}^6 x dx \\
 &= 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

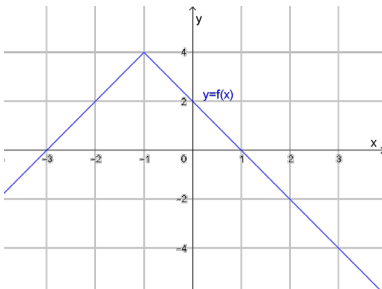
c)

$$\begin{aligned}& \int_{-6}^8 \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) dx + \int_8^{11} \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) dx - \int_6^{11} \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) dx \\&= \int_{-6}^{11} \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) dx - \int_6^{11} \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) dx \\&= \int_{-6}^{11} \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) dx + \int_{11}^6 \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) dx \\&= \int_{-6}^6 \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) dx \\&= \frac{1}{3} \int_{-6}^6 x^3 dx + \int_{-6}^6 x^2 dx \\&= \frac{1}{3} \cdot 0 + 144 \\&= 144\end{aligned}$$

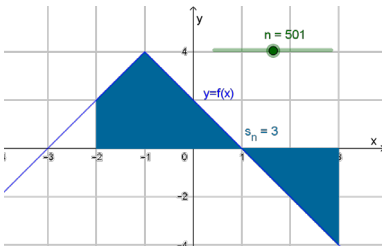
Vastaus a) -336
 b) 0
 c) 144

K7

- a) Piirretään geometriaohjelmalla.



- b) Alasumma voidaan määrittää GeoGebrassa komennolla $\text{Alasumma}(f, -2, 3, n)$, missä osavälien määrää n voidaan muuttaa liukukytkimellä.



Osavälien määrän kasvaessa alasumma lähestyy arvoa 3,0.

- c) Alasumma on nyt laskettava kahdessa osassa, jolloin välillä $[-2, 1]$ ala $A_1 = s_n$ ja välillä $[1, 3]$ ala $A_2 = |s_n|$.

$$A1 = \text{Alasumma}(f, -2, 1, n)$$

$$A2 = \text{abs}(\text{Alasumma}(f, 1, 3, n))$$

$$A = A1 + A2,$$

Osavälien määrän kasvaessa A_1 lähestyy arvoa 7,0 ja A_2 arvoa 4,0, jolloin summa $A_1 + A_2$ lähestyy arvoa 11,0.

Vastaus b) 3,0
 c) 11,0

K8

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = (5 + x^4)^3$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3(5 + x^4)^2 \cdot D(5 + x^4) \\ &= 3(5 + x^4)^2 \cdot 4x^3 \\ &= 12x^3 (x^4 + 5)^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vastaus On osoitettu, että $F'(x) = f(x)$, joten funktio F on funktion f integraalifunktio.

K9

- a) Funktion f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x$, sillä

$$\begin{aligned} F'_0(x) &= D\left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x + 1 \\ &= 2x^3 - 4x + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Tällöin kaikki integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0(x) + C \\ &= \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x + C \end{aligned}$$

- b) Funktion f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = (1 - \pi)x$, sillä

$$\begin{aligned} F'_0(x) &= D((1 - \pi)x) \\ &= 1 - \pi \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Tällöin kaikki integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0(x) + C \\ &= (1 - \pi)x + C \end{aligned}$$

Vastaus a) $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x + C$

b) $F(x) = (1 - \pi)x + C$

K10

- a) Funktion f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$, sillä

$$\begin{aligned} F'_0(x) &= D\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right) \\ &= x^2 + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

- b) Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int (x^2 + 1) dx \\ &= F_0(x) + C \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x + C \end{aligned}$$

- c) Integraalifunktion F kuvaaja kulkee pisteen $(3, -5)$ kautta, kun $F(3) = -5$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio C .

$$\begin{aligned} F(3) &= -5 \\ \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 + C &= -5 \\ 9 + 3 + C &= -5 \\ 12 + C &= -5 \\ C &= -17 \end{aligned}$$

Kysytty integraalifunktio on $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 17$.

Vastaus a) Esimerkiksi $F_0(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$

b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + C$

c) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 17$

K11

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{5} = \frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{5}$$

Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{5} \right) dx \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x + C \\ &= \frac{2}{15}x^3 - \frac{3}{5}x + C \end{aligned}$$

Integraalifunktion F kuvaaja kulkee pisteen $(-5, 1)$ kautta, kun $F(-5) = 1$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio C .

$$F(-5) = 1$$

$$\frac{2}{15} \cdot (-5)^3 - \frac{3}{5} \cdot (-5) + C = 1$$

$$-\frac{10}{15} \cdot 25 + 3 + C = 1$$

$$-\frac{2}{3} \cdot 25 + C = -2$$

$$C = -\frac{6}{3} + \frac{50}{3}$$

$$C = \frac{44}{3}$$

Kysytty integraalifunktio on $F(x) = \frac{2}{15}x^3 - \frac{3}{5}x + \frac{44}{3}$.

Vastaus $F(x) = \frac{2}{15}x^3 - \frac{3}{5}x + \frac{44}{3}$

K12

Tutkitaan, onko $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = x \sin x + \cos x$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= D(x \sin x + \cos x) \\ &= 1 \cdot \sin x + x \cos x - \sin x \\ &= x \cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vastaus On

K13

Funktion $f(x) = 3x^2 - 6$ integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) \, dx \\ &= \int (3x^2 - 6) \, dx \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 - 6x + C \\ &= x^3 - 6x + C \end{aligned}$$

Integraalifunktion ääriarvoja voidaan tarkastella funktion f avulla, koska $F'(x) = f(x)$.

Määritetään derivaatan nollakohdat:

$$F'(x) = 0$$

$$f(x) = 0$$

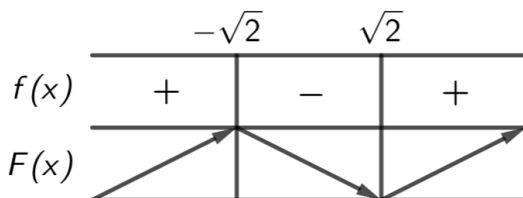
$$3x^2 - 6 = 0$$

$$3x^2 = 6$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolloin nollakohtien välissä se saa negatiivisia arvoja. Laaditaan kulkukaavio:



Kulkukaaviosta nähdään, että funktiolla $F(x)$ on maksimikohta $x = -\sqrt{2}$, jossa maksimiarvo on -6 , joten

$$F(-\sqrt{2}) = -6$$

$$(-\sqrt{2})^3 - 6 \cdot (-\sqrt{2}) + C = -6$$

$$-2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + C = -6$$

$$C = -6 - 4\sqrt{2}$$

Siis kysytty integraalifunktio on $F(x) = x^3 - 6x - 6 - 4\sqrt{2}$.

Vastaus $F(x) = x^3 - 6x - 6 - 4\sqrt{2}$

K14

$$\begin{aligned}\text{a) } \int_2^6 4x \, dx &= \left[4 \cdot \frac{1}{2} x^2 \right]_2^6 \\ &= \left[2x^2 \right]_2^6 \\ &= 2 \cdot 6^2 - 2 \cdot 2^2 \\ &= 2 \cdot 36 - 8 \\ &= 72 - 8 \\ &= 64\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \int_{-1}^2 (2x^2 - 6) \, dx &= \left[2 \cdot \frac{1}{3} x^3 - 6x \right]_{-1}^2 \\ &= \left[\left(\frac{2}{3} x^3 - 6x \right) \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 - \left(\frac{2}{3} \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1) \right) \\ &= \frac{16}{3} - 12 + \frac{2}{3} - 6 \\ &= \frac{18}{3} - 18 \\ &= 6 - 18 \\ &= -12\end{aligned}$$

Vastaus a) 64 b) -12

K15

Lasketaan ensin yhtälön vasemmalla puolella oleva määrätty integraali.

$$\begin{aligned}\int_a^{2a} (3-2x) dx &= \left/ (3x - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2) \right. \\ &= \left/ (3x - x^2) \right. \\ &= 3 \cdot 2a - (2a)^2 - (3a - a^2) \\ &= 6a - 4a^2 - 3a + a^2 \\ &= 3a - 3a^2\end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälöstä a .

$$\begin{aligned}\int_a^{2a} (3-2x) dx &= 0 \\ 3a - 3a^2 &= 0 \\ 3a(1-a) &= 0 \\ a = 0 \quad \text{tai} \quad 1-a &= 0 \\ a &= 1\end{aligned}$$

Vastaus $a = 0$ tai $a = 1$

K16

Ratkaistaan milloin lauseke $2x - 4$ on epänegatiivinen.

$$2x - 4 \geq 0$$

$$2x \geq 4$$

$$x \geq 2$$

Ilmaistaan integroitava lauseke paloittain ilman itseisarvoja.

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, & \text{kun } x \geq 2 \\ -(2x - 4), & \text{kun } x < 2 \end{cases}$$

Lasketaan määrätty integraali. Integroitavan funktion lauseke vaihtuu kohdassa $x = 2$.

$$\begin{aligned} \int_0^6 |2x - 4| dx &= \int_0^2 (-(2x - 4)) dx + \int_2^6 (2x - 4) dx \\ &= \int_0^2 (-2x + 4) dx + \int_2^6 (2x - 4) dx \\ &= \int_0^2 \left(-2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 4x\right) + \int_2^6 \left(2 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 4x\right) \\ &= \int_0^2 (-x^2 + 4x) + \int_2^6 (x^2 - 4x) \\ &= -2^2 + 4 \cdot 2 - (-0^2 + 4 \cdot 0) + 6^2 - 4 \cdot 6 - (2^2 - 4 \cdot 2) \\ &= -4 + 8 + 36 - 24 - 4 + 8 \\ &= 4 + 12 + 4 = 20 \end{aligned}$$

K17

Tehtävän funktiot ovat jatkuvia, kun $x > 0$.

a)

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x^2} dx &= \int 3x^{-2} dx \\ &= 3 \int x^{-2} dx \\ &= 3 \cdot (-1) \cdot x^{-1} + C \\ &= -\frac{3}{x} + C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x} dx &= 3 \int \frac{1}{x} dx \\ &= 3 \ln|x| + C && |x| = x, \text{ kun } x > 0 \\ &= 3 \ln x + C\end{aligned}$$

Vastaus

a) $-\frac{3}{x} + C$, kun $x > 0$

b) $3 \ln x + C$, kun $x > 0$

K18

Tehtävän funktiot ovat jatkuvia, kun $x > 0$.

a)

$$\int \sqrt[4]{x} dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{4}} dx$$

uusi eksponentti $\frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

uusi eksponentti $\frac{4}{5}$

$$= \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} + C$$

$$= \frac{4}{5} x^1 \cdot x^{\frac{1}{4}} + C$$

$$= \frac{4}{5} x \sqrt[4]{x} + C$$

b)

$$\int \frac{2}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int 2x^{-\frac{1}{2}} dx$$

uusi eksponentti $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

uusi kerroin 2

$$= 2 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 4\sqrt{x} + C$$

Vastaus

a) $\frac{4}{5}x^4\sqrt{x} + C$, kun $x > 0$

b) $4\sqrt{x} + C$, kun $x > 0$

K19

a)

$$\int (5x - 2)^7 dx$$

$$= \frac{1}{5} \int 5(5x - 2)^7 dx$$

$$s(x) = 5x - 2 \quad s'(x) = 5$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} (5x - 2)^8 + C$$

$$u(x) = x^7 \quad U(x) = \frac{1}{8} x^8$$

$$= \frac{1}{40} (5x - 2)^8 + C$$

b)

$$\int x\sqrt{x^2 + 5} dx$$

$$= \int x(x^2 + 5)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int 2x(x^2 + 5)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$s(x) = x^2 + 5 \quad s'(x) = 2x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2 + 5)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad U(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} (x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 5} + C$$

Vastaus

a) $\frac{1}{40} (5x - 2)^8 + C$

b) $\frac{1}{3} (x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 5} + C$

K20

a)

$$\begin{aligned} & \int_2^3 (1-x)^2 dx \\ &= -1 \int_2^3 -1 \cdot (1-x)^2 dx \\ &= -1 \int_2^3 \frac{1}{3} (1-x)^3 \\ &= -\frac{1}{3} \int_2^3 (1-x)^3 \\ &= -\frac{1}{3} ((1-3)^3 - (1-2)^3) \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \int_2^3 \frac{1}{1-x} dx \\ &= -1 \int_2^3 \frac{-1}{1-x} dx \\ &= -1 \int_2^3 \ln|x-1| \\ &= -1 \cdot (\ln|3-1| - \ln|2-1|) \\ &= -1 \cdot (\ln 2 - 0) \\ &= -\ln 2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx \\ &= \int_2^3 1 \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \left/ 2(1+x)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &= \left/ 2\sqrt{1+x} \right. \\ &= 2(\sqrt{1+3} - \sqrt{1+2}) \\ &= 4 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vastaus

a) $\frac{7}{3}$

b) $-\ln 2$

c) $4 - 2\sqrt{3}$

K21

a) Voidaan.

$$\int e^{5x+1} dx = \frac{1}{5} \int 5e^{5x+1} dx = \frac{1}{5} e^{5x+1} + C$$

b) Ei voida. Sisäfunktion derivaattaa $2x$ ei saada muokattua ulkofunktion eteen.

c) Voidaan.

$$\int x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4} e^{x^4} + C$$

d) Voidaan.

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{e^x} dx &= \int 3e^{-x} dx = -3 \int -1 \cdot e^{-x} dx \\ &= -3e^{-x} + C = -\frac{3}{e^x} + C \end{aligned}$$

Vastaus

a) $\frac{1}{5} e^{5x+1} + C$

b) ei voida

c) $\frac{1}{4} e^{x^4} + C$

d) $-\frac{3}{e^x} + C$

K22

Ratkaistaan funktion $f(x) = 5 - e^x$ nollakohta.

$$5 - e^x = 0$$

$$e^x = 5$$

$$x = \ln 5$$

Koska funktio f on epänegatiivinen välillä $[0, \ln 5]$, niin pinta-ala on määrätty integraali.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\ln 5} (5 - e^x) dx \\ &= \left[5x - e^x \right]_0^{\ln 5} \\ &= (5 \ln 5 - e^{\ln 5}) - (5 \cdot 0 - e^0) \\ &= 5 \ln 5 - 5 + 1 \\ &= 5 \ln 5 - 4 \end{aligned}$$

Vastaus

$$5 \ln 5 - 4$$

K23

a)

$$\int \sin(8x-1)dx$$

$$= \frac{1}{8} \int 8 \sin(8x-1)dx$$

$$s(x) = 8x - 1 \quad s'(x) = 8$$

$$= \frac{1}{8} (-\cos(8x-1)) + C$$

$$u(x) = \sin x \quad U(x) = -\cos x$$

$$= -\frac{1}{8} \cos(8x-1) + C$$

b) $\int (5 \cos x + 1)dx = 5 \sin x + x + C$

Vastaus

a) $-\frac{1}{8} \cos(8x-1) + C$

b) $5 \sin x + x + C$

K24

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x - \cos 2x) dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx \\
 &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos 2x dx \\
 &= 2 \left[-\cos x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left[\sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= -2 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(\sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) \\
 &= -2 \cdot \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \cdot (0 - 1) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \\
 &= \sqrt{2} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Vastaus

$$\sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

K25

a)

$$\begin{aligned} & \int \sin x \cos^4 x dx \\ &= -1 \int -\sin x \cdot (\cos x)^4 dx \\ &= -1 \cdot \frac{1}{5} (\cos x)^5 + C \\ &= -\frac{1}{5} \cos^5 x + C \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \int \frac{\cos x}{3 \sin^2 x} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \cos x \cdot (\sin x)^{-2} dx \\ &= \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (\sin x)^{-1} + C \\ &= -\frac{1}{3 \sin x} + C \end{aligned}$$

Vastaus

$$\text{a)} \quad -\frac{1}{5} \cos^5 x + C$$

$$\text{b)} \quad -\frac{1}{3 \sin x} + C, \text{ kun } 0 < x < \pi$$

K26

Funktio $f(x) = 4e^x - e^{3x}$ on kaikkialla jatkuva.

Määritetään integraalifunktiot (laskimella).

$$F(x) = 4e^x - \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Tutkitaan funktion F kulkua derivaattafunktion f avulla.
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat (laskimella).

$$4e^x - e^{3x} = 0$$

$$e^x(4 - e^{2x}) = 0$$

$$e^x = 0 \quad \text{tai} \quad 4 - e^{2x} = 0$$

$$\text{ei ratk.} \quad e^{2x} = 4$$

$$2x = \ln 4$$

$$x = \ln 2 \approx 0,69$$

Laaditaan funktion F kulkukaavio.

x	$f(x)$	merkki
0	3	+
1	-9,21...	-

	$\ln 2$	
$f(x)$	+	-
$F(x)$		
	max	

Funktio F saa suurimman arvonsa kohdassa $x = \ln 2$.
Suurimman arvon tulee olla 5.

Ratkaistaan C .

$$F(\ln 2) = 5$$

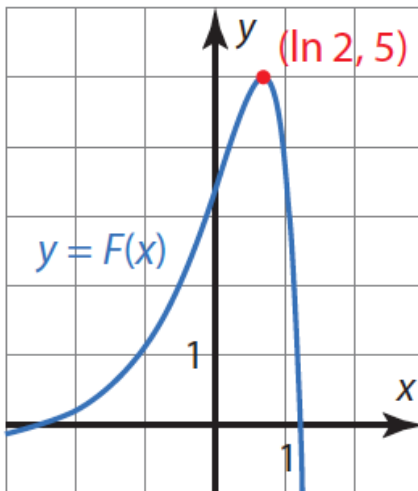
$$4e^{\ln 2} - \frac{1}{3}e^{3\ln 2} + C = 5$$

$$8 - \frac{8}{3} + C = 5$$

$$C = -\frac{1}{3}$$

Saadaan

$$F(x) = 4e^x - \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}.$$



Vastaus

$$F(x) = 4e^x - \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}$$

K27

a) Funktio $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ on määritelty, kun $x \neq \frac{1}{2}$.

Määritetään integraalifunktio välillä $x > \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{2x-1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C && 2x-1 > 0, \text{ kun } x > \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(2x-1) + C \end{aligned}$$

Määritetään integraalifunktio välillä $x < \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{2x-1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|2x-1| + D && 2x-1 < 0, \text{ kun } x < \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(1-2x) + D \end{aligned}$$

b) Määritetään integroimisvakiot.

Piste $(0, 0)$ kuuluu alueeseen $x < \frac{1}{2}$.

$$F(0) = 0$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 - 2 \cdot 0) + D = 0$$

$$D = 0$$

Piste $(1, 5)$ kuuluu alueeseen $x > \frac{1}{2}$.

$$F(1) = 5$$

$$\frac{1}{2} \ln(2 \cdot 1 - 1) + C = 5$$

$$C = 5$$

Vastaus

$$\text{a) } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(2x - 1) + C, & \text{kun } x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \ln(1 - 2x) + D, & \text{kun } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{b) } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(2x - 1) + 5, & \text{kun } x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \ln(1 - 2x), & \text{kun } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

K28

a) Sievennetään funktion lauseketta.

$$\frac{\ln x^2}{x} = \frac{2 \ln x}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

Funktio on määritelty ja jatkuva, kun $x > 0$.

Integroidaan.

$$\begin{aligned} & \int \frac{\ln x^2}{x} dx \\ &= \int 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^1 dx \quad s(x) = \ln x \quad s'(x) = \frac{1}{x} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C \quad u(x) = x^1 \quad U(x) = \frac{1}{2} x^2 \\ &= (\ln x)^2 + C \end{aligned}$$

Saadaan $(\ln x)^2 + C$, missä $x > 0$.

b) Sievennetään funktion lauseketta.

$$\begin{aligned}\frac{\tan^2 x}{\sin x} &= (\tan x)^2 \cdot \frac{1}{\sin x} \\&= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin x} \\&= \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} \cdot \frac{1}{\sin x} \\&= \frac{\sin x}{(\cos x)^2} \\&= \sin x \cdot (\cos x)^{-2}\end{aligned}$$

Funktio on määritelty ja jatkuva, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Integroidaan.

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan^2 x}{\sin x} dx \\&= \int \sin x \cdot (\cos x)^{-2} dx \\&= -1 \int -\sin x \cdot (\cos x)^{-2} dx \quad s(x) = \cos x \quad s'(x) = -\sin x \\&= -1 \cdot (-1) \cdot (\cos x)^{-1} + C \quad u(x) = x^{-2} \quad U(x) = -1 \cdot x^{-1} \\&= \frac{1}{\cos x} + C\end{aligned}$$

Vastaus

a) $(\ln x)^2 + C$, missä $x > 0$

b) $\frac{1}{\cos x} + C$, missä $0 < x < \frac{\pi}{2}$

K29

a) Funktio $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$.

Nimittäjä $1+|x| > 0$ kaikilla x .

Funktio f on määritelty ja jatkuva kaikilla x .

Poistetaan itseisarvomerkit.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & \text{kun } x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x}, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

b) Lasketaan integraali.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \\&= \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\&= -1 \int_{-1}^0 \frac{-1}{1-x} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\&= -1 \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\&= -1 \cdot \left(\ln(1-0) - \ln(1-(-1)) \right) + \ln(1+1) - \ln(1+0) \\&= -1 \cdot (0 - \ln 2) + \ln 2 - 0 \\&= 2 \ln 2\end{aligned}$$

Vastaus

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & \text{kun } x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x}, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

b) $2 \ln 2$

K30

a) Olkoon $f(x) = |\cos x|$ välillä $]0, \pi[$.

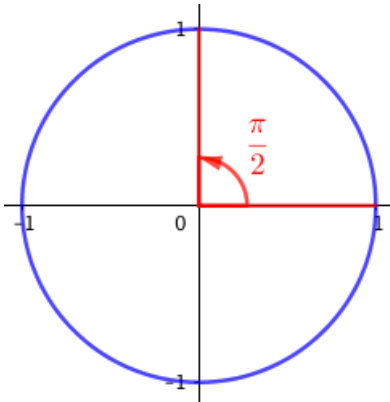
Ratkaistaan funktion f nollakohdat.

$$|\cos x| = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ missä } n \text{ on kokonaisluku}$$

Välillä $]0, \pi[$ on vain nollakohta $x = \frac{\pi}{2}$.



b) Kun $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, niin $\cos x \geq 0$ ja $|\cos x| = \cos x$.

Kun $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, niin $\cos x < 0$ ja $|\cos x| = -\cos x$.

Saadaan

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kun } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \text{kun } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

c) Määritetään integraalifunktio välillä $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

$$F(x) = \int \cos x dx = \sin x + C$$

Ratkaistaan vakio C .

$$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} + C = -\frac{1}{2}$$

$$C = -1$$

Määritetään integraalifunktio välillä $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

$$F(x) = \int -\cos x dx = -\sin x + D$$

Ratkaistaan vakio D . Koska funktio F on derivoituva, sen tulee olla jatkuva myös kohdassa $\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (-\sin x + D) = \sin \frac{\pi}{2} - 1$$

$$-1 + D = 1 - 1$$

$$D = 1$$

Integraalifunktio on siis

$$F(x) = \begin{cases} \sin x - 1, & \text{kun } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\sin x + 1, & \text{kun } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Vastaus

a) $x = \frac{\pi}{2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kun } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \text{kun } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

c) $F(x) = \begin{cases} \sin x - 1, & \text{kun } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\sin x + 1, & \text{kun } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

K31

Aina kun $f(x) \neq 0$, pätee

$$\int f'(x)f(x)dx = \int 1dx$$

$$\frac{1}{2}f(x)^2 = x + C$$

$$f(x)^2 = 2x + 2C$$

$$f(x) = \pm\sqrt{2x + 2C}$$

Koska $f(2) = 1$, niin $f(x) = \sqrt{2x + 2C}$.

Ratkaistaan vakio $2C$.

$$f(2) = 1$$

$$\sqrt{2 \cdot 2 + 2C} = 1$$

$$2C = -3$$

Saadaan $f(x) = \sqrt{2x - 3}$. Funktio on määritelty, kun $x \geq \frac{3}{2}$.

Vastaus

$$f(x) = \sqrt{2x - 3}, \text{ missä } x \geq \frac{3}{2}$$

K32

a) Koska hyttysten määrän kasvunopeus $f'(x)$ on suoraan verrannollinen hyttysten määrään $f(x)$, niin niiden suhde on vakio k .

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int k dx$$

$$\ln|f(x)| = kx + C$$

Hyttysten määrä $f(x) \geq 0$.

$$\ln f(x) = kx + C$$

$$f(x) = e^{kx+C}$$

$$= e^{kx} \cdot e^C$$

$$D = e^C$$

$$= De^{kx}$$

Ratkaistaan vakiot D ja k .

$$f(4) = 1000$$

$$f(0) = 100$$

$$100 \cdot e^{4k} = 1000$$

$$D \cdot e^0 = 100$$

$$e^{4k} = 10$$

$$D = 100$$

$$4k = \ln 10$$

$$k = \frac{\ln 10}{4}$$

Hyttysten määrän ajanhetkellä x tuntia tapahtuman alusta ilmaisee funktio $f(x) = 100e^{\frac{\ln 10}{4}x}$.

b) Lasketaan hyttysten määrä ajanhetkellä $x = 5$.

$$f(5) = 100e^{\frac{\ln 10}{4} \cdot 5} = 1778,28\dots \approx 1800$$

Vastaus

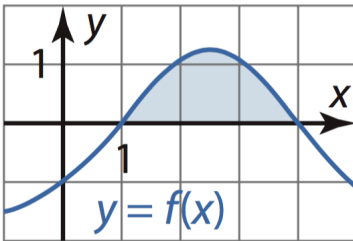
a) $f(x) = 100e^{\frac{\ln 10}{4}x}$

b) noin 1800

K33

1) $\int_1^4 f(x) dx$

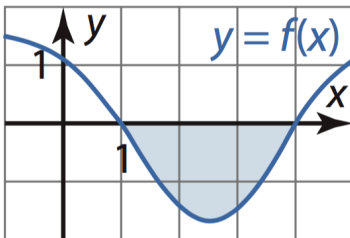
C



Perustelu: $f(x) \geq 0$ välillä $[1, 4]$.

2) $-\int_1^4 f(x) dx$

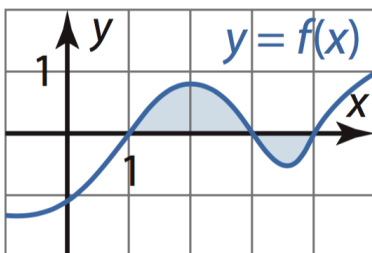
E



Perustelu: $f(x) \leq 0$ välillä $[1, 4]$.

$$3) \int_1^3 f(x) dx - \int_3^4 f(x) dx$$

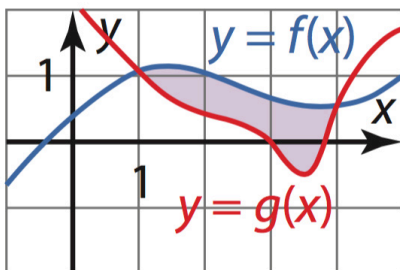
A



Perustelu: $f(x) \geq 0$ välillä $[1, 3]$ ja $f(x) \leq 0$ välillä $[3, 4]$.

$$4) \int_1^4 (f(x) - g(x)) dx$$

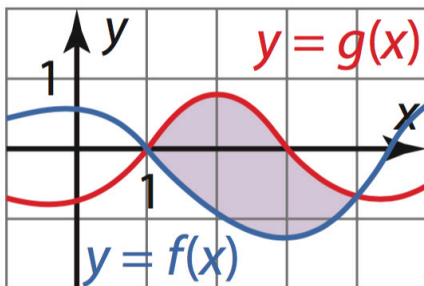
F



Perustelu: $f(x) \geq g(x)$ välillä $[1, 4]$.

5) $\int_1^4 (g(x) - f(x)) dx$

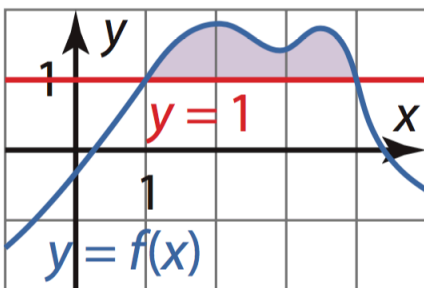
B



Perustelu: $g(x) \geq f(x)$ välillä $[1, 4]$.

6) $\int_1^4 (f(x) - 1) dx$

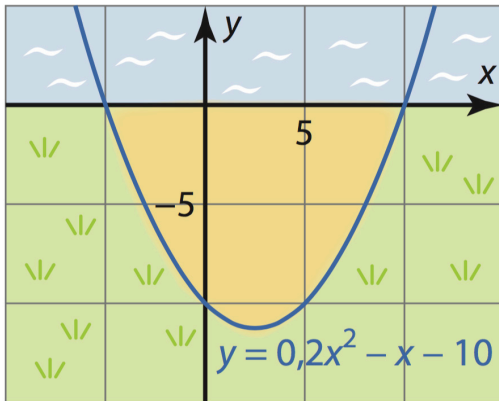
D



Perustelu: $f(x) \geq 1$ välillä $[1, 4]$.

Vastaus 1 – C, 2 – E, 3 – A, 4 – F, 5 – B, 6 – D

K34



Integroimisrajat saadaan paraabelin ja x -akselin leikkauskohdista.

$$0,2x^2 - x - 10 = 0$$

$$x = -5 \quad \text{tai} \quad x = 10$$

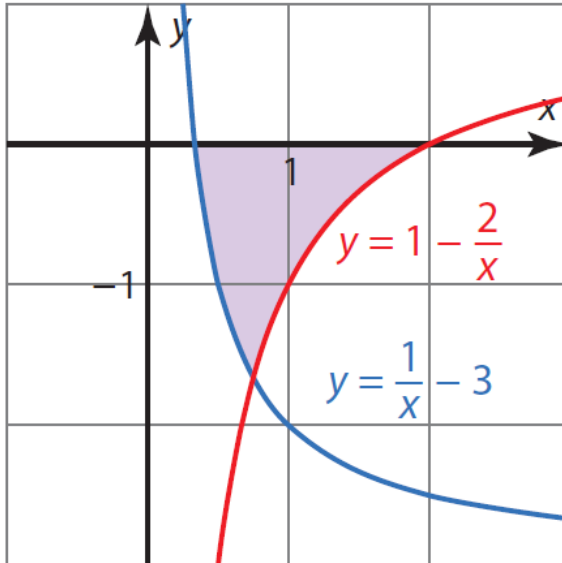
Välillä $[-5, 10]$ käyrä on x -akselin alapuolella. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= - \int_{-5}^{10} (0,2x^2 - x - 10) dx \\ &= \frac{225}{2} \\ &= 112,5 \approx 110 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus 110 m^2

K35

a) Piirretään alueen kuva.



- b) Integroimisrajat saadaan käyrien ja x -akselin leikkauskohdista sekä käyrien leikkauskohdasta.

$$\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{x} - 3 = 0 & 1 - \frac{2}{x} = 0 & \frac{1}{x} - 3 = 1 - \frac{2}{x} \\ x = \frac{1}{3} & x = 2 & x = \frac{3}{4} \end{array}$$

Välillä $[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$ aluetta rajaa käyrä $y = \frac{1}{x} - 3$ ja välillä $[\frac{3}{4}, 2]$

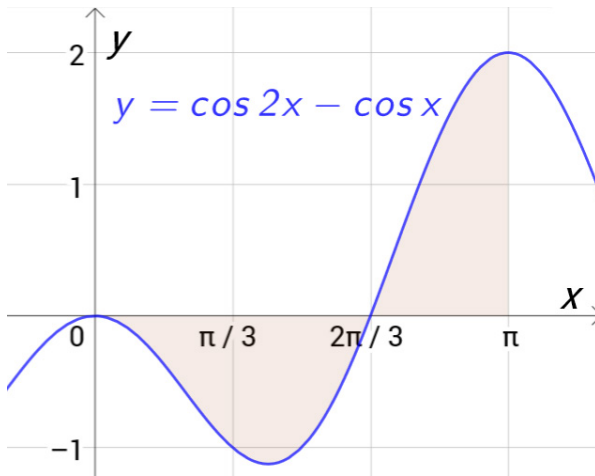
aluetta rajaa käyrä $y = 1 - \frac{2}{x}$. Alue on x -akselin alapuolella.

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= -\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{x} - 3\right) dx - \int_{\frac{3}{4}}^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right) dx \\ &= 8 \ln 2 - 4 \ln 3 \quad (\approx 1,2) \end{aligned}$$

Vastaus $8 \ln 2 - 4 \ln 3$

K36



Selvitetään käyrän ja x -akselin leikkauskohdat.

$$\cos 2x - \cos x = 0$$

$$\cos 2x = \cos x$$

$$2x = x + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 2x = -x + n \cdot 2\pi$$

$$x = n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 3x = n \cdot 2\pi$$

$$x = n \cdot \frac{2\pi}{3}$$

Leikkauskohdista vain $x = \frac{2\pi}{3}$ ($n=1$) kuuluu välille $[0, \pi]$.

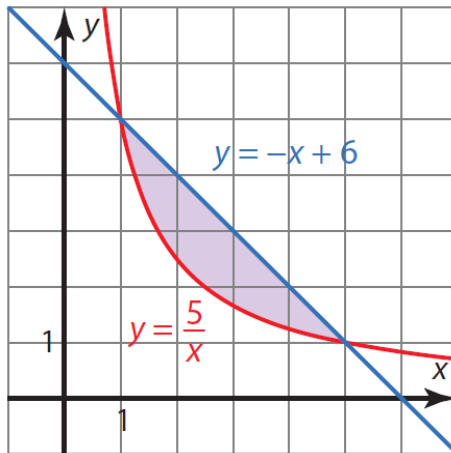
Pinta-alaa rajaava käyrä saa tarkasteluvälillä sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, joten integroidaan osissa.

$$\begin{aligned} A &= - \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos 2x - \cos x) \, dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (\cos 2x - \cos x) \, dx \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Vastaus $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

K37

- a) Piirretään käyrät sekä niiden rajaama alue.



- b) Integroitirajat saadaan käyrien leikkauskohdista.

$$\frac{5}{x} = -x + 6$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = 5$$

Kuvan perusteella pinta-alaa rajaa yläpuolelta suora ja alapuolelta hyperbeli. Lasketaan alueen pinta-ala.

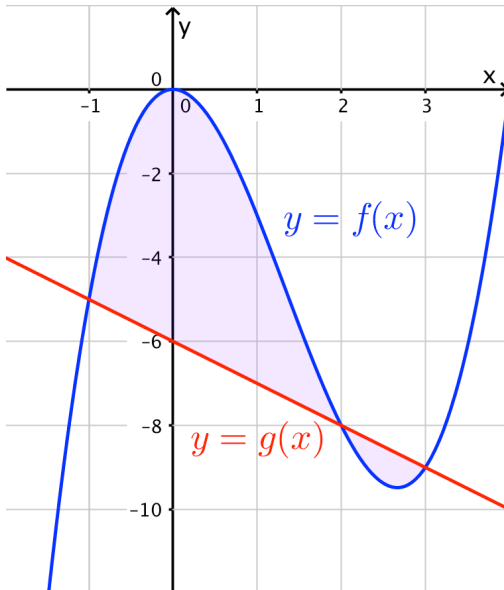
$$A = \int_1^5 \left(-x + 6 - \frac{5}{x} \right) dx$$

$$= 12 - 5 \ln 5 \quad (\approx 3,95)$$

Vastaus $12 - 5 \ln 5$

K38

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Integroimisrajat on funktioiden kuvaajien leikkauskohdat.

$$x^3 - 4x^2 = -x - 6$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 2 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

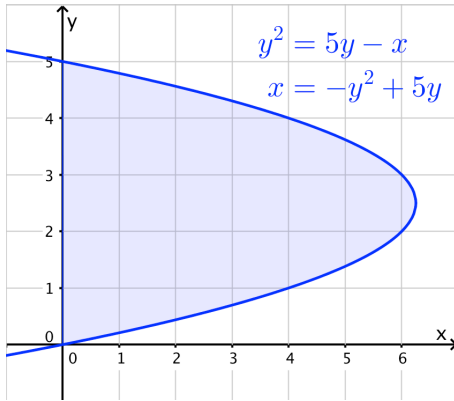
Kuvan perusteella välillä $[-1, 2]$ aluetta rajaa yläpuolelta funktion f kuvaaja ja alapuolelta funktion g kuvaaja. Välillä $[2, 3]$ aluetta rajaa yläpuolelta funktion g kuvaaja ja alapuolelta funktion f kuvaaja. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^2 (x^3 - 4x - (-x - 6)) dx + \int_2^3 (-x - 6 - (x^3 - 4x^2)) dx \\
 &= \int_{-1}^2 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx + \int_2^3 (-x^3 + 4x^2 - x - 6) dx \\
 &= \frac{71}{6} = 11\frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

Vastaus $11\frac{5}{6}$

K39

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Kuvaaja on vasemmalle aukeava paraabeli. Alueen pinta-ala saadaan integroimalla muuttujan y suhteen. Ratkaistaan käyrän yhtälöstä x .

$$y^2 = 5y - x$$

$$x = -y^2 + 5y$$

Integroimisrajat saadaan käyrän ja y -akselin leikkauskohdista.

$$-y^2 + 5y = 0$$

$$y = 0 \quad \text{tai} \quad y = 5$$

Lasketaan alueen pinta-ala.

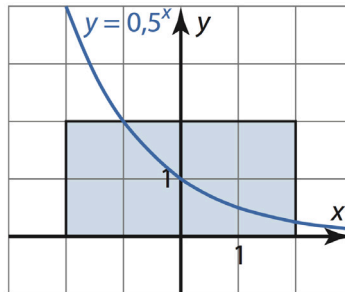
$$A = \int_0^5 (-y^2 + 5y) dy = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$$

Vastaus $20\frac{5}{6}$

K40

Lasketaan suorakulmion pinta-ala.

$$A_s = 4 \cdot 2 = 8$$



Ratkaistaan käyrän ja suorakulmiota ylhäältä rajoittavan suoran $y = 2$ leikkauskohta.

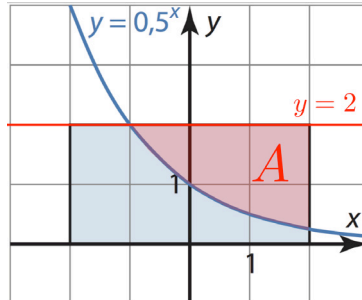
$$0,5^x = 2$$

$$x = -1$$

Käyrän yläpuolella oleva suorakulmion osa on suoran $y = 2$ ja käyrän $y = 0,5^x$ välillä $[-1, 2]$ rajaama alue. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-1}^2 (2 - 0,5^x) dx$$

$$= 6 - \frac{7}{4 \ln 2} \quad (= 3,4752\dots)$$



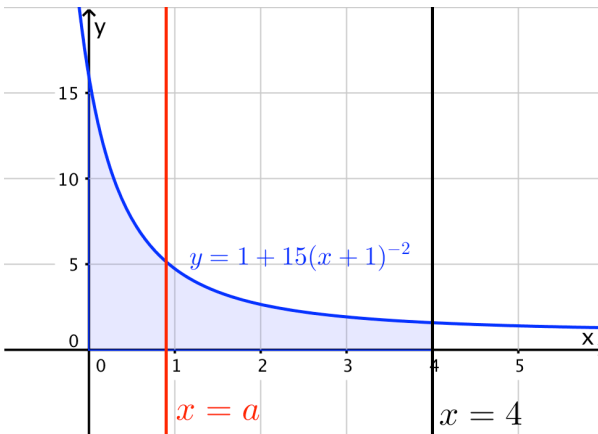
Lasketaan pinta-alojen suhde.

$$\frac{A}{A_s} = \frac{6 - \frac{7}{4 \ln 2}}{8} = 0,4344\dots \approx 43\%$$

Vastaus 43%

K41

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva. Alue voidaan jakaa kahteen osaan esimerkiksi y -akselin suuntaisella suoralla $x = a$ (missä $0 < a < 4$).



Käyrän ja x -akselin välillä $[0, a]$ rajaaman alueen pinta-ala tulee olla yhtä suuri kuin käyrän ja x -akselin välillä $[a, 4]$ rajaaman alueen pinta-ala. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a .

$$\int_0^a (1 + 15(x + 1)^{-2}) dx = \int_a^4 (1 + 15(x + 1)^{-2}) dx$$

$$-\frac{15}{a+1} + a + 15 = \frac{15}{a+1} - a + 1$$

Ratkaistaan
laskimella.

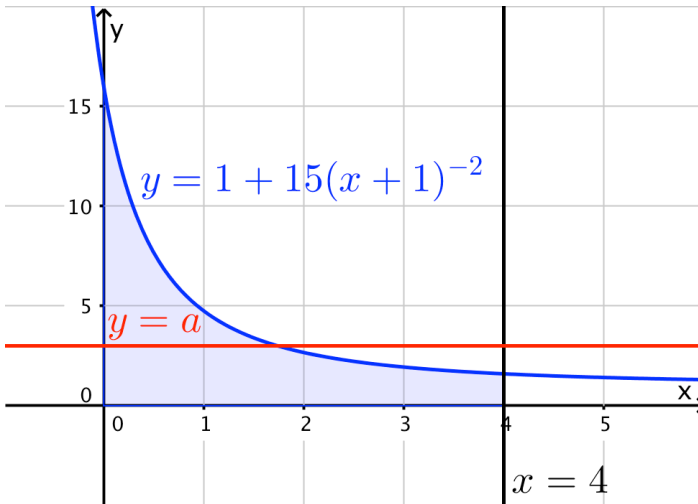
$$a = -2\sqrt{6} - 4 \ (\approx -8,9) \quad \text{tai} \quad a = 2\sqrt{6} - 4 \ (\approx 0,9)$$

Koska $0 < a < 4$, niin $a = 2\sqrt{6} - 4$. Siis alue voidaan jakaa kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan suoralla $x = 2\sqrt{6} - 4$.

Vastaus Jaetaan alue pystysuoralla suoralla $x = 2\sqrt{6} - 4$.

TAPA 2

Alue voidaan jakaa kahteen osaan myös vaakasuoralla suoralla $y = a$.



Ratkaistaan integrointia varten käyrän $y = 1 + 15(x + 1)^{-2}$ ja suoran $y = a$ leikkauskohta.

$$1 + 15(x + 1)^{-2} = a$$

$$x = -1 \pm \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{a-1}}$$

Koska $0 \leq x \leq 4$, niin $x = -1 + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{a-1}}$.

Käyrän $y = 1 + 15(x + 1)^{-2}$ ja suoran $y = a$ rajaama alue tulee olla puolet koko pinta-alasta. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a .

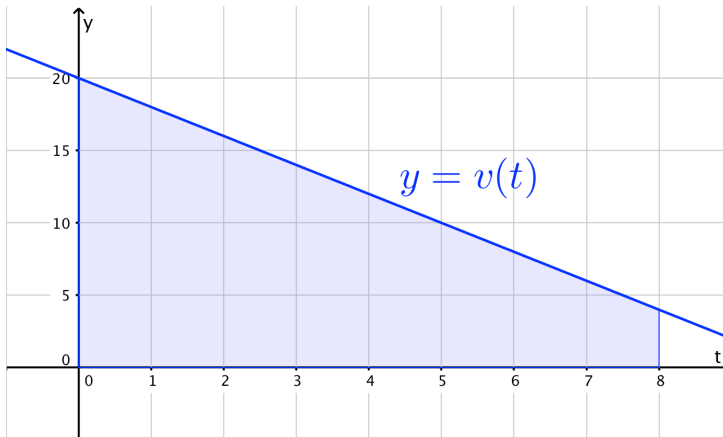
$$\int_0^{-1 + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{a-1}}} (1 + 15(x + 1)^{-2} - a) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^4 (1 + 15(x + 1)^{-2}) dx$$

$$a = 20 - 4\sqrt{15} \quad (\approx 4,5) \quad \text{tai} \quad a = 20 + 4\sqrt{15} \quad (\approx 35,5)$$

Kuvan perusteella näistä vain $a = -4\sqrt{15} + 20 \quad (\approx 4,5)$ käy ratkaisuksi. Alue voidaan siis jakaa kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan myös suoralla $y = 20 - 4\sqrt{15}$.

K42

- a) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion $v(t) = 20 - 2t$ kuvaajan ja t -akselin välillä $[0, 8]$ rajaama alue.

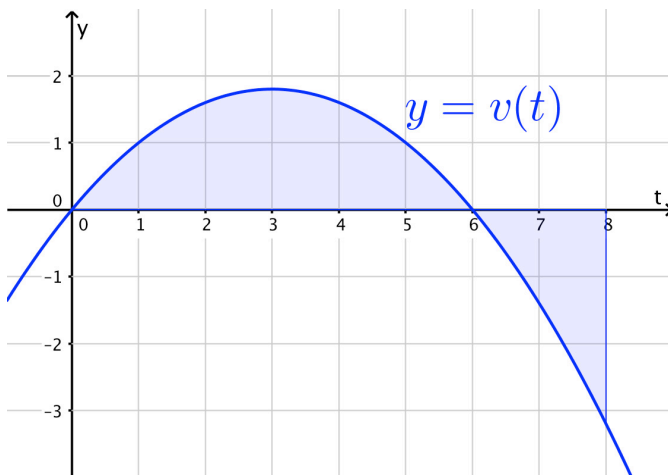


Lasketaan alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^8 v(t) \, dt \\
 &= \int_0^8 (20 - 2t) \, dt \\
 &= 96
 \end{aligned}$$

Kappaleen kulkema matka on siis 96 m.

- b) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion $v(t) = 20 - 2t$ kuvaajan ja t -akselin välillä $[0, 8]$ rajaama alue.



Määritetään integrointia varten funktion v nollakohdat.

$$-0,2t^2 + 1,2t = 0$$

$$t = 0 \quad \text{tai} \quad t = 6$$

Tarkasteluvälillä funktio v saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, joten lasketaan alueen pinta-ala osissa.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^6 v(t) dt - \int_6^8 v(t) dt \\ &= \int_0^6 (-0,2t^2 + 1,2t) dt - \int_6^8 (-0,2t^2 + 1,2t) dt \\ &= 10,1 \end{aligned}$$

Kappaleen kulkema matka on siis $10,1 \text{ m} \approx 10 \text{ m}$.

Vastaus a) 96 m b) 10 m

Huomaa: b-kohdassa nopeus on aikavälillä $[6, 8]$ negatiivinen. Silloin kappale liikkuu päinvastaiseen suuntaan kuin aikavälillä $[0, 6]$. Kappaleen kulkema matka on molempiin suuntiin edettyjen matkojen summa.

K43

Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

$$y = f(a) = \frac{1}{a}$$

Tangentti piirretään pisteeseen $(a, \frac{1}{a})$, missä $a > 0$.

Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k = f'(a)$. Derivoidaan funktio ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$k = f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

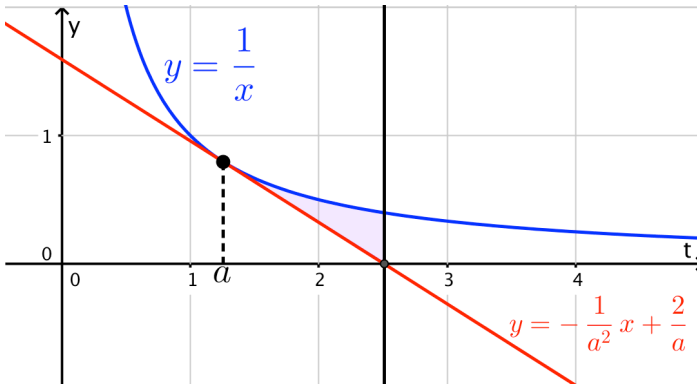
Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \qquad y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Määritetään tangentin ja x -akselin leikkauskohta.

$$-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} = 0$$

$$x = 2a$$

Lasketaan alueen pinta-ala.

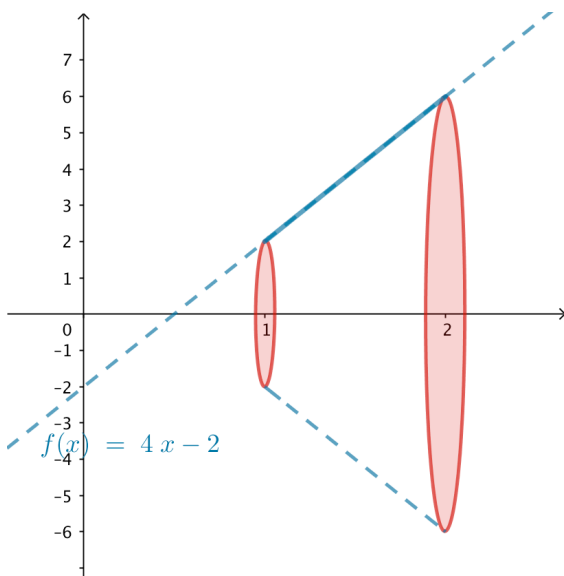
$$A = \int_a^{2a} \left(\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} \right) \right) dx$$

$$= \int_a^{2a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a^2}x - \frac{2}{a} \right) dx$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}$$

Alueen pinta-ala on siis aina $\ln 2 - \frac{1}{2}$, joten pinta-ala ei riipu kohdasta, johon tangentti piirretään. $\square$

K44

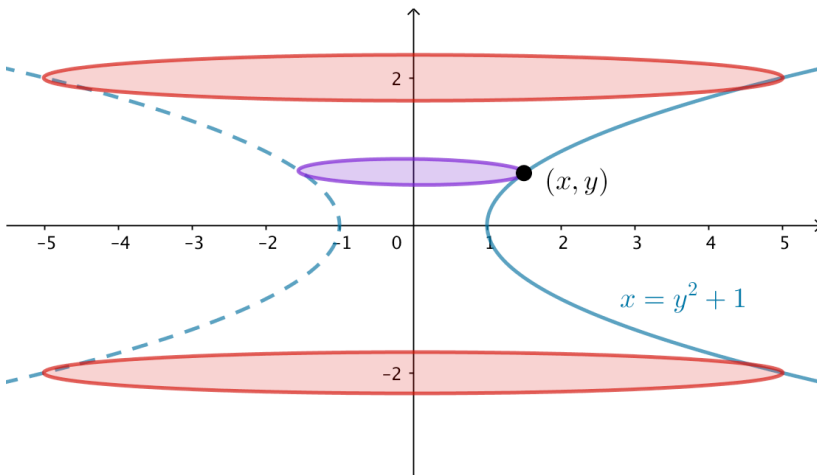


$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 (4x - 2)^2 dx \\ &= \frac{52}{3} \pi \\ &= 17 \frac{1}{3} \pi \end{aligned}$$

Vastaus

$$17 \frac{1}{3} \pi$$

K45



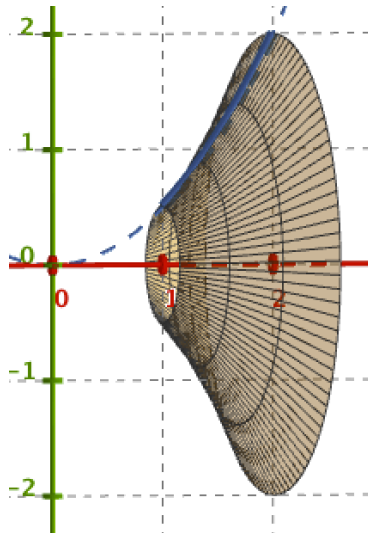
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 x^2 dy \\ &= \pi \int_{-2}^2 (y^2 + 1)^2 dy \\ &= \frac{412}{15} \pi \\ &= 27 \frac{7}{15} \pi \end{aligned}$$

Vastaus

$$27 \frac{7}{15} \pi$$

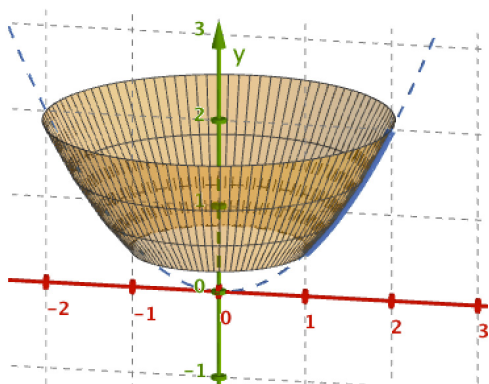
K46

$$\begin{aligned}
 \text{a) } V &= \pi \int_1^2 y^2 dx \\
 &= \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 dx \\
 &= \pi \int_1^2 \frac{1}{4}x^4 dx \\
 &= \frac{31}{20}\pi = 1\frac{11}{20}\pi
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 x^2 dy \\
 &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{2y}^2 dy \\
 &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 2y dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } &= \frac{15}{4}\pi = 3\frac{3}{4}\pi
 \end{aligned}$$



Vastaus a) $1\frac{11}{20}\pi$ b) $3\frac{3}{4}\pi$

K47

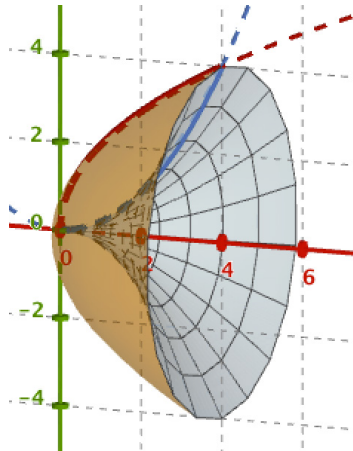
Määritetään käyrien $y = \sqrt{4x}$

ja $y = \frac{x^2}{4}$ leikkauspisteet.

$$\sqrt{4x} = \frac{x^2}{4}$$

$$64x = x^4$$

$$x = 0 \text{ tai } x = 4$$



$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{4x})^2 dx - \pi \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 4x dx - \pi \int_0^4 \frac{x^4}{16} dx$$

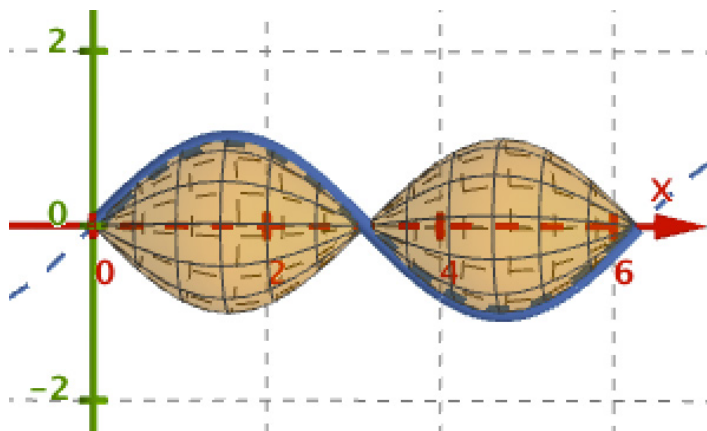
$$= \frac{96}{5} \pi$$

$$= 19 \frac{1}{5} \pi$$

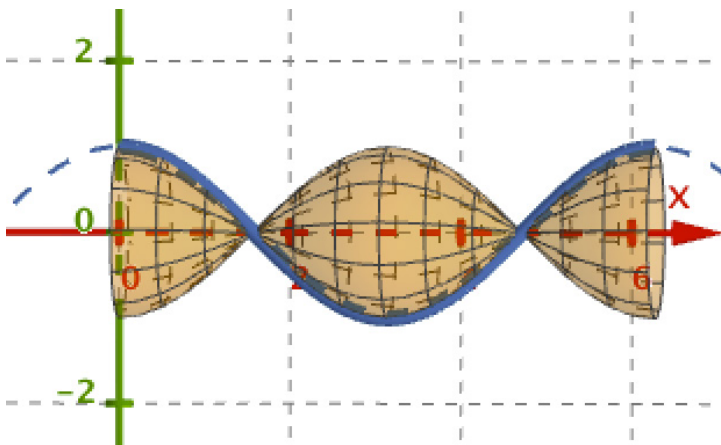
Vastaus $19 \frac{1}{5} \pi$

K48

Käyrä $y = \sin x$, missä $0 \leq x \leq 2\pi$, pyörrähtää x -akselin ympäri:



Käyrä $y = \cos x$, missä $0 \leq x \leq 2\pi$, pyörrähtää x -akselin ympäri:



Lasketaan molempien pyörähdyskappaleiden tilavuudet.

$$\begin{aligned}V_{\sin} &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx \\&= \pi \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx \\&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\&= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{2\pi} \\&= \pi^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{\cos} &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx \\&= \pi \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx \\&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\&= \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{2\pi} \\&= \pi^2\end{aligned}$$

Vastaus

$$\pi^2$$

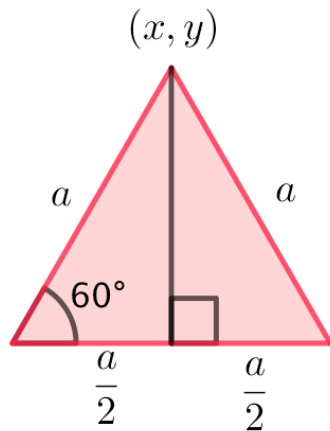
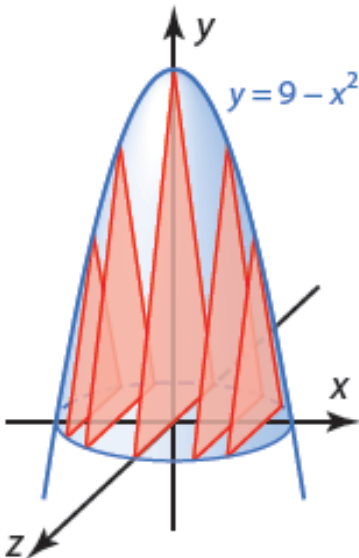
K49



$$\begin{aligned} V &= \int_0^8 A(x) dx \\ &= \int_0^8 \frac{\pi(\sin x + 2)^2}{3} dx \\ &= \frac{\pi}{3} \int_0^8 (\sin x + 2)^2 dx \\ &= 42,572... \text{ (dm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Taidemaljakon tilavuus on $42,572... \text{ dm}^3 \approx 42,6 \text{ L}$.

K50



Määritetään integroimisrajat.

$$y = 0$$

$$9 - x^2 = 0$$

$$x = 3 \text{ tai } x = -3$$

Merkitään kohtaan x piirretyn tasasivuisen kolmion sivun pituutta kirjaimella a . Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60° .

Tasasivuisen kolmion korkeus on $y = 9 - x^2$.

Kolmion pinta-ala on

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ & \left| \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right. \\ &= \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2. \end{aligned}$$

Määritetään kolmion sivun pituuden neliö a^2 Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{2} \right)^2 + y^2 &= a^2 \\ \frac{a^2}{4} + y^2 &= a^2 \\ \frac{3a^2}{4} &= y^2 & \left| y = 9 - x^2 \right. \\ \frac{3a^2}{4} &= (9 - x^2)^2 \\ a^2 &= \frac{4}{3} \cdot (9 - x^2)^2 \end{aligned}$$

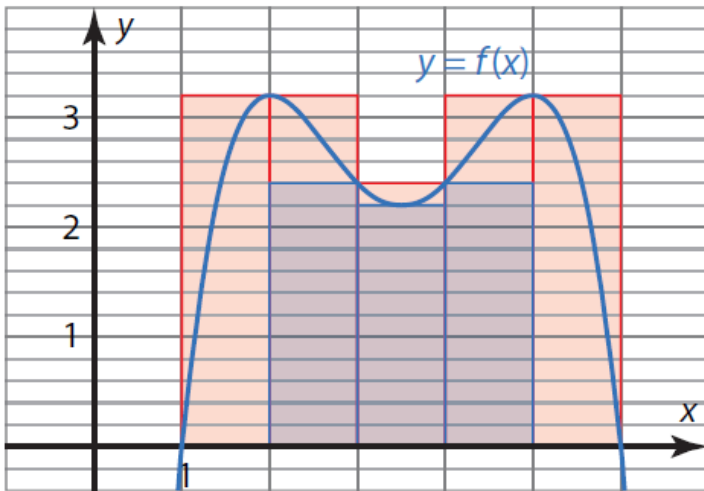
Lasketaan kappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \int_{-3}^3 A(x) dx \\ &= \int_{-3}^3 \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 dx && \left| a^2 = \frac{4}{3} \cdot (9 - x^2)^2 \right. \\ &= \int_{-3}^3 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot (9 - x^2)^2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{-3}^3 (9 - x^2)^2 dx \\ &= \frac{432\sqrt{3}}{5} \quad (\approx 149,6) \end{aligned}$$

Vastaus

$$\frac{432\sqrt{3}}{5}$$

M1



Siniset suorakaiteet antavat pinta-alalle alarajan

$$A > 1 \cdot 2,4 + 1 \cdot 2,2 + 1 \cdot 2,4 = 7.$$

Punaiset suorakaiteet antavat pinta-alalle ylärajan

$$A < 2 \cdot 3,2 + 1 \cdot 2,4 + 2 \cdot 3,2 = 15,2.$$

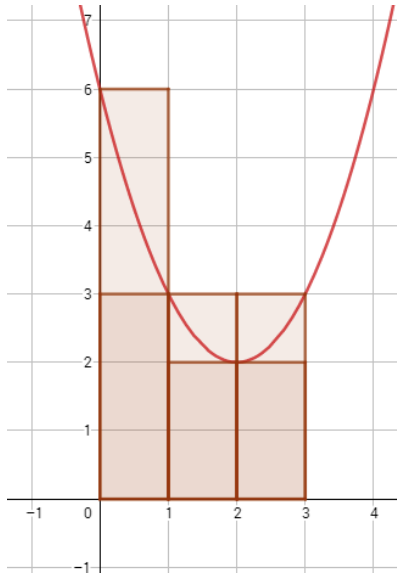
On siis $6 < A < 20$ (a) ja $A < 16$ (c).

Kuvan perusteella ei voi todeta, että $A > 13$.

Vastaus a, c

M2

Piirretään funktion $f(x) = x^2 - 4x + 6$ kuvaaja.



Kuvan perusteella alasumma

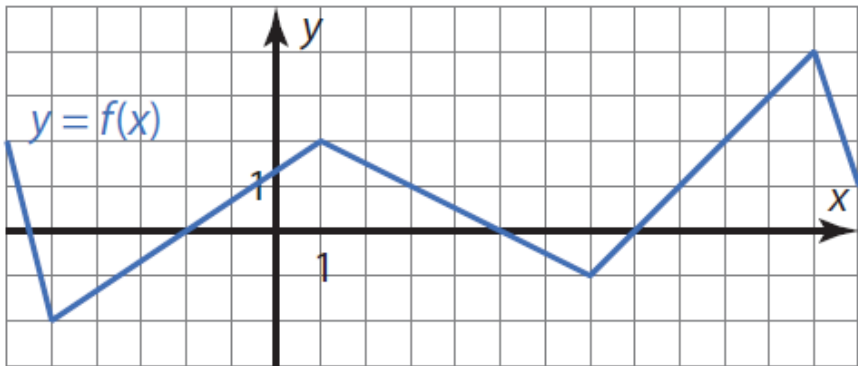
$$s_3 = f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 = 7$$

ja yläsumma

$$S_3 = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 = 12.$$

On siis $S_3 - s_3 = 12 - 7 = 5$, joten ainoa oikea vaihtoehto on c.

Vastaus c

M3

Kuvan perusteella saadaan seuraavaa.

$$\int_{-5}^1 f(x) dx = \int_{-5}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^1 f(x) dx = -\frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} = 0$$

$$\int_{-5}^8 f(x) dx = \int_{-5}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^5 f(x) dx + \int_5^8 f(x) dx = -\frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{7 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

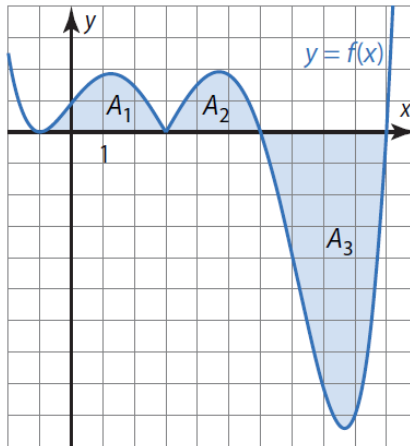
$$\int_1^{12} f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx + \int_5^8 f(x) dx + \int_8^{12} f(x) dx = \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} = 11\frac{1}{2}$$

Ainoa oikea vaihtoehto on siis a.

Vastaus a

M4

$$A_1 = 13, A_2 = 11 \text{ ja } A_3 = 68.$$



$$\int_{-1}^{10} f(x) dx = A_1 + A_2 - A_3 = 13 + 11 - 68 = -44$$

$$\int_3^{10} f(x) dx = A_2 - A_3 = 11 - 68 = -57 \text{ ja}$$

$$\int_{-1}^6 f(x) dx = A_1 + A_2 = 13 + 11 = 24$$

$$\int_{-1}^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx - \int_6^{10} f(x) dx = A_1 + A_2 - (-A_3) = 13 + 11 + 68 = 92$$

Ainoa oikea vastaus on siis c.

Vastaus c

M6

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (\sin x - e^{x+1}) dx \\ &= -\cos x - e^{x+1} + C \end{aligned}$$

$$F(0) = 0$$

$$-\cos 0 - e^{0+1} + C = 0$$

$$-1 - e + C = 0$$

$$C = e + 1$$

$$F(x) = -\cos x - e^{x+1} + e + 1$$

Vastaus c

M7

$$\begin{aligned} D\left(\frac{x}{x^2+1} + C\right) &= D\frac{x}{x^2+1} + 0 \\ &= \frac{Dx(x^2+1) - x \cdot D(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Eli vastaus b on oikein.

Funktio f on myös jatkuva kaikkialla (nimittäjällä ei ole nollakohtia). Siis myös vastaus c on oikein.

Vastaus b ja c

M8

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{10x^4}{3} - 3 \right) dx \\ &= \int \left(\frac{10}{3} x^4 - 3 \right) dx \\ &= \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{5} x^5 - 3x + C \\ &= \frac{2}{3} x^5 - 3x + C \\ &= \frac{2x^5 - 9x + D}{3} \end{aligned}$$

Vastaus b ja c

M9

Funktio on selvästi jatkuva kaikkialla, joten a-kohta on oikein.

Polynomin $(3 - 2x^2)^7$ korkeimman asteen termi on 14. astetta.

Integraalissa suurin potenssi on yhtä suurempi eli 15. Siis myös b on oikein.

Vastaus a ja c

M10

Koska funktio F on funktion f integraalifunktio, niin $F' = f$ kaikilla x . Siis vastaus b on oikein.

Vastaus b

M11

$$\begin{aligned}\int_1^2 3x^2 dx &= \left[x^3 \right]_1^2 && \text{(b)} \\ &= 8 - 1 \\ &= 7 && \text{(a)}\end{aligned}$$

Vastaus a ja b

M12

Jos $F'(x) = f(x)$, niin F on funktion f eräs integraalifunktio.
Tällöin

$$\int_a^b f(x) dx = \left. F(x) \right|_a^b \quad (\text{c})$$
$$= F(b) - F(a) \quad (\text{b})$$

Vastaus b ja c

M13

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\&= \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\&= 2x^{\frac{1}{2}} + C \\&= 2\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Vastaus b

M14

$$\begin{aligned} & \int (5x - 7)^3 dx \\ &= \frac{1}{5} \int 5(5x - 7)^3 dx \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} (5x - 7)^4 + C \\ &= \frac{1}{20} (5x - 7)^4 + C \end{aligned}$$

Vastaus c

M15

$$\begin{aligned}\int x e^{x^2} dx \\&= \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx \\&= \frac{1}{2} e^{x^2} + C\end{aligned}$$

Vastaus b ja c

M16

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ln 3} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\ln 3} 2e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \Big/ e^{2x} \Big|_0^{\ln 3} \\ &= \frac{1}{2} (e^{2\ln 3} - 1) \\ &= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4 \end{aligned}$$

Vastaus b ja c

M17

$$\begin{aligned} & \int \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2x + C \end{aligned}$$

Vastaus c

M18

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \left[-\cos x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Vastaus b

M19

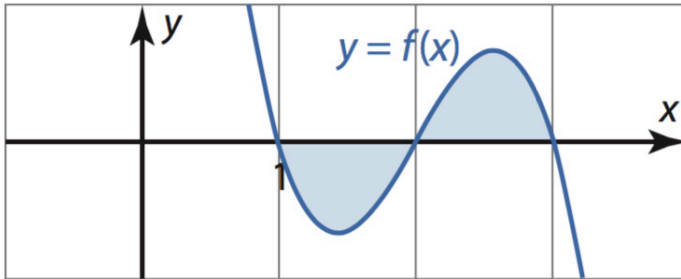
$$\begin{aligned} & \int \frac{2}{x} dx \\ & \int 2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ & = 2 \ln|x| + C \end{aligned}$$

Vastaus c

M20

$$\begin{aligned} & \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ &= \int 2x(x^2 + 1)^{-1} dx \\ &= \ln(x^2 + 1) + C \end{aligned}$$

Vastaus b

M21

Koska funktion f kuvaaja on välillä $[1, 2]$ x -akselin alapuolella ja välillä $[2, 3]$ x -akselin yläpuolella, niin alueen pinta-ala saadaan määrättyllä integraalilla.

$$A = -\int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$$

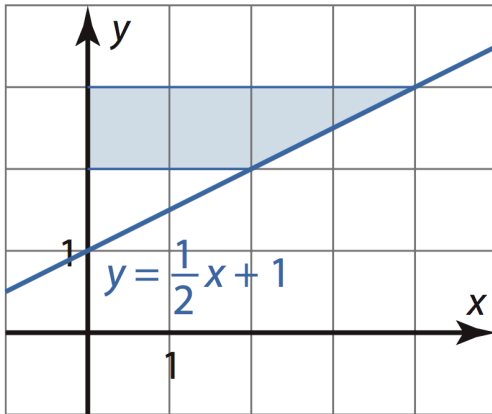
Vastaus b

M22

Koska aluetta alapuolelta rajaava käyrä vaihtuu, lasketaan alueen pinta-ala osissa.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 (-x^2 + 4x - 1 - (-2x + 4)) dx + \int_3^4 (-x^2 + 4x - 1 - (x - 5)) dx \\ &= \int_1^3 (-x^2 + 6x - 5) dx + \int_3^4 (-x^2 + 3x + 4) dx \quad \text{Lasketaan määrättyt} \\ &= \frac{15}{2} = 7 \frac{1}{2} \quad \text{integraalit laskimella.} \end{aligned}$$

Vastaus b

M23

Integroidaan muuttujan y suhteen, jolloin integroidaan 2:sta 3:een. Ratkaistaan integrointia varten käyrän yhtälöstä x , jolloin y on muuttuja.

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \quad | \cdot 2$$

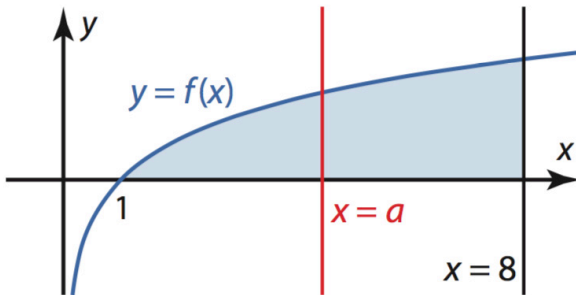
$$2y = x + 2$$

$$x = 2y - 2$$

Koska alue on y -akselin oikealla puolella sen pinta-alan kertoo määrätty integraali

$$A = \int_2^3 (2y - 2) dy .$$

Vastaus c

M24

a-kohdan yhtälö on oikein. Funktion f kuvaajan ja x -akselin rajaavat välillä $[1, a]$ ja $[a, 8]$ pinta-alaltaan yhtä suuret alueet.

$$\int_1^a f(x)dx = \int_a^8 f(x)dx$$

b-kohdan yhtälö on oikein. Funktion f kuvaajan ja x -akselin rajaavat välillä $[1, a]$ alueen, jonka pinta-ala on puolet funktion f kuvaajan ja x -akselin välillä $[1, 8]$ rajaaman alueen pinta-alasta.

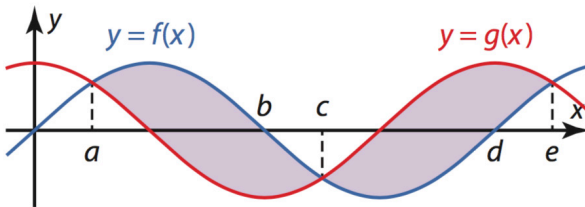
$$\int_1^a f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^8 f(x)dx$$

c-kohdan yhtälö on oikein. Funktion f kuvaajan ja x -akselin rajaavat välillä $[a, 8]$ alueen, jonka pinta-ala on puolet funktion f kuvaajan ja x -akselin välillä $[1, 8]$ rajaaman alueen pinta-alasta.

$$\int_a^8 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^8 f(x)dx$$

Vastaus a, b ja c

M25



Alue on kahden funktion kuvaajan rajaama alue.

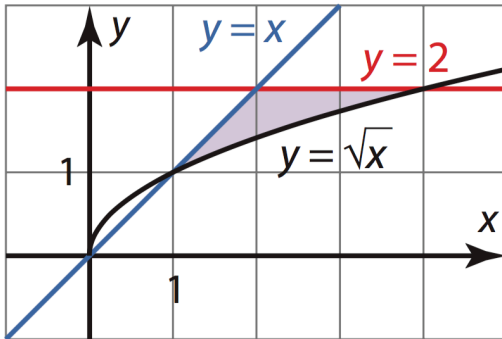
Välillä $[a, c]$ aluetta rajaa yläpuolelta funktion f kuvaaja ja alapuolelta funktion g kuvaaja.

Välillä $[c, e]$ aluetta rajaa yläpuolelta funktion g kuvaaja ja alapuolelta funktion f kuvaaja.

Alueen pinta-alan kertoo määrätty integraali

$$A = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^e (g(x) - f(x)) dx.$$

Vastaus b

M26

Jos integroidaan muuttujan x suhteen, niin välillä $[1, 2]$ aluetta rajaa yläpuolelta suora $y = x$ ja alapuolelta käyrä $y = \sqrt{x}$. Välillä $[2, 4]$ aluetta rajaa yläpuolelta suora $y = 2$ ja alapuolelta käyrä $y = \sqrt{x}$. Pinta-alan ilmaisee siis määrätty integraali

$$A = \int_1^2 (x - \sqrt{x}) dx + \int_2^4 (2 - \sqrt{x}) dx. \quad (\text{b})$$

Jos integroidaan muuttujan y suhteen, niin välillä $1 \leq y \leq 2$ aluetta rajaa oikealta käyrä $y = \sqrt{x}$ eli $x = y^2$ (missä $y > 0$) ja vasemmalta suora $y = x$ eli $x = y$. Pinta-alan ilmaisee siis määrätty integraali

$$A = \int_1^2 (y^2 - y) dy \quad (\text{c})$$

Vastaus b ja c

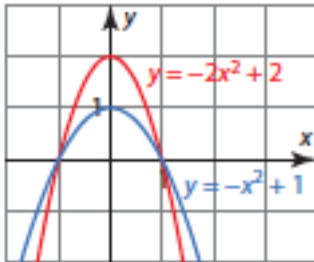
M27

Kun funktion f kuvaaja välillä $[a, b]$ pyörrähtää x -akselin ympäri, syntyneen pyörrähdyskappaleen tilavuus on $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

Siis vastaus c on oikein.

Vastaus c

M28



Pyörähdyskappale on ontto.

Kohta a on oikein.

Pyörähdyskappale mahtuu origokeskisen 2-säteisen pallon sisään.

Kohta b on oikein.

1-säteisen pallon tilavuus on $V_1 = \pi \cdot 1^2 = \pi$.

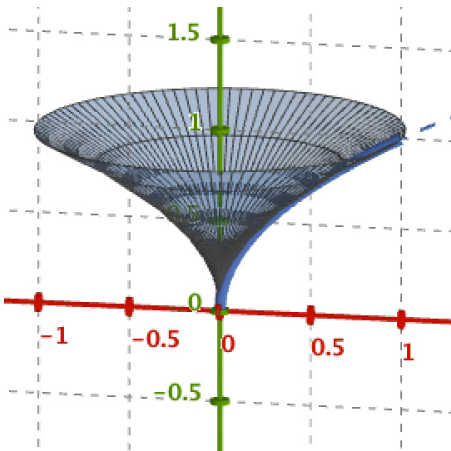
Pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2)^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (-x^2 + 1)^2 dx \\ &= 3\frac{1}{5}\pi > \pi = V_1 \end{aligned}$$

Kohta c on oikein.

Vastaus a, b ja c

M29



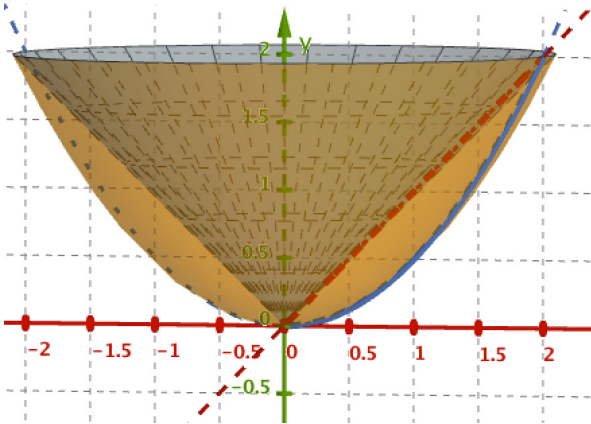
Asetetaan kartion huippu origoon ja pohjan keskipiste y -akselille. Tällöin pyörähdyskappale mahtuu kartion sisään. Kohta a on oikein.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 x^2 dy & \left| y = \sqrt{x}, \text{ joten } x = y^2. \right. \\
 &= \pi \int_0^1 (y^2)^2 dy \\
 &= \pi \int_0^1 y^4 dy \\
 &= \frac{\pi}{5}
 \end{aligned}$$

Kohta b on oikein.

Vastaus a ja b

M30



Ulkokuorta rajaa käyrä $y = \frac{x^2}{2}$, joten $x^2 = 2y$.

Sisäosaa rajaa käyrä $x = y$, joten $x^2 = y^2$.

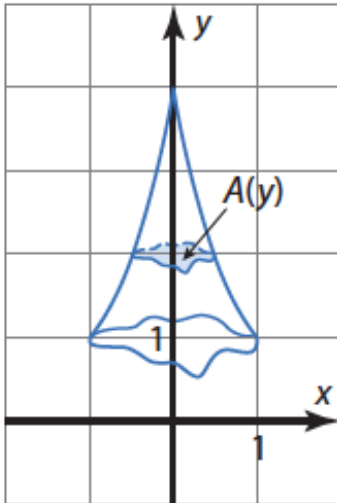
Pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V = V_{ulko} - V_{sisä} = \pi \int_0^2 2y dy - \pi \int_0^2 y^2 dy.$$

Siis vaihtoehto b on oikein.

Vastaus b

M31



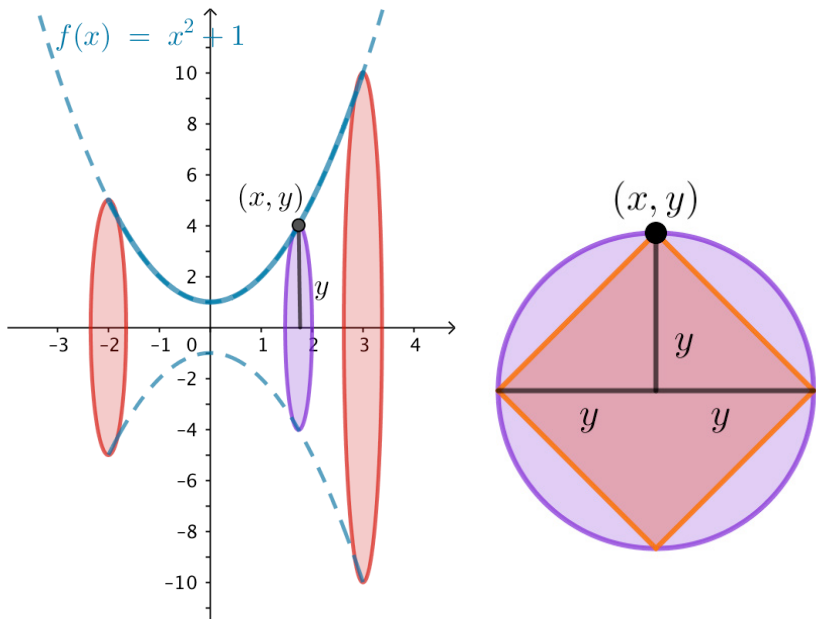
Integroimisrajat ovat 1 ja 4. Siis a-kohta on väärin.

Kyseessä ei ole pyörähdyskappale, joten myös b-kohta on väärin.

c-kohta on oikein.

Vastaus c

M32



Pyörähdysskappaleen säde y on puolet neliön lävistäjästä. Neliön pinta-ala kohdassa x on $A(x) = 4 \cdot \frac{y \cdot y}{2} = 2y^2 = 2(x^2 + 1)^2$.

Kappaleen tilavuudeksi saadaan

$$V = \int_{-2}^3 A(x) dx = \int_{-2}^3 2(x^2 + 1)^2 dx.$$

Kohta b on oikein.

Vastaus b

A1

Funktiot $F(x) = x + 4 + \ln(x + 1)$ ja $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ ovat molemmat määritelty, kun $x > -1$.

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x > -1$.

$$F'(x) = D(x + 4 + \ln(x + 1))$$

$$= 1 + 0 + \frac{1}{x+1}$$

$$= \overset{x+1)}{1} \frac{1}{1} + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{x+1+1}{x+1}$$

$$= \frac{x+2}{x+1}$$

$$= f(x)$$

On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. $\square$

A2

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int_{-1}^3 (2x^3 - 4x) dx &= \int_{-1}^3 \left(2 \cdot \frac{1}{4} x^4 - 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 \right) \\
 &= \int_{-1}^3 \left(\frac{1}{2} x^4 - 2x^2 \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^2 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 \right) \\
 &= \frac{45}{2} - \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{45}{2} + \frac{3}{2} = \frac{48}{2} = 24
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int_1^3 (\sqrt{x} + x^2) dx &= \int_1^3 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^2 \right) dx \\
 &= \int_1^3 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} x^3 \right) \\
 &= \int_1^3 \left(\frac{2}{3} x^1 x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} x^3 \right) \\
 &= \int_1^3 \left(\frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{1}{3} x^3 \right) \\
 &= \left(\frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} + \frac{1}{3} \cdot 3^3 \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 1\sqrt{1} + \frac{1}{3} \cdot 1^3 \right) \\
 &= 2\sqrt{3} + 9 - 1 = 2\sqrt{3} + 8
 \end{aligned}$$

Vastaus a) 24 b) $2\sqrt{3} + 8$

A3

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int (\sin 4x - \cos 2x) dx &= \int \sin 4x dx - \int \cos 2x dx \\
 &= \frac{1}{4} \int 4 \sin 4x dx - \frac{1}{2} \int 2 \cos 2x dx \\
 &= \frac{1}{4} (-\cos 4x) - \frac{1}{2} \sin 2x + C \\
 &= -\frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \sin 2x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int x^2 e^{x^3-1} dx &= \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3-1} dx \\
 &= \frac{1}{3} e^{x^3-1} + C
 \end{aligned}$$

Vastaus

$$\begin{aligned}
 \text{a) } &-\frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \sin 2x + C \\
 \text{b) } &\frac{1}{3} e^{x^3-1} + C
 \end{aligned}$$

A4

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int (x^3 \sqrt{2x^4 + 7}) dx &= \frac{1}{8} \int 8x^3 (2x^4 + 7)^{\frac{1}{2}} dx \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{\frac{3}{2}} (2x^4 + 7)^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{1}{12} (2x^4 + 7) \sqrt{2x^4 + 7} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int \frac{x}{1+5x^2} dx &= \frac{1}{10} \int \frac{10x}{1+5x^2} dx \\
 &= \frac{1}{10} \ln |1+5x^2| + C && |1+5x^2 > 0 \text{ kaikilla } x \\
 &= \frac{1}{10} \ln(1+5x^2) + C
 \end{aligned}$$

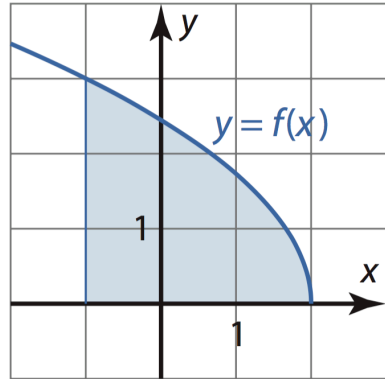
Vastaus a) $\frac{1}{12} (2x^4 + 7) \sqrt{2x^4 + 7} + C$

 b) $\frac{1}{10} \ln(1+5x^2) + C$

A5

Funktion $f(x) = \sqrt{6-3x}$ kuvaajan ja x -akselin välillä $[-1, 2]$ rajaama alue on x -akselin yläpuolella.

Alueen pinta-ala on täten yhtä suuri kuin funktion f määrätty integraali -1 :stä 2 :een.



$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 \sqrt{6-3x} dx &= -\frac{1}{3} \int_{-1}^2 -3(6-3x)^{\frac{1}{2}} dx \\
 &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} (6-3x)^{\frac{3}{2}} \right) \\
 &= -\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} \left((6-3x)\sqrt{6-3x} \right) \\
 &= -\frac{2}{9} \left((6-3 \cdot 2)\sqrt{6-3 \cdot 2} - \left((6-3 \cdot (-1))\sqrt{6-3 \cdot (-1)} \right) \right) \\
 &= -\frac{2}{9} (0 - 9\sqrt{9}) \\
 &= \frac{2}{9} \cdot 9 \cdot 3 = 6
 \end{aligned}$$

Vastaus $A = 6$

A6

a) Lasketaan määrätty integraali.

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^1 (x^2 - ax) dx &= \left/ \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} ax^2 \right) \right. \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (-2)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} a + \frac{8}{3} + 2a \\
 &= \frac{3}{2} a + 3
 \end{aligned}$$

Ratkaistaan saatu yhtälö.

$$\frac{3}{2} a + 3 = 6$$

$$\frac{3}{2} a = 3 \quad \left| \cdot \frac{2}{3} \right.$$

$$a = 2$$

b) Lasketaan määrätty integraali.

$$\begin{aligned}\int_0^a e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int_0^a 2e^{2x} dx \\&= \frac{1}{2} \cdot \left[e^{2x} \right]_0^a \\&= \frac{1}{2} \cdot (e^{2a} - e^0) \\&= \frac{1}{2} \cdot (e^{2a} - 1)\end{aligned}$$

Ratkaistaan saatu yhtälö.

$$\frac{1}{2} \cdot (e^{2a} - 1) = 4 \quad | \cdot 2$$

$$e^{2a} - 1 = 8$$

$$e^{2a} = 9$$

$$2a = \ln 9 \quad | : 2$$

$$a = \frac{\ln 9}{2} = \frac{\ln 3^2}{2} = \frac{\cancel{2} \ln 3}{\cancel{2}} = \ln 3$$

Vastaus a) $a = 2$ b) $a = \ln 3$

A7

Määritetään funktion $f(x) = e^{-x} - \cos 4x$ integraalifunktiot.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (e^{-x} - \cos 4x) dx \\ &= -e^{-x} - \frac{1}{4} \sin 4x + C \end{aligned}$$

Määritetään vakion C arvo siten, että $F(0) = 1$.

$$F(0) = 1$$

$$-e^{-0} - \frac{1}{4} \sin(4 \cdot 0) + C = 1$$

$$-1 - \frac{1}{4} \cdot 0 + C = 1$$

$$C = 2$$

Integraalifunktio on $F(x) = -e^{-x} - \frac{1}{4} \sin 4x + 2$.

Vastaus $F(x) = -e^{-x} - \frac{1}{4} \sin 4x + 2$

A8

a) Määritetään funktion lauseke laskemalla määrätty integraali.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 (2x - 4t) dt && \text{Integroinnin muuttujana } t. \\ &= \left/ (2xt - 2t^2) \right. \\ &= 2x \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 - (2x \cdot 0 - 2 \cdot 0^2) \\ &= 2x - 2 \end{aligned}$$

Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$2x - 2 = 0$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

b) Määritetään funktion lauseke laskemalla määrätty integraali.

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 (2x - 4t) dx && \text{Integroinnin muuttujana } x. \\ &= \left/ (x^2 - 4tx) \right. \\ &= 1^2 - 4t \cdot 1 - (0^2 - 4t \cdot 0) \\ &= 1 - 4t \end{aligned}$$

Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$1 - 4t = 0$$

$$-4t = -1$$

$$t = \frac{1}{4}$$

Vastaus a) $x = 1$ b) $t = \frac{1}{4}$

A9

a) Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$f(x) = 0$$

$$|\sin x - \cos x| = 0$$

$$\sin x - \cos x = 0$$

$$\sin x = \cos x \quad |: \cos x \text{ (}\neq 0\text{)}$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

Välillä $[0, \pi]$ on vain nollakohta $x = \frac{\pi}{4}$.

b) Funktion f ainoa nollakohta välillä $[0, \pi]$ on $x = \frac{\pi}{4}$. Koska $\sin 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1 < 0$ ja $\sin \pi - \cos \pi = 0 - (-1) = 1 > 0$, niin $\sin x - \cos x \geq 0$, kun $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$.

Itseisarvon määritelmän mukaan funktion f lauseke on

$$f(x) = \begin{cases} -(\sin x - \cos x), & \text{kun } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin x - \cos x, & \text{kun } \frac{\pi}{4} < x \leq \pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\sin x + \cos x, & \text{kun } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin x - \cos x, & \text{kun } \frac{\pi}{4} < x \leq \pi \end{cases}$$

c) Lasketaan määrätty integraali.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\sin x + \cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \\
 &= \left/ (\cos x + \sin x) \right/_0^{\frac{\pi}{4}} + \left/ (-\cos x - \sin x) \right/_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
 &= \left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} - (\cos 0 + \sin 0) \right) \\
 &\quad + \left(-\cos \pi - \sin \pi - \left(-\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - (1 + 0) - (-1) - 0 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 + 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Vastaus

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \frac{\pi}{4} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} -\sin x + \cos x, & \text{kun } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin x - \cos x, & \text{kun } \frac{\pi}{4} < x \leq \pi \end{cases} & \text{c) } 2\sqrt{2}
 \end{array}$$

A10

a) Ratkaistaan polynomin P nollakohdat.

$$P(x) = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1 - 3}{2} = -2$$

Jaetaan polynomi P tekijöihin.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 + x - 2 & ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 1 \cdot (x - 1)(x - (-2)) \\ &= (x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

b) Ratkaistaan vakioiden A ja B arvot.

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \quad | \cdot (x-1)(x+2)$$

$$1 = \frac{A \overset{1}{\cancel{(x-1)}} \overset{1}{\cancel{(x+2)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-1)}} \underset{1}{\cancel{(x+2)}}} + \frac{B(x-1) \overset{1}{\cancel{(x+2)}}}{\underset{1}{\cancel{(x+2)}} \underset{1}{\cancel{(x-1)}}}$$

$$1 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$1 = Ax + 2A + Bx - B$$

$$1 = (A+B)x + 2A - B$$

Yhtälö on tosi, kun $A+B=0$ ja $2A-B=1$. Ratkaistaan yhtälöpari.

$$+ \begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{cases}$$

$$3A = 1$$

$$A = \frac{1}{3} \qquad B = -A = -\frac{1}{3}$$

c) Integroidaan funktio $\frac{1}{P(x)}$

$$\int \frac{1}{P(x)} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}}{x+2} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C$$

$$\left| \begin{array}{l} x-1 > 0 \text{ ja} \\ x+2 > 0 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{3} \ln(x+2) + C$$

$$= \frac{1}{3} (\ln(x-1) - \ln(x+2)) + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2} + C, \text{ kun } x \geq 2$$

Vastaus a) $P(x) = (x-1)(x+2)$ b) $A = \frac{1}{3}$ ja $B = -\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2} + C, \text{ kun } x \geq 2$

B1

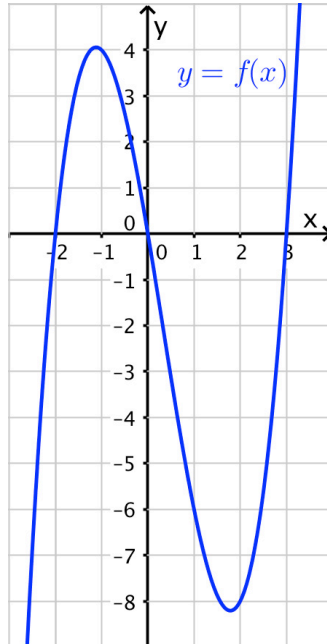
Opiskelija ei tutkinut, onko alue x -akselin yläpuolella vai alapuolella.

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x \text{ kuvaaja.}$$

Nollakohdat opiskelija on ratkaissut oikein.

Kuvasta havaitaan, että funktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja välillä $[-2, 3]$. Alueen pinta-ala pitää laskea siis kahdessa osassa.



Lasketaan alueen pinta-ala.

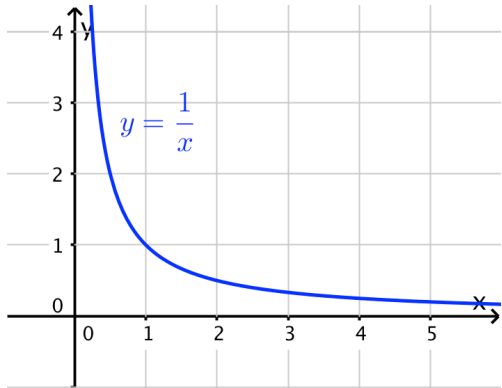
$$A = \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx - \int_0^3 (x^3 - x^2 - 6x) dx = \frac{253}{12} = 21 \frac{1}{12}$$

B2

Käyrä $y = \frac{1}{x}$ on x -akselin
yläpuolella välillä $[a, 3a]$,
kun $a > 0$.

Käyrän ja x -akselin välillä
 $[a, 3a]$ rajaaman alueen
pinta-ala on siis yhtä suuri
kuin määrätty integraali

$$\int_a^{3a} \frac{1}{x} dx.$$



Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_a^{3a} \frac{1}{x} dx$$

Määrätyn integraalin voi
laskea myös laskimella.

$$= \left/ \ln|x| \right|_a^{3a} \quad |a > 0$$

$$= \ln 3a - \ln a$$

$$= \ln \frac{3a}{a}$$

$$= \ln 3, \text{ kun } a > 0$$

On osoitettu, että alueen pinta-ala on $\ln 3$ kaikilla vakion a
arvoilla. $\square$

B3

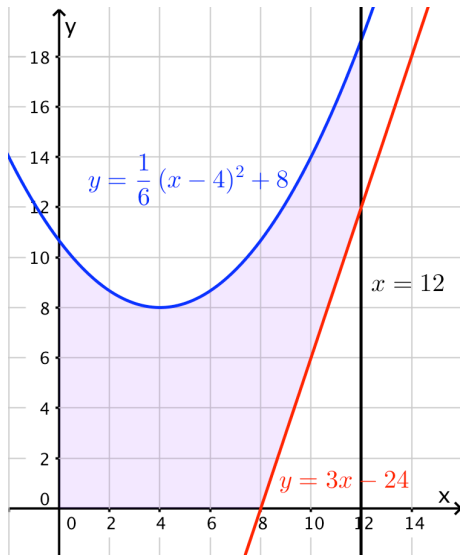
a)

Piirretään suorat $x = 12$

ja $y = 3x - 24$ sekä

käyrä $y = \frac{1}{6}(x - 4)^2 + 8$.

Merkitään kuvaan näiden ja koordinaattiakselien rajaama alue.



b) Ratkaistaan suoran $y = 3x - 24$ ja x -akselin leikkauskohta.

$$3x - 24 = 0$$

$$3x = 24 \quad |:3$$

$$x = 8$$

Alueen pinta-ala pitää laskea kahdessa osassa. Välillä $[0, 8]$ alue

on käyrän $y = \frac{1}{6}(x - 4)^2 + 8$ ja x -akselin rajaama alue ja välillä

$[8, 12]$ alue on käyrän $y = \frac{1}{6}(x - 4)^2 + 8$ ja suoran $y = 3x - 24$

välinen alue.

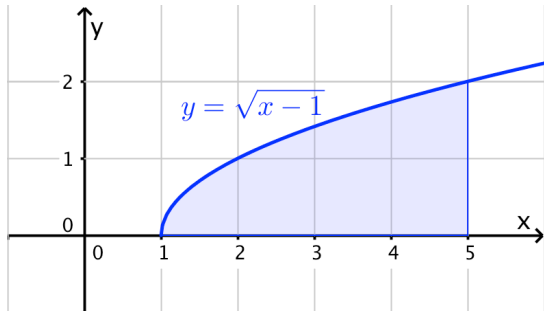
Lasketaan alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^8 \left(\frac{1}{6}(x-4)^2 + 8 \right) dx + \int_8^{12} \left(\frac{1}{6}(x-4)^2 + 8 - (3x-24) \right) dx \\ &= 104 \end{aligned}$$

Vastaus b) 104

B4

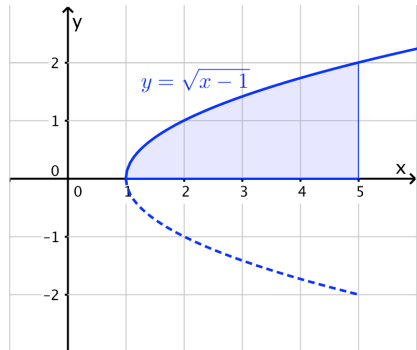
Hahmotellaan tilannetta piirtämällä pyörähtävä alue.



- a) Alue pyörähtää x -akselin ympäri, joten integroidaan muuttujan x suhteen 1:stä 5:een.

Poikkileikkausympyrän säde kohdassa x on

$$r = |y| = \sqrt{x-1}.$$

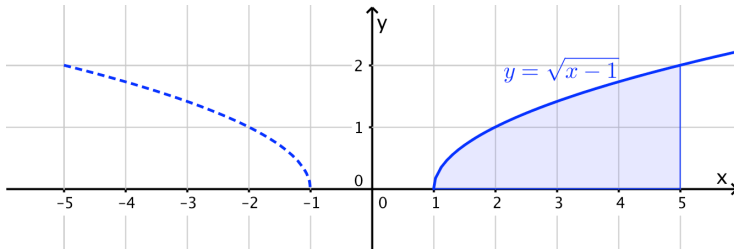


Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (x-1) dx = 8\pi$$

- b) Kun $x = 5$, niin kuvaajan pisteen y -koordinaatti $y = \sqrt{5-1} = 2$.
 Alue pyörrähtää y -akselin ympäri, joten integroidaan muuttujan y suhteen 0:sta 2:een.



Poikkileikkausympyrän säde kohdassa y on $r = |x|$. Koska $y = \sqrt{x-1}$, niin $x = y^2 + 1$. Siis $r = |x| = y^2 + 1$.

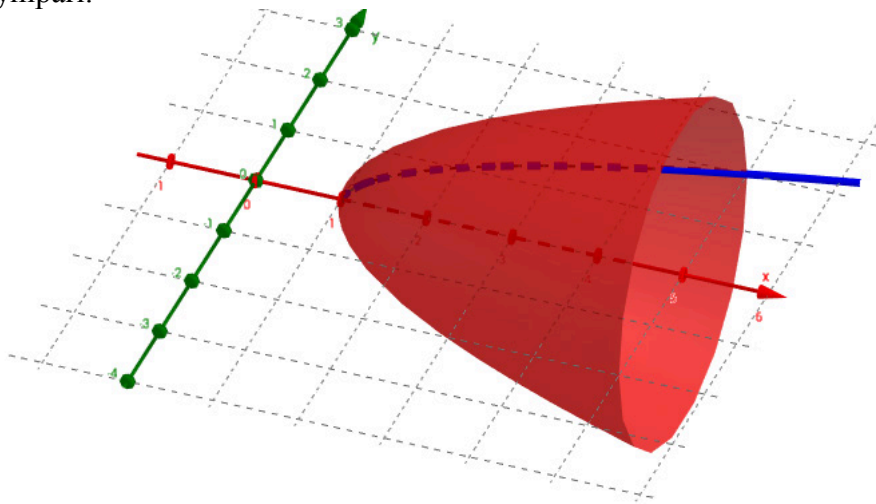
Lasketaan pyörrähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_0^2 (y^2 + 1)^2 dy$$

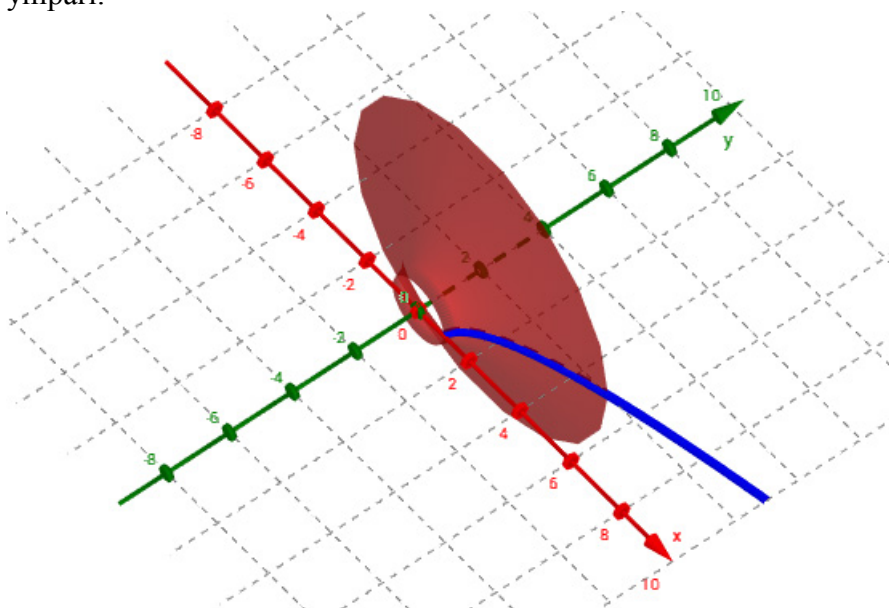
$$= \frac{206\pi}{15} = 13\frac{11}{15}\pi$$

Vastaus a) 8π b) $\frac{206\pi}{15} = 13\frac{11}{15}\pi$

Kuva kappaleesta, joka muodostuu käyrän pyörähtäessä x -akselin ympäri.



Kuva kappaleesta, joka muodostuu käyrän pyörähtäessä y -akselin ympäri.



B5

Hahmotellaan tilannetta
piirtämällä funktioiden

$$f(x) = x^2 + 6 \text{ ja}$$

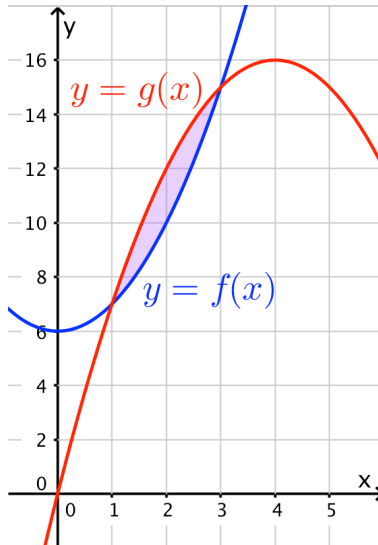
$$g(x) = -x^2 + 8x \text{ kuvaajat.}$$

Ratkaistaan funktioiden
kuvaajien leikkauspisteiden
 x -koordinaatit.

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 + 6 = -x^2 + 8x$$

$$x = 1 \text{ tai } x = 3$$



a)

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_1^3 (-x^2 + 8x - (x^2 + 6)) dx$$

$$= \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

- b) Kappaleen ulkopinta syntyy käyrän $y = g(x)$ ja sisäpinta käyrän $y = f(x)$ pyörittäessä x -akselin ympäri välillä $[1, 3]$.

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 (g(x))^2 dx - \pi \int_1^3 (f(x))^2 dx \\ &= \pi \int_1^3 (-x^2 + 8x)^2 dx - \pi \int_1^3 (x^2 + 6)^2 dx \\ &= \frac{176\pi}{3} = 58\frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

Vastaus a) $2\frac{2}{3}$ b) $\frac{176\pi}{3} = 58\frac{2}{3}\pi$

B6

Funktio $f(x) = \frac{2}{x-1}$ on määritelty ja jatkuva, kun $x \neq 1$.

Määrittelyjoukko koostuu kahdesta välistä, $x < 1$ ja $x > 1$.

1) Määritetään integraalifunktio välillä $x < 1$.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \frac{2}{x-1} dx \\
 &= 2 \ln|x-1| + C && |x-1| < 0, \text{ kun } x < 1 \\
 &= 2 \ln(-(x-1)) + C \\
 &= 2 \ln(1-x) + C
 \end{aligned}$$

Piste $(0, 2)$ kuuluu alueeseen $x < 1$. Määritetään vakio C .

$$F(0) = 2$$

$$2 \ln(1-0) + C = 2$$

$$C = 2$$

Siis $F(x) = 2 \ln(1-x) + 2$

2) Määritetään integraalifunktio välillä $x > 1$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{2}{x-1} dx \\ &= 2 \ln|x-1| + D && |x-1| > 0, \text{ kun } x > 1 \\ &= 2 \ln(x-1) + D \end{aligned}$$

Piste $(2, -1)$ kuuluu alueeseen $x > 1$. Määritetään vakio D .

$$F(2) = -1$$

$$2 \ln(2-1) + D = -1$$

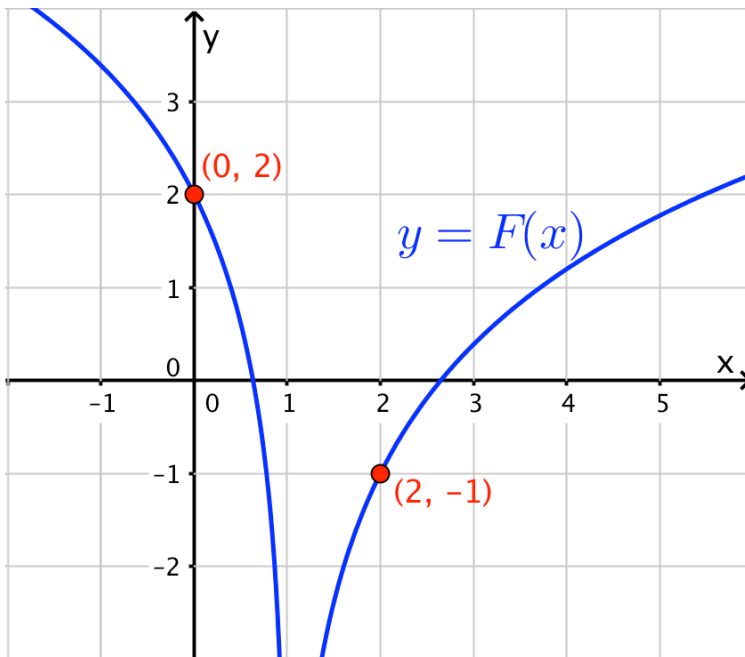
$$D = -1$$

$$\text{Siis } F(x) = 2 \ln(x-1) - 1$$

Integraalifunktioksi saadaan

$$F(x) = \begin{cases} 2 \ln(1-x) + 2, & \text{kun } x < 1 \\ 2 \ln(x-1) - 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

Piirretään integraalifunktion kuvaaja.

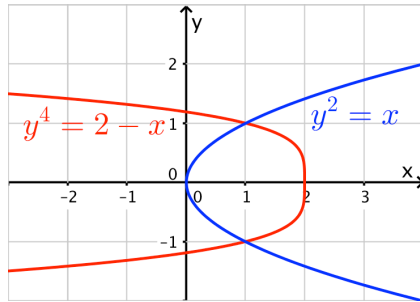


Vastaus
$$F(x) = \begin{cases} 2 \ln(1-x) + 2, & \text{kun } x < 1 \\ 2 \ln(x-1) - 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

B7

Hahmotellaan tilannetta
piirtämällä käyrät $y^2 = x$ ja
 $y^4 = 2 - x$.

Lasketaan alueen pinta-ala
integroimalla muuttujan y
suhteen.



Ratkaistaan integrointia varten käyrien yhtälöistä muuttuja x .

$$x = y^2 \quad | \quad x = 2 - y^4$$

Integrointirajat saadaan ratkaisemalla käyrien leikkauspisteiden
 y -koordinaatit.

$$y^2 = 2 - y^4 \quad \text{Ratkaistaan laskimella.}$$

$$y = -1 \quad \text{tai} \quad y = 1$$

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-1}^1 (2 - y^4 - y^2) dy = \frac{44}{15} = 2 \frac{14}{15}$$

Vastaus $2 \frac{14}{15}$

B8

Käyrä $y = x^2 - a^2$ on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan integrointia varten käyrän ja akselien leikkauskohdat.

x -akselin leikkauskohdat ($y = 0$):

$$x^2 - a^2 = 0$$

$$x^2 = a^2$$

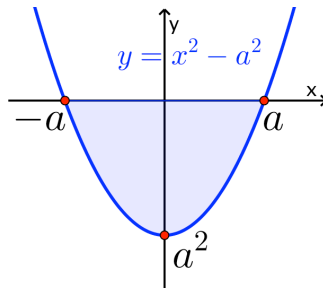
$$x = \pm a$$

y -akselin leikkauskohta ($x = 0$):

$$y = 0^2 - a^2$$

$$y = -a^2$$

Kun $a \neq 0$, niin käyrä ja x -akseli rajaavat alueen x -akselin alapuolella.



- a) Alue pyörrähtää x -akselin ympäri, joten integroidaan muuttujan x suhteen $-a$:sta a :han. Poikkileikkausympyrän säde kohdassa x on $r = |y|$, joten $r^2 = |y|^2 = y^2 = (x^2 - a^2)^2$.

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_{-a}^a r^2 dx = \pi \int_{-a}^a (x^2 - a^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15} a^5$$

b) Alue pyörrää y -akselin ympäri, joten integroidaan muuttujan y suhteen $-a^2$:sta 0 :aan. Poikkileikkaussympyrän säde kohdassa y on $r = |x|$. Koska $y = x^2 - a^2$, niin $x^2 = y + a^2$. Siis $r^2 = |x|^2 = x^2 = y + a^2$.

Lasketaan pyörrhdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_{-a^2}^0 r^2 dy = \pi \int_{-a^2}^0 (y + a^2)^2 dy = \frac{\pi}{2} a^4$$

Ratkaistaan millä vakion a arvolla kappaleiden tilavuudet ovat yhtä suuret.

$$\frac{16\pi}{15} a^5 = \frac{\pi}{2} a^4 \quad \text{Ratkaistaan laskimella.}$$

$$a = 0 \quad \text{tai} \quad a = \frac{15}{32}$$

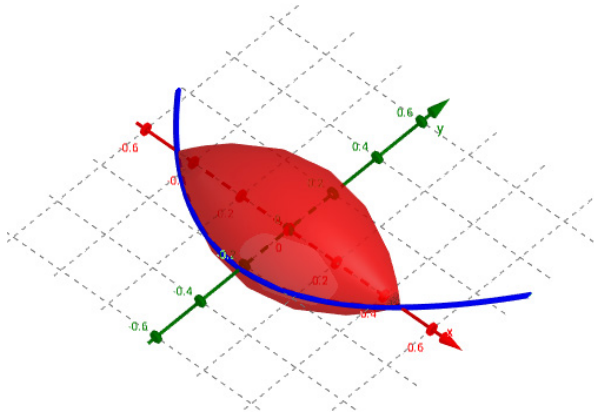
Kappaleiden tilavuudet ovat yhtä suuret, kun $a = \frac{15}{32}$.

Vastaus a) $\frac{16\pi}{15} a^5$ b) $\frac{\pi}{2} a^4$

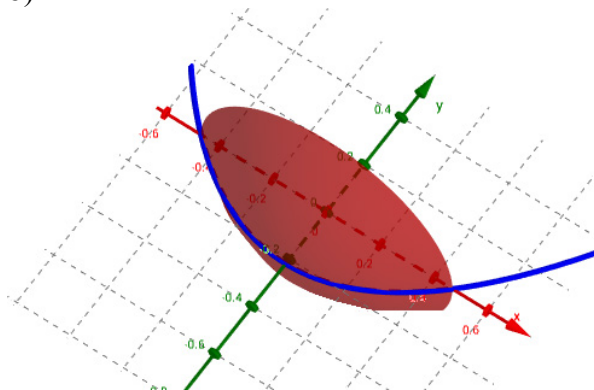
Tilavuudet ovat yhtä suuret, kun $a = \frac{15}{32}$.

Kuvat pyörähdyskappaleista ($a = \frac{15}{32}$):

a)

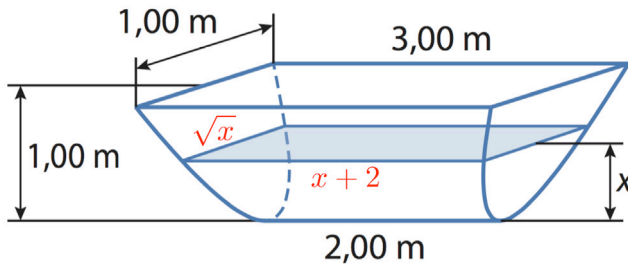


b)



B9

Poikkileikkauksen pinta-ala korkeudella x on $A(x) = (x+2) \cdot \sqrt{x}$, missä $0 \leq x \leq 1$.



Lasketaan altaan tilavuus.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 A(x) dx \\
 &= \int_0^1 ((x+2) \cdot \sqrt{x}) dx \\
 &= \frac{26}{15} = 1,7333... \text{ (m}^3\text{)}
 \end{aligned}$$

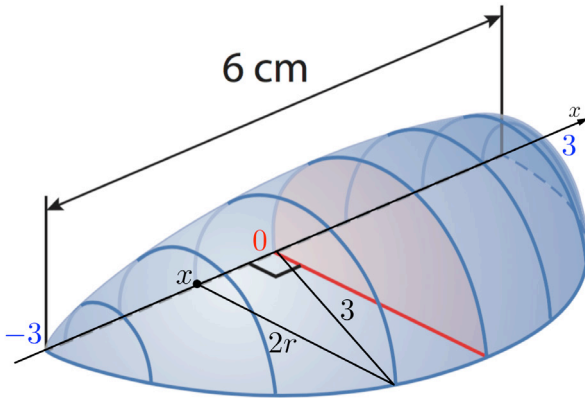
Muutetaan tilavuus litroiksi.

$$1,73333... \text{ m}^3 = 1733,33... \text{ dm}^3 = 1733,33... \text{ L} \approx 1730 \text{ L}$$

Vastaus 1730 litraa

B10

Sijoitetaan koru koordinaatistoon niin, että x -akseli kulkee pitkin korun takareunaa ja origon on pohjana olevan puoliympyrän keskipisteessä.



Määritetään poikkileikkauspuoliympyrän säde kohdassa x . Käytetään suorakulmaista kolmiota ja Pythagoraan lausetta.

$$|x|^2 + (2r)^2 = 3^2$$

$$x^2 + 4r^2 = 9$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{9-x^2} \quad \text{tai} \quad r = -\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}$$

Koska $r \geq 0$, niin $r = \frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}$.

x -akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-ala on

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{9-x^2} \right)^2 = \frac{\pi}{8} (9-x^2).$$

Lasketaan korun tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \int_{-3}^3 A(x) dx && \text{Kappale ulottuu kohdasta } -3 \text{ kohtaan } 3. \\ &= \int_{-3}^3 \left(\frac{\pi}{8} (9 - x^2) \right) dx \\ &= \frac{9\pi}{2} \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Lasketaan lopuksi korun massa.

$$m = \frac{9\pi}{2} \text{ cm}^3 \cdot 1,2 \text{ g/cm}^3 = 16,964... \text{ g} \approx 17 \text{ g}$$

Vastaus 17 g