S2020/12

1. Paraabelille $y = x^2$ pisteeseen $T(t) = (t, t^2)$ piirretyn normaalin kulmakerroin on tähän samaan kohtaan piirretyn tangentin kulmakertoimen käänteisluvun vastaluku.

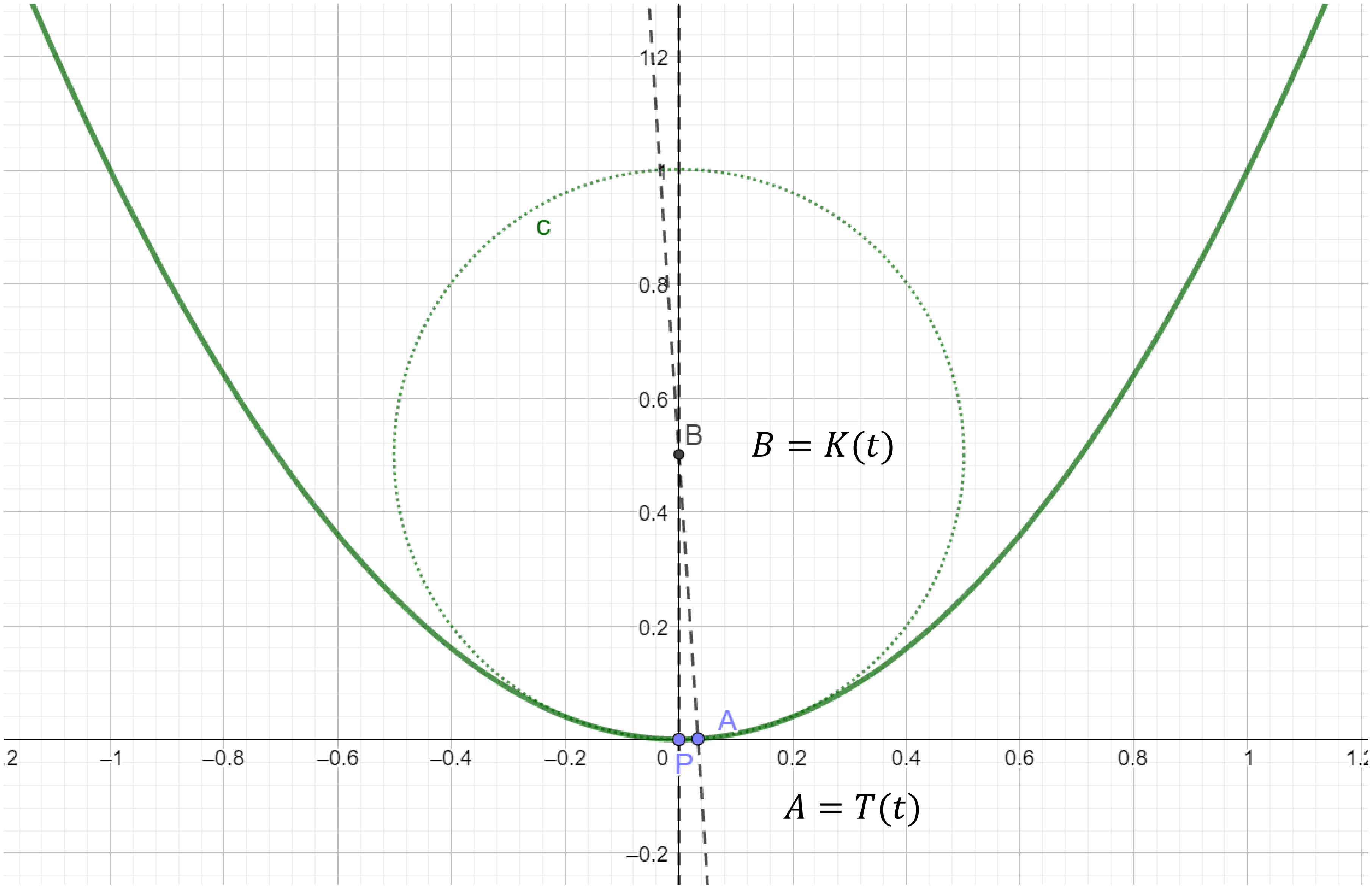
Tangentin kulmakerroin saadaan derivaatalla: $y' = 2x$, joten tangentin kulmakerroin kohdassa t on $2t$ ja vastaavasti normaalin kulmakerroin $-\frac{1}{2t}$.

Normaalisuoran yhtälö on siis

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t) \qquad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$$

Tämän suoran ja y −akselin leikkauspisteen $K(t)$ y −koordinaatti $k(t)$ saadaan sijoittamalla suoran yhtälöön $x = 0$. Tulokseksi saadaan $k(t) = t^2 + \frac{1}{2}$.

Siis $K(t) = \left(0, t^2 + \frac{1}{2}\right)$.



c
B
$B = K(t)$
A
P
$A = T(t)$
1.2
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

2. Pisteen $K(0)$ y −koordinaatti saadaan raja-arvona:

$$\lim_{t \longrightarrow 0} k(t) = \lim_{t \longrightarrow 0} \left(t^2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Näin ollen $K(0) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, joten kaarevuussäde origossa on $\frac{1}{2}$.

3. Hyödynnetään 1. kohdan tulosta. Koska normaalisuoran yhtälö pisteessä (t, t^2) on

$$y = -\frac{1}{2t} x + t^2 + \frac{1}{2},$$

Niin pisteessä $(1, 1)$ se saa muodon

$$y = -\frac{1}{2} x + \frac{3}{2}.$$

Lasketaan (symbolisen laskennan ohjelmalla) tämän normaalin ja yleisen normaalisuoran ($t \neq 1$) leikkauspisteiden koordinaatit x ja y:

Tulokseksi saadaan

$x = -2t^2 - 2t$ ja

$y = t^2 + t + \frac{3}{2}$

Kun $t \longrightarrow 1$ koordinaateiksi tulee

x: $\lim\limits_{t \longrightarrow 1} (-2t^2 - 2t) = -4$

y: $\lim\limits_{t \longrightarrow 1} (t^2 + t + \frac{3}{2}) = \frac{7}{2}$

1 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$\rightarrow \; \mathbf{y = \frac{-1}{2}\,x + \frac{3}{2}}$

2 $y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$

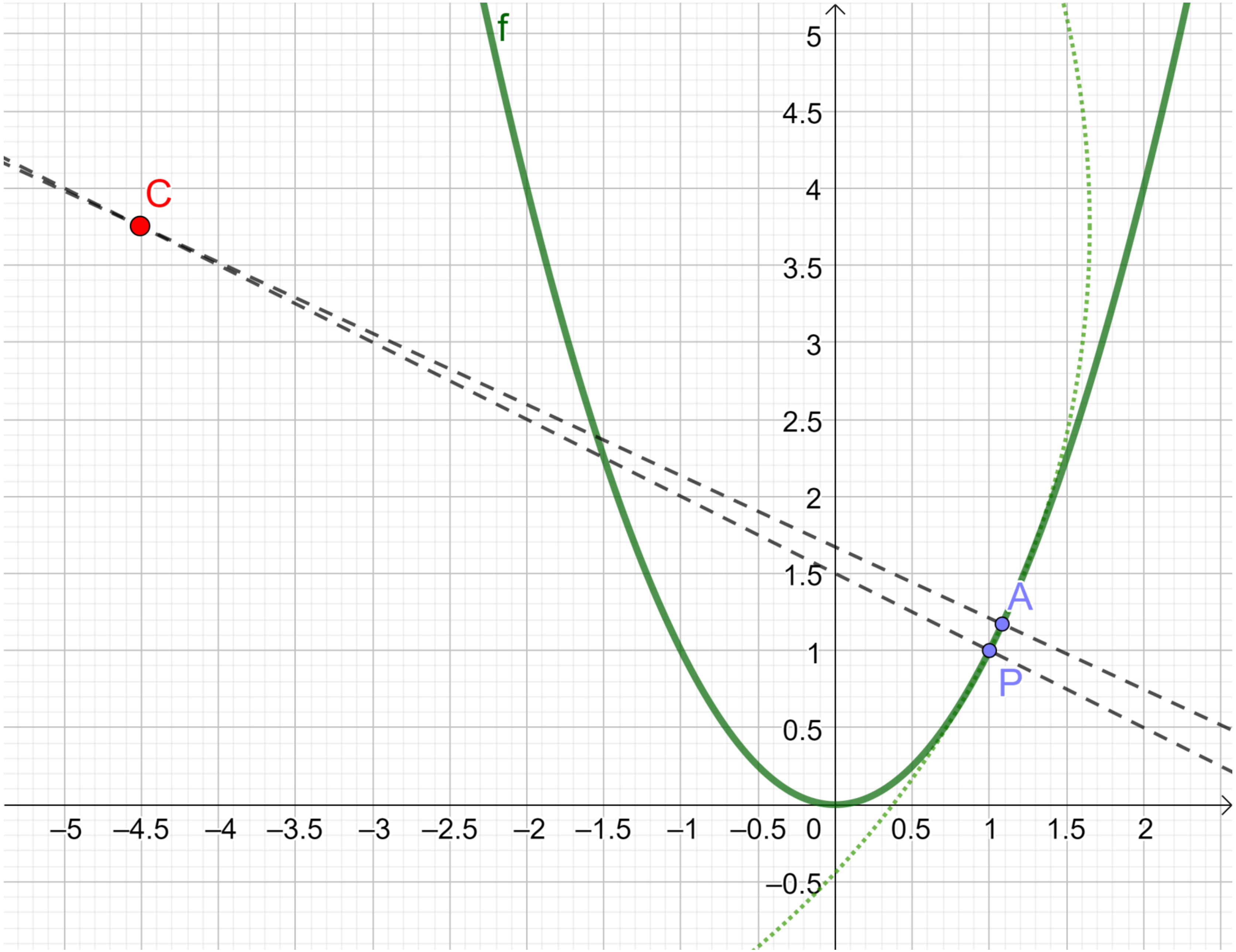
$\rightarrow \; \mathbf{y = t^2 - \frac{x}{2\,t} + \frac{1}{2}}$

3 $\{\$1, \$2\}$

Ratkaise: $\left\{\left\{\mathbf{x = -2\,t^2 - 2\,t, y = t^2 + t + \frac{3}{2}}\right\}\right\}$

Kysytty kaarevuussäde pisteessä $(1{,}1)$ on suorien leikkauspisteen $\left(-4, \frac{7}{2}\right)$etäisyys pisteestä $(1{,}1)$:

$$\sqrt{\left(\frac{7}{2} - 1\right)^2 + (-4 - 1)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$



f
C
A
P
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
–0.5
–5
–4.5
–4
–3.5
–3
–2.5
–2
–1.5
–1
–0.5
0
0.5
1
1.5
2