

## 15. Yhtälön numeerinen ratkaiseminen

Kaikilla yhtälöillä ei ole ratkaisumenetelmää, jolla löydetään yhtälön ratkaisujen tarkat arvot.

### Puolitusmenelmällä ratkaistaan yhtälö $f(x) = 0$

Jos jatkuva funktio saa välin päätepisteissä erimerkkiset arvot, niin funktion kuvaaja leikkaa x-akselia tällä välillä **ainakin** kerran  $\Rightarrow$  funktiolla **ainakin yksi nollakohta** tällä välillä.

Esim1.

Funktiolla  $f(x) = 2^x - 2x^2 - x$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $]0,1[$ . Määritä puolitusmenelmällä tämän nollakohdan likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

Ratk.

Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku välillä  $[0,1]$ .

| Funktion arvot             | Nollakohta välillä | Välin keskipiste |
|----------------------------|--------------------|------------------|
| $f(0) = 1 > 0$             |                    |                  |
| $f(1) = -1 < 0$            | $]0;1[$            | 0,5              |
| $f(0,5) = 0,41... > 0$     | $]0,5;1[$          | 0,75             |
| $f(0,75) = -0,19... < 0$   | $]0,5;0,75[$       | 0,625            |
| $f(0,625) = 0,13... > 0$   | $]0,625;0,75[$     | 0,6875           |
| $f(0,6875) = -0,02... < 0$ | $]0,625;0,6875[$   | 0,65625          |
| $f(0,65625) = 0,05... > 0$ | $]0,65625;0,6875[$ |                  |

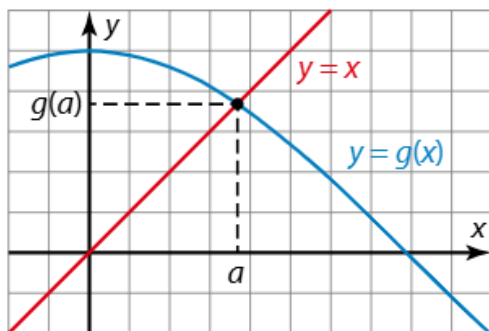
Viimeisen välin piitepisteet pyöristyvät desimaalin tarkkuudella 0,7.

V:  $x = 0,7$

### Kiintopistemenetelmällä ratkaistaan yhtälö $x = g(x)$

Iterointi tarkoittaa menettelyä, jossa samaa toimenpidettä toistetaan uudestaan ja uudestaan.

Funktion  $g$  kuvaajan  $y = g(x)$  ja suoran  $y = x$  leikkauspisteissä x- ja y-koordinaatit ovat yhtä suuret. Jos leikkauspisteen x-koordinaatti on  $a$ , on  $a = g(a)$ . Muuttujan arvo  $x = a$  kutsutaan funktion  $g$  kiintopisteeksi.



Kiintopistemenetelmä on iterointimenetelmä, jolla voidaan löytää muotoa  $x = g(x)$  olevan yhtälön ratkaisu  $x = a$ .

Kun funktiota  $g$  iteroidaan alkuarvosta  $x_1$  lähtien, muodostuu jono lukuja:

$$x_1$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$x_3 = g(x_2)$$

.

.

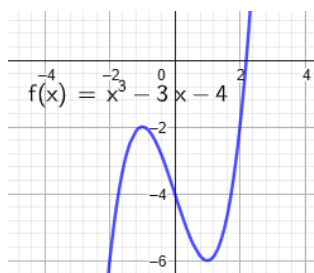
.

Oletetaan, että funktiolla  $g$  on kiintopiste  $a$ . Voidaan osoittaa, että iteroitaessa saatavat luvut  $x_1, x_2, x_3, \dots$  lähestyvät kiintopistettä  $a$ , jos funktion kuvaaja ei ole kiintopisteen kohdalla liian jyrkkä ja alkuarvo  $x_1$  on valittu riittävästi läheltä kiintopistettä.

Esim2.

Määritä kiintopistemenetelmällä funktion  $f(x) = x^3 - 3x - 4$  nollakohta kahden desimaalin tarkkuudella.

Ratk.



Kuvaajan perusteella funktion nollakohta on n.  $x = 2,1$ . Valitaan iteroinnin alkuarvoksi  $x_1 = 2$

Muokataan yhtälö  $f(x) = 0$  muotoon  $x = g(x)$

$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 3x - 4 = 0$$

$$x^3 = 3x + 4$$

$$x = \sqrt[3]{3x + 4}$$

Funktion  $f$  nollakohta on funktion  $g(x)$  kiintopiste. Iteroidaan funktiota  $g$  lähtien alkuarvosta  $x_1 = 2$

$$g(x) := \sqrt[3]{3 \cdot x + 4} \quad \text{► Valmis}$$

$$x_1 := 2 \quad \text{► 2}$$

$$x_2 := g(x_1) \quad \text{► 2.15443}$$

$$x_3 := g(x_2) \quad \text{► 2.18721}$$

$$x_4 := g(x_3) \quad \text{► 2.19403}$$

$$x_5 := g(x_4) \quad \text{► 2.19545}$$

$$x_6 := g(x_5) \quad \text{► 2.19575}$$

$$x_7 := g(x_6) \quad \text{► 2.19581}$$

$$x_8 := g(x_7) \quad \text{► 2.19582}$$

Iterointi suppenee kohti funktion  $g$  kiintopistettä 2,195...

Funktion  $f$  nollakohta on kahden desimaalin tarkkuudella 2,20

V:  $x = 2,20$

Tehtävät:

15.1, 15.7, 15.13, 15.18