

Lyhyen matikan

Ylioppilastehtävät

Aihelajiteltuina ja mallivastausvideoin

Matti Leppänen Parolan lukio
3.10.2017

1. Yhtälöitä ja sieventämisiä

1. K2015/2

- a) Määritä lausekkeen $x(4x-2)-3x(x-1)-x$ arvo, kun $x=-1$.
b) Anna esimerkki toisen asteen yhtälöstä, jonka yksi juuri on $x=1$.
c) Muuttujan arvo $x=2$ toteuttaa yhtälön $x(x-5)+ax=2$. Määritä kerroin a .



2. S14/1

- a) Ratkaise yhtälö $\frac{x+2}{5} = \frac{x-3}{6}$.
b) Laske lausekkeen $\frac{x+1}{y-1} + \frac{y-1}{x+1}$ arvo, kun $x=\frac{1}{2}$ ja $y=\frac{3}{2}$.
c) Missä pisteessä suorat $x+5y=1$ ja $x-5y=5$ leikkaavat toisensa?



3. S14/2

Mikä luku x toteuttaa annetun yhtälön?

- a) $2^x = 2$
b) $2^x = \frac{1}{2}$
c) $2^x = 8^2$
d) $3^x = \frac{1}{3^5}$
e) $10^x = 1000$
f) $10^x = 0,01$.



4. K14/1

a) Ratkaise yhtälö $2x^2 = x$.

b) Laske lausekkeen $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ arvo, kun $a = 1$ ja $b = \frac{1}{2}$.

c) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{3} = \frac{x-1}{4}$.



5. K14/2

a) Missä pisteessä suora $x - 5y = 4$ leikkaa y -akselin?

b) Ratkaise yhtälö $4x^3 = 48$. Anna tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo.

c) Ratkaise yhtälö $2 \cdot 3^x = 162$.

6. S13/1

a) Ratkaise yhtälö $(x-2)^2 = 4$.

b) Millä muuttujan x arvolla lausekkeet $2x+3$ ja $-(x+3)$ saavat saman arvon?

c) Laske lausekkeen $a(b-2) + (a-b)^2 - b(1-a)$ arvo, kun $a = 2$ ja $b = -2$.



7. K13/1

a) Ratkaise yhtälö $2(x+4) - 3(x-3) = 0$.

b) Laske lukujen $\frac{3}{4}$ ja $\frac{6}{5}$ käänteislukujen keskiarvo.

c) Sievennä lauseke $\frac{3a - 6a^2}{3a}$.



8. K13/2b



a) Millä muuttujan x arvoilla $4x+17$ on suurempi kuin $2-x$?

b) Ratkaise yhtälö $x^2+14x=-49$.

c) Suora kulkee origon ja pisteen $(2,3)$ kautta. Kulkeeko se myös pisteen $(48,75)$ kautta?

a) x suurempi kuin -3 b) $x=-7$ c) ei kulje, sillä 75 on erisuuri kuin 72

9. S12/1

a) Ratkaise yhtälö $x^2-2x=0$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{2}{3}x-1=\frac{2}{3}$.

c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x+2y=-4 \\ 2x-y=-3. \end{cases}$$



a) $x=0$ tai $x=2$ b) $x=5/2$ c) $x=-2$ ja $y=-1$

10. S12/3

a) Määritä funktion $f(x)=x(x+2)^2$ derivaatta kohdassa $x=0$.

b) Ratkaise yhtälö $2^{3x+1}=32$.

c) Ratkaise yhtälö $\log_4(3x)=3$.

a) $f'(0)=4$ b) $x=4/3$ c) $x=64/3$, ihme tehtävä!



11. K12/1

a) Ratkaise yhtälö $7x + 3 = 31$.

b) Laske lausekkeen $\frac{2a+3b}{a-b}$ arvo, kun $a = \frac{5}{2}$ ja $b = \frac{7}{3}$.

c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 8. \end{cases}$$

a) $x=4$

b) 72

c) $x=3, y=5$



12. S11/1

a) Laske lausekkeen $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ arvo, kun $x = 3$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{5}{x} = -\frac{1}{2}$.

c) Ratkaise yhtälö $x^2 - 3(x + 3) = 3x - 18$.

a) 2

b) $x=-10$

c) $x=3$



13. K11/1

a) Ratkaise yhtälö $4x + (5x - 4) = 12 + 3x$.

b) Sievennä lauseke $x^2 + x - (x^2 - x)$ ja laske sen arvo, kun $x = \frac{1}{2}$.

c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 3y = 1. \end{cases}$$

a) $x=8/3$

b) $2x$, arvo 1

c) $y=-1, x=-2$



14. S10/1

a) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{3} + \frac{1-x}{4} = \frac{1}{6}$.

b) Ratkaise yhtälö $(x - 2)^2 - 4(2 - x) = 0$.

c) Mikä on lausekkeen $\frac{3x-1}{x+1}$ arvo, kun $x = \frac{4}{7}$?

a) $x=-1$

b) $x=2$ tai $x=-2$

c) arvo $5/11$



15. K10/1

a) Ratkaise yhtälö $\frac{1}{2}(3x - 2) = \frac{1}{3}(2x + 3)$.

b) Ratkaise yhtälö $(x + 2)(x - 2) = 5$.

c) Määritä suorien $x + y = 2$ ja $2x - y = 5$ leikkauspiste.

a) $x=12/5$ b) $x=3$ tai $x=-3$ c) pisteessä $(7/3, -1/3)$



16. S09/1

a) Ratkaise yhtälö $\frac{1 - 5x}{5} = \frac{3 + 4x}{2}$.

b) Sievennä lauseke $(5 + x^2) - (4x^2 + x)$ ja laske sen arvo, kun $x = -2$.

c) Ratkaise yhtälö $4x^2 - 8x + 3 = 0$.

a) $x=-13/30$ b) $-3x^2-x+5$, arvo -5 c) $x=3/2$ tai $x=1/2$



17. K09/1

a) Muodosta polynomien $-x^2 + 2x$ ja $2x^2 - 3x + 1$ summa ja tulo.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = x - 1$.

c) Ratkaise yhtälöryhmä $x + y = 1$, $x - y = 2$.

a) S: x^2-x+1 , T: $-2x^4+7x^3-7x^2+2x$ b) $x=6/5$ c) $x=3/2$, $y=-1/2$



18. S08/1

a) Ratkaise yhtälö $4x^2 + 9 = -12x$.

b) Ratkaise yhtälö $x = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

c) Sievennä lauseke $\frac{5x + 3y}{3} + \frac{x - 6y}{2}$.

a) $x = -3/2$

b) $x = -3$

c) $13x - 12y$



19. K08/1

a) Ratkaise yhtälö $2x + 1 = x^2 + 2x$.

b) Ratkaise yhtälöryhmä $2x + y = 1, x - y = 0$.

c) Kumpi luvuista $\frac{5}{7}$ ja $\frac{6}{9}$ on suurempi? Perustele ratkaisusi likiarvoja käyttämättä esimerkiksi muodostamalla lukujen erotus.



20. K08/2

a) Ratkaise yhtälö $5x - (1 - x) = 13x$.

b) Määritä lukujen 7, 3, 6, 3, 5, 3, 1 mediaani ja keskiarvo.

c) Sievennä lauseke $\frac{a+3}{a} : \frac{3a+9}{2a}$.



21. S07/1

a) Ratkaise yhtälö $7x^2 + 3x = 0$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{1}{4}x + 1 = \frac{1}{5}(2x + 2)$.

c) Sievennä lauseke $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.



22. K07/1

a) Ratkaise yhtälö $\frac{3}{4}(x - \frac{1}{12}) = \frac{1}{3}(\frac{3}{4}x - \frac{1}{5})$.

b) Ratkaise yhtälö $7x(3 + 7x) - 4 = 0$.

c) Mikä on lausekkeen $\frac{a(a-1)}{x} + ax$ arvo, kun $x = a - 1$?



23. S06/1

Ratkaise yhtälöt a) $x + 2(4 + x) = -1$, b) $\frac{5 + x^2}{x} = \frac{5x - 13}{3}$.

(merkkivirhe kohdassa b) oikea vastaus $x = -1$ ja $x = 15/2$)



24. K06/1

Ratkaise yhtälöt a) $20x^2 - 49x + 9 = 0$, b) $\frac{x}{3} + \frac{4}{6} = \frac{x}{2}$.



25. K06/2

Sievennä lausekkeet

a) $\frac{x^2}{3x} + \frac{2(1-x)}{6}$, b) $\frac{(x+2)(x-2)}{x^2-4}$, c) $\frac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7}$.



26. S05/1

a) Ratkaise yhtälö $(3x-2)(3x+5)=0$. b) Mikä on lausekkeen $\frac{a^2-c^2}{b-c}$ arvo, kun $a=1$, $b=-2$ ja $c=-\frac{1}{2}$?



27. K05/1

Ratkaise a) yhtälö $3x+2=x-4(5x-1)$, b) yhtälö $\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = x+1$.



28. S15/1

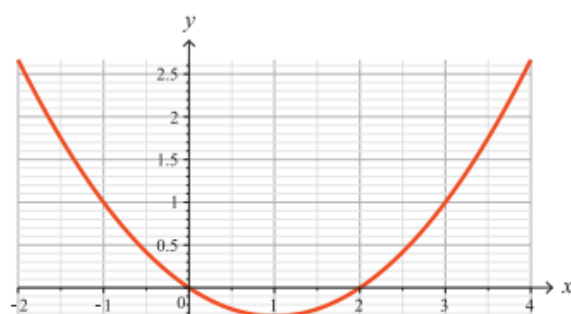
- a) Laske luvun -1 vastaluvun ja luvun 5 käänteisluvun keskiarvo.
b) Neliön sivun pituus on 2 ja ympyrän halkaisijan pituus on myös 2 . Kuinka monta prosenttia neliön pinta-ala on suurempi kuin ympyrän pinta-ala?
c) Ratkaise yhtälö $2^{3x-2} = 2^{x+1}$.



29. S15/3

Oheisessa kuviossa on erään funktion $f(x)$ kuvaaja. Määritä kuvaajan avulla ne muuttujan x arvot, joille $-2 \leq x \leq 4$ ja

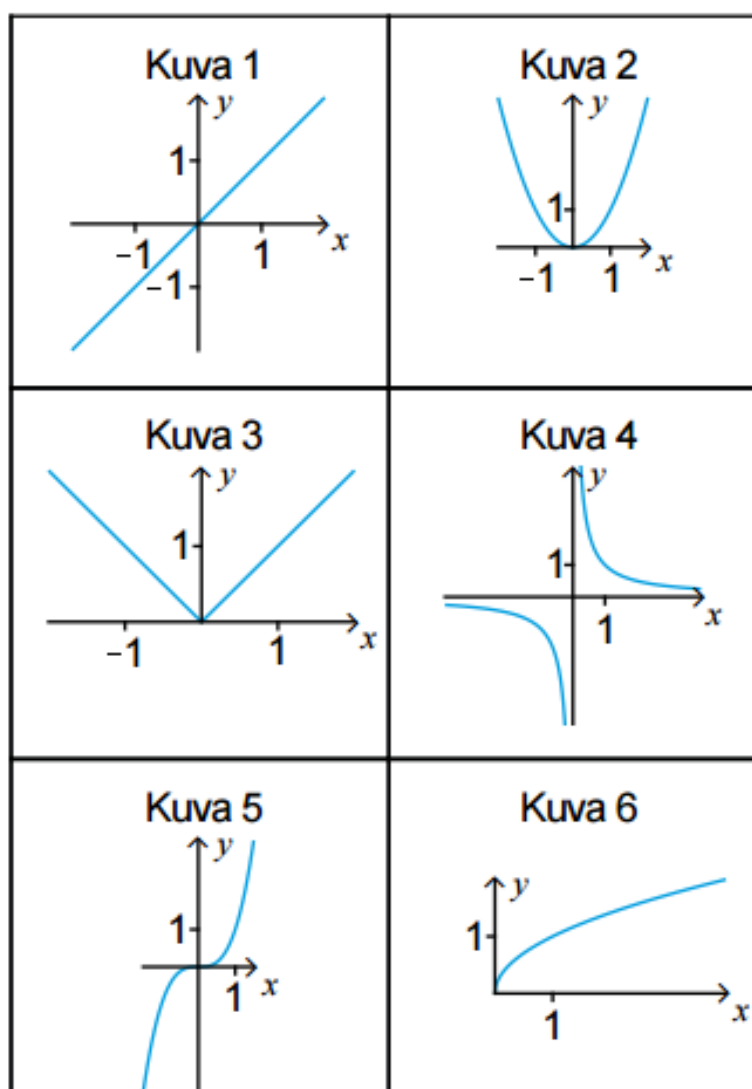
- a) $f(x) = 1$
b) $f(x) \leq 0$
c) $f'(x) \leq 0$.



30. K12/2

Kuvissa 1–6 on oheisessa taulukossa mainittujen funktioiden $y = f(x)$ kuvaajat. Kopioi taulukko vastauspaperiisi ja merkitse siihen, mikä kuvaaja esittää annettua funktiota.

$f(x)$	x^2	$\frac{1}{x}$	x	$\sqrt{x}$	x^3	$ x $
Kuva						



Ratkaise yhtälöt

1. $\frac{3}{x} = 6$

2. $-3x + 6 = -2x - 2$

3. $\frac{x-3}{2} - 2 = \frac{1}{3}$

4. $\frac{3x-1}{2} = -\frac{2x}{2}$

5. $3x^2 - 27 = 0$

6. $x(x-2) = 0$

7. $(x+1)^2 = 2x$

8. $\frac{2x}{2x+3} = \frac{2x+1}{8} \text{ (K00)}$

9. $x\left(x - \frac{7}{10}\right) = \frac{1}{10} - x \text{ (K01)}$

10. $2^x = 7$

11. $x^{14} - 76 = 0$

12. Olkoon $f(x) = x^2 - 3,1x - 1,4$. Laske funktion nollakohdat ja tutki, millä välillä funktio saa negatiivisia arvoja (K04)
13. Määritä yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ ne ratkaisut, jotka ovat välillä $-1 < x < 1,5$. (K01)
14. Millä x :n arvolla lauseke $\frac{4x}{x-1}$ saa arvon 13? (K03)
15. Tutki, onko yhtälöillä $\frac{3}{5}x + 2 = 1$ ja $3x^2 - 7x - 20 = 0$ samoja ratkaisuja. (K00)
16. Ratkaise yhtälö $x(x+1) = 156$ (K04)



2. Mab9/prosentiyo

1. S15/7 vaikea

Kotimaisen meetvurstin rasvapitoisuus on 36 painoprosenttia. Kuinka monta prosenttia rasvaa meetvurstista pitää vähentää, jotta tuotteen uudeksi rasvapitoisuudeksi tulee 30 painoprosenttia?



2. S14/4

Hammastahnaputkilon tilavuus on 100 ml ja hinta 1,50 €. Putkilon tilavuutta kasvatetaan 25 %, mutta samalla myyntihintaa korotetaan 40 %. Kuinka monta prosenttia kalliimpaa hammastahnaa on uudessa putkilossa millilitraa kohden?



V: 12%

3. K14/4

Kuution särmän pituus puolittuu. Kuinka monta prosenttia pienenee kuution

a) tilavuus?

b) sivutahkojen yhteenlaskettu pinta-ala?



V: a) 87,5% b) 75%

4. K14/5

Boolimaljassa on 4,0 litraa sekoitusta, jonka tilavuudesta 70 % on kuohuviiniä ja 30 % mansikkamehua. Kuinka paljon siihen täytyy lisätä kuohuviiniä, jotta mehun osuus on 20 %?

V: 2 litraa



5. s13/2c

c) Suorakulmion kanta on 11 cm ja korkeus 7 cm. Sen kanta lyhenee 20 prosenttia, ja korkeus kasvaa 20 prosenttia. Kuinka monta prosenttia suorakulmion pinta-ala pienenee?

V: 4%



6. K13/6

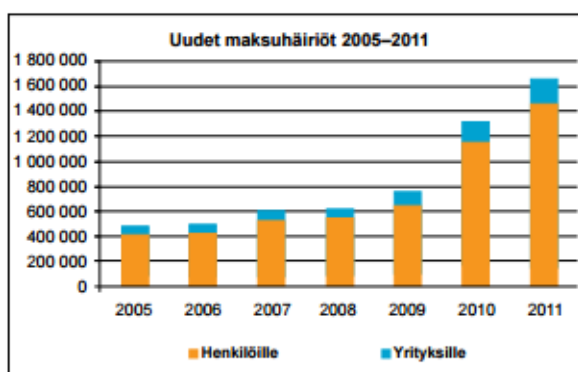
Tennispalloja myydään suoran ympyrälieriön muotoisessa pakkauksessa, johon mahtuu neljä palloa tiiviisti päällekkäin pakattuna. Tennispallon halkaisija on 6,68 cm. Kuinka monta prosenttia pakkauksen tilavuudesta pallot täyttävät? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.



7. K13/8

Vuonna 2005 yksityishenkilöiden maksuhäiriöiden lukumäärä Suomessa oli 422 500, ja vuonna 2011 se oli 1 460 500.

- Kuinka monta prosenttia maksuhäiriöiden lukumäärä kasvoi tällä aikavälillä? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.
- Vuonna 2011 ministeriö asetti tavoitteeksi vähentää maksuhäiriöiden määrän neljässä vuodessa takaisin vuoden 2005 tasolle. Kuinka monta prosenttia määrä vähenee vuodessa, kun vuotuinen vähenemisprosentti on sama? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.



8. S12/2a

- Mikä on meetvurstin suolapitoisuus prosentin kymmenesosan tarkkuudella, kun 250 grammassa meetvurstia on 9,0 grammaa suolaa?



9. K12/8

Naisten hiusten leikkaus maksaa nyt 45 euroa. Kuinka paljon se maksaa kymmenen vuoden kuluttua, jos hintaa korotetaan vuoden välein 2,5 %?



10. S11/5

Osakkeen arvo laski 46 prosenttia ja nousi sitten ensiksi 15 prosenttia ja tämän jälkeen vielä 34 prosenttia.

- a) Oliko osakkeen arvo näiden muutosten jälkeen suurempi vai pienempi kuin ennen muutoksia?
- b) Kuinka monta prosenttia jälkimmäisen nousun olisi pitänyt olla, jotta olisi palattu alkuperäiseen arvoon?



11. K11/3b

- a) Määritä sellainen vakio a , että $x = 2$ toteuttaa yhtälön $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$.
- b) Positiivinen luku a kasvaa 20 % ja pienenee tämän jälkeen 17 %. Onko tulos suurempi vai pienempi kuin alkuperäinen luku a ? Kuinka monta prosenttia alkuperäisestä luvusta muutos on?



12. K11/14

- a) Säätiöllä on 1,8 miljoonan euron pääoma, jonka vuosittainen tuotto on 5,4 prosenttia. Eräänä vuonna säätiö on päättänyt siirtää tuotosta 30 prosenttia pääomaan ja jakaa lopusta tuotosta kaksi 21 000 euron suuruista apurahaa opiskeluun ulkomailla sekä 14 yhtä suurta matka-apurahaa. Kuinka suuria matka-apurahat ovat?
- b) Kuinka suureksi säätiön 1,8 miljoonan euron pääoma kasvaa viidessä vuodessa, jos tuotto on jokaisena vuotena 5,4 prosenttia pääomasta ja vuosittain pääomaan siirretään 30 prosenttia tuotosta?



13. S10/5

Tuotteen hintaa korotetaan ensin 45 prosenttia ja sen jälkeen 62 prosenttia. Näytä, että tulos on sama, jos tuotteen hintaa korotetaan ensin 62 prosenttia ja sitten 45 prosenttia. Kuinka monen prosentin nousua tuotteen hinnassa korotukset yhteensä merkitsevät? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.



14. K10/4

Kuinka monta litraa 12-prosenttista suolaliuosta on lisättävä kolmeen litraan 5-prosenttista suolaliuosta, jotta saadaan 8-prosenttinen suolaliuos?



15. s09/4

Elintarvikkeiden arvonlisävero on 17 prosenttia tuotteen verottomasta hinnasta. Tappio maksoi ruokaostoksistaan 54,35 euroa. Kuinka monta euroa ostoksen hinta aleni, jos ruoan arvonlisäveroa laskettaisiin 9 prosenttiyksiköllä? Kuinka suuri olisi ostoksen hinnan alennus prosentteina?



16. s09/15

Mauri on ottanut asuntolainaa 81 600 euroa 4,2 prosentin korolla. Hän lyhentää sitä vuosittain 4 800 euroa ja maksaa samalla siihen mennessä kertyneet korot. Kuinka paljon korkoa hän maksaa toisen vuoden lopussa? Kuinka monta vuotta lainan takaisinmaksu kestää? Kuinka paljon korkoa Mauri maksaa kaiken kaikkiaan?



17. K09/14

Talletustilin vuosikorko on 1,50 prosenttia, ja korkotuotosta peritään vuosittain 29 prosentin lähdevero. Tiliä avattaessa talletetaan 1 000 €, eikä muita talletuksia tehdä.

a) Kuinka paljon tilillä on rahaa kymmenen vuoden kuluttua, kun korko liitetään pääomaan vuoden välein?

b) Monenko vuoden kuluttua talletus on kaksinkertaistunut?



18. S08/4

Lentokoneen käyttökustannuksista polttoaineen osuus on 35 %. Kuinka monta prosenttia polttoaine voi kallistua, ennen kuin käyttökustannukset kasvavat 10 %? Anna vastaus promillen tarkkuudella.



19. K08/9

Lomapaketin hinta koostui hotelli- ja matkakustannuksista. Hotellikustannukset las-
kivat 5 % ja matkakustannukset nousivat 18 %. Muutosten jälkeen lomapaketin hinta
oli sama kuin aikaisemminkin. Kuinka monta prosenttia matkakustannukset olivat
lomapaketin hinnasta ennen muutoksia?



20. S07/3

Suomen sähkönkulutus vuonna 2005 oli 84,9 TWh (terawattituntia). Tästä katettiin
omalla ydinvoimalla 26,3 %, muilla kotimaisilla energialähteillä 53,7 % ja tuontisäh-
köllä loput. Olkiluodon uusi ydinvoimala lisää sähköntuotantoa 14 TWh:lla vuonna
2009. Oletetaan, että sähkönkulutus on tällöin noussut vuoden 2005 tasosta 12 %,
muuta muutoksia kotimaisessa energiantuotannossa ei ole tapahtunut ja tuonnilla
katetaan edelleen kotimaisen tuotannon ylittävä osuus. Mikä on tällöin kotimaisen
ydinvoiman ja mikä tuontisähkön suhteellinen osuus kokonaiskulutuksesta?



21. K07/4

Tuotteen myyntitulot kasvoivat edelliseen vuoteen verrattuna 5,0 % vuonna 2004
ja 3,0 % vuonna 2005. Vuonna 2003 tuotteen valmistuskustannukset olivat 91 %
tavarán myyntituloista. Vuonna 2004 valmistuskustannukset olivat 7,1 % suuremmat
kuin vuonna 2003, ja seuraavana vuonna ne nousivat edelleen 1,2 %. Kuinka monta
prosenttia myyntitulot olivat valmistuskustannuksia suuremmat vuonna 2005?



22. K07/9

Täyttäessään 20 vuotta Laura oli 25 prosenttia vanhempi kuin sisarensa Veera. Kuin-
ka monta prosenttia sisartaan vanhempi Laura on täyttäessään 30 vuotta?



23. K07/15

Piensijoittaja osti yhtiön osakkeita 1 200 eurolla. Ensimmäisenä vuonna osakkei-
den kurssi laski 15,6 prosenttia, mutta seuraavana vuonna se nousi 8,1 prosenttia.
a) Kuinka monta prosenttia osakkeiden kurssin tulisi nousta kolmantena vuonna,
jotta osakkeiden arvo olisi alkuperäisen suuruinen? b) Sijoittaja arvioi, että kurs-
sinousu kolmantena vuonna on normaalisti jakautunut keskiarvona 7,0 prosenttia
ja keskihajontana 5,0 prosenttia. Mikä on todennäköisyys, että kolmannen vuoden
lopussa osakkeiden arvo on vähintään alkuperäisen suuruinen?



24. S06/7

Lauralta kului koulumatkaan 15 minuuttia. Tavallisesti hän saapui kouluun kellon soidessa. Eräänä aamuna hän lähti kotoa 6 minuuttia tavallista myöhempään, ja vaikka hän kulki nopeammin, hän myöhästyi. Koulun kellon soidessa hänellä oli vielä 5 % matkasta jäljellä. Kuinka monta prosenttia tavallista nopeammin hän oli tällöin kulkenut?



25. S06/13

Tuotteen hintaa nostettiin p %. Huonon menekin vuoksi näin saatua hintaa laskettiin myöhemmin $2p$ %, jolloin hinta oli 5,5 % halvempi kuin ennen korotusta. Muodosta yhtälö luvun p määrittämiseksi ja ratkaise p .



26. K06/5

Suomen viennin jakauma vuonna 2003 sekä viennin määrässä vuonna 2004 tapahtuneet muutokset käyvät ilmi seuraavasta taulukosta. (Lähde: Kaupan Keskusliitto.)

Vienti toimialoittain	Jakauma vuonna 2003 (%)	Muutos vuodesta 2003 vuoteen 2004 (%)
Puu- ja paperiteollisuus	25,4	+13,6
Kemianteollisuus	8,7	+4,4
Kone- ja metalliteollisuus	25,1	-4,4
Sähkötekninen teollisuus	24,3	+1,9
Muut	16,5	+14,6



a) Lisääntyikö vai vähenikö kokonaisvientä vuonna 2004? Kuinka monta prosenttia muutos oli? b) Esitä viennin prosentuaalinen jakauma vuonna 2004.

27. S05/3

Boolin valmistukseen käytettiin 0,4 litraa marjamehua, puoli litraa vodkaa ja 1,5 litraa soodavettä. Vodkan alkoholipitoisuus on 38 tilavuusprosenttia. Paljonko boolissa oli alkoholia a) litroina, b) tilavuusprosentteina?



28. K05/8

Henkilön palkasta jäi ennakonpidätyksen jälkeen käteen 73 %. Vuodenvaihteessa henkilö sai 45 euron palkankorotuksen. Samanaikaisesti ennakonpidätys laski 0,8 prosenttiyksikköä. Henkilölle jäi ennakonpidätyksen jälkeen käteen nyt 49,60 euroa enemmän kuin ennen muutoksia. Mikä oli henkilön uusi ennakonpidätysprosentti, ja mikä oli hänen uusi palkkansa?



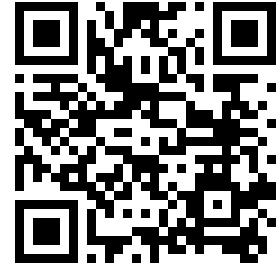
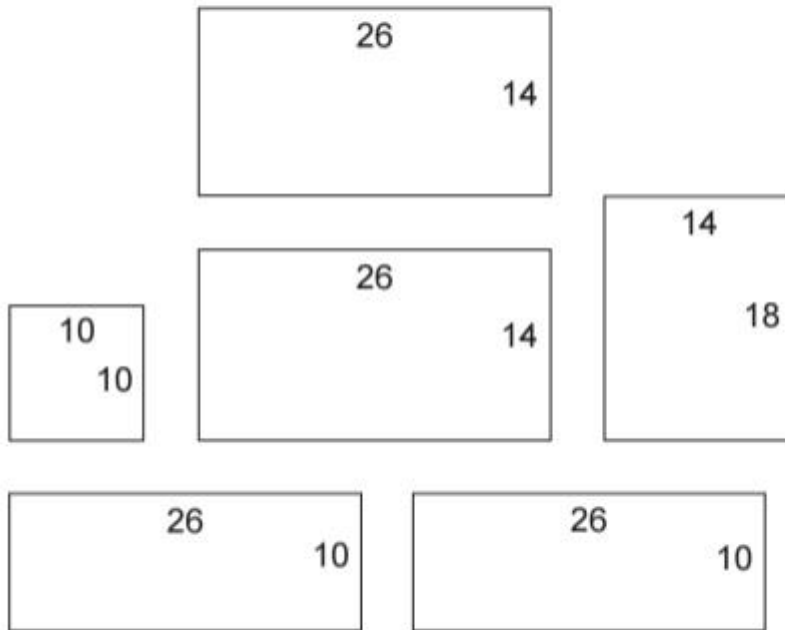


3. K2016/6

6. Peppi rakentaa oheisen kuvan mukaisista laudankappaleista linnunpöntön. Yksikkönä on senttimetri.

a) Paljonko linnunpönttö painaa? Sisääntuloaukkoa ei tarvitse huomioida eikä käytettäviä nauvoja. Laudan tiheys on 550 kg/m^3 ja paksuus $2,0 \text{ cm}$.

b) Mikä on linnunpöntön sisätilavuus?



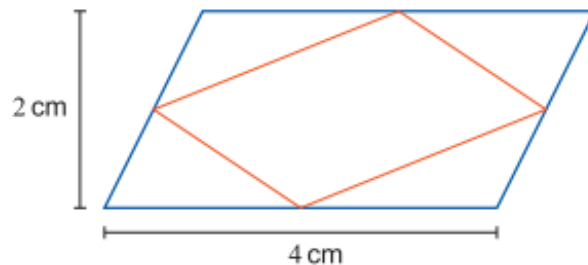
<www.bing.com>. Luettu 18.11.2015.



<www.bing.com>. Luettu 18.11.2015.

4. S2015/2

Suunnikkaan sisälle piirretään pienempi suunnikas, jonka kärjet ovat alkuperäisen suunnikkaan sivujen keskipisteissä. Laske pienen suunnikkaan pinta-ala käyttämällä kuvioon merkittyjä pituuksia.



5. k2015/12

LED-TV:n suorakulmaisen kuvaruudun leveyden ja korkeuden suhde on 16 : 9. Kuvaruudun lävistäjän pituus on 40 tuumaa; yksi tuuma on 2,54 senttimetriä.

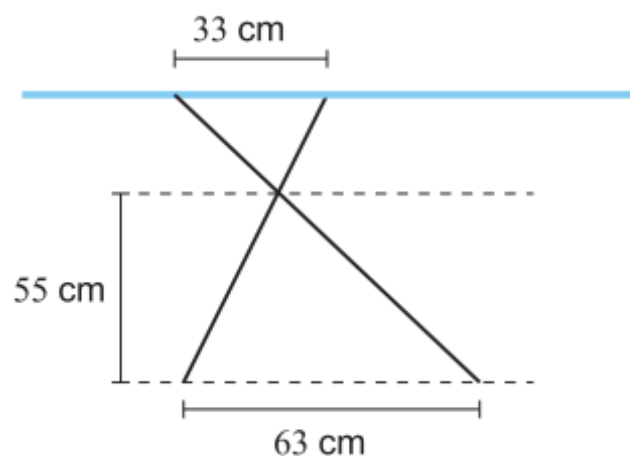
a) Määritä kuvaruudun leveys ja korkeus millimetrin tarkkuudella.

b) Määritä kuvaruudun pinta-ala neliösenttimetrin tarkkuudella.



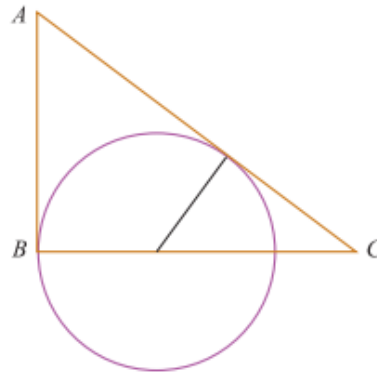
6. S2015/5

Alla olevassa kuviossa on silityslauta sivusta katsottuna. Siihen liittyvät mitat on merkitty kuvioon. Laske silityslaudan korkeus lattiasta.



7. S2015/12

Suorakulmaisen kolmion ABC kateettien pituudet ovat $AB = 3$ ja $BC = 4$. Ympyrän keskipiste sijaitsee pidemmällä kateetilla. Lisäksi ympyrä kulkee pisteen B kautta ja sivuaa kolmion hypotenuusaa. Määritä ympyrän säde.



8. k2015/4

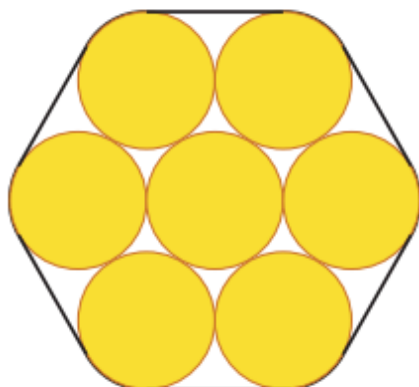
Suorakulmaisessa kolmiossa ABC kateetin AB pituus on 4,4 cm ja hypotenuusan AC pituus 8,1 cm.

- a) Laske kateetin BC pituus.
- b) Laske kolmion terävien kulmien suuruudet 0,1 asteen tarkkuudella.
- c) Laske kolmion pinta-ala 0,1 neliösenttimetrin tarkkuudella.



9. K2014/7

Seitsemän mäntytukkia sidotaan vaijerilla alla olevan poikkileikkauskuvion mukaisesti. Kuinka paljon vaijeria tarvitaan yhteen kierrokseen? Jokaisen tukin halkaisija on 20 cm. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.



10. K2014/4

Kuution särmän pituus puolittuu. Kuinka monta prosenttia pienenee kuution

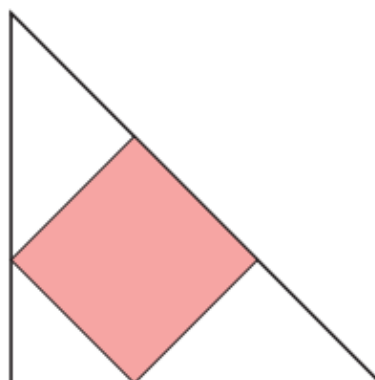
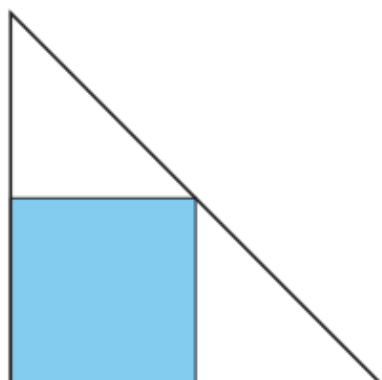
a) tilavuus?

b) sivutahkojen yhteenlaskettu pinta-ala?



11. S2014/10

Suorakulmaisen kolmion kummankin kateetin pituus on 5. Sen sisään on piirretty neliö kahdella eri tavalla kuvioden mukaisesti. Kumman neliön pinta-ala on suurempi?



12. S2014/6

Liito-oravan vaakasuora siirtymä suoraviivaisessa liidossa on parhaimmillaan 3,3-kertainen korkeuden vähenemiseen verrattuna.

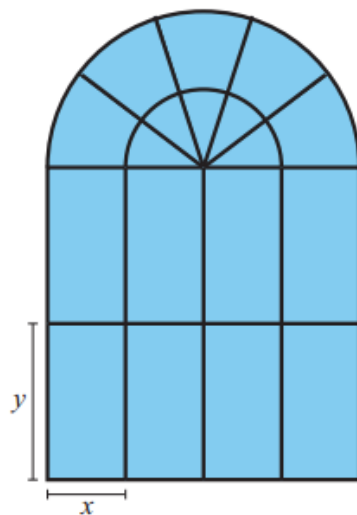
- a) Huippukuntoinen liito-orava aikoo liittää 60 metriä leveään aukion yli. Kuinka korkealta puusta sen täytyy ponnistaa, jotta se laskeutuisi aukion toisella puolella olevaan puuhun yhden metrin korkeudelle? Anna vastaus metrin tarkkuudella.
- b) Kuinka suuressa kulmassa vaakatasoon nähden a-kohdan liito-orava liittää? Anna vastaus asteen tarkkuudella.



<http://webbi.meili.fi/kettu/RunotKaunisMetsakauris/Liito_oravaKuvaJaRuno.html>. Luettu 5.3.2013.

13. S13/4 korjaa video

Kuvan kaari-ikkunassa on lasin tukena rimoja. Kuinka paljon rimaa tarvitaan kuvan mukaiseen kaari-ikkunaan, kun $x = 20$ cm ja $y = 40$ cm? Rimaa käytetään kaikkiin kuvion janoihin ja puolipyöryiden kaariin. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.



14. S13/3

Tasakylkisen kolmion kylki on 90 m ja kanta 40 m.

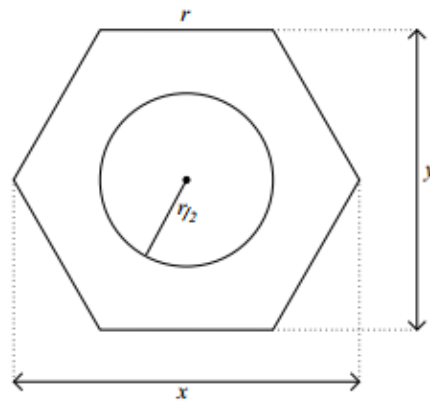
- a) Laske kolmion huippukulma asteen tarkkuudella.
- b) Laske kolmion pinta-ala neliömetrin tarkkuudella.



15. S12/9

Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista säännöllistä kuusikulmiota, jonka sivun pituus on r .

- a) Johda leveyden x lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.
- b) Johda korkeuden y lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.
- c) Laske kuusikulmion ja ympyrän väliin jäävän alueen pinta-ala, kun ympyrän säde on $\frac{r}{2}$.



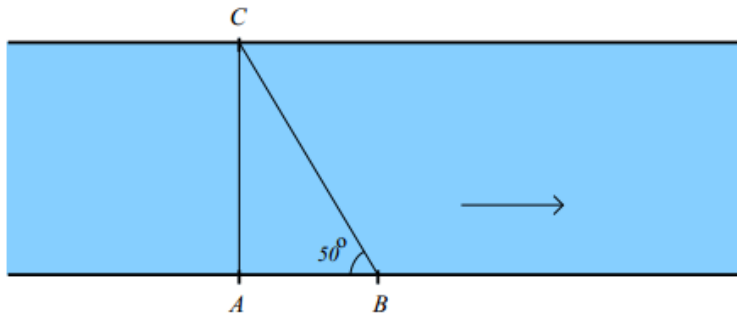
16. S12/2b

- b) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 4,9 m ja kateetin pituus 2,3 m. Laske toisen kateetin pituus 0,1 metrin tarkkuudella.



17. K12/6

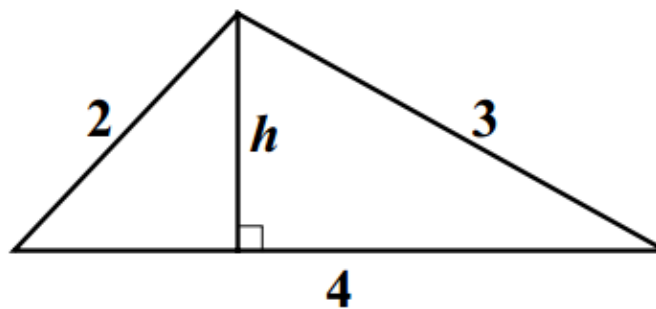
Biologi haluaa arvioida joen leveyttä, jotta hän voi asettaa kalojen liikkumista mittaavia laitteita jokeen. Hän katsoo joen rannalla olevasta pisteestä A kohtisuoraan vastarannalla olevaa pistettä C . Pisteestä A hän kävelee 30 metriä alavirtaan pisteeseen B , josta katsottuna vastarannan piste C näkyy 50 asteen kulmassa alla olevan kuvan mukaisesti. Laske joen leveys AC metrin tarkkuudella.



18. (S11/7)

Kolmion sivujen pituudet ovat 2, 3 ja 4.

- Laske pisintä sivua vastaava korkeus h kahden desimaalin tarkkuudella.
- Laske kolmion kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.



19. (K11/2a)

Suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus on 2 ja hypotenuusan pituus 5. Laske kolmion terävien kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.



20. (K11/4)

Muinaiset egyptiläiset laskivat ympyrän pinta-alan sellaisen neliön alana, jonka sivun pituus on $\frac{8}{9}$ ympyrän halkaisijasta.

- a) Laske tällä säännöllä ympyrän ala, kun sen halkaisija on 5.
- b) Onko edellä saatu ala liian suuri vai liian pieni? Kuinka suuri virhe on prosentteina? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.



21. (K11/6)

A4-kokoisen kartan mittakaava on 1:20 000. Kartta pienennetään kopiokoneella A5-kokoiseksi, jolloin sen pinta-ala pienenee puoleen, mutta muoto säilyy. Mikä on pienennetyn kartan mittakaava?



22. (K10/7)

Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 3,2 cm ja 5,7 cm. Laske hypotenuusan pituus ja suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta.



23. K10/10

Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 2 ja 3. Kolmio pyörähtää täyden kierroksen lyhyemmän kateettinsa ympäri, jolloin syntyy avaruuskappale. Piirrä kappaleen kuva ja laske sen tilavuus.



24. (S10/2a,b)

- a) Ympyrän kehän pituus on 10,25 m. Määritä ympyrän pinta-ala 0,01 neliömetrin tarkkuudella.
- b) Suorakulmaisessa kolmiossa toisen terävän kulman sini on 0,123. Laske kolmion terävät kulmat asteen tarkkuudella.



25. S10/4

Määritä suorakulmaisen kolmion muotoisen tontin sivujen pituudet ja pinta-ala, kun kartasta mitattuna kahden pisimmän sivun pituudet ovat 92 mm ja 73 mm. Kartan mittakaava on 1 : 2 000.



26. S10/10

Suoran ympyräkartion korkeus on sama kuin sen pohjan halkaisija, kumpikin suuruudeltaan $= 1$. Kartion sisään asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa ja pohjaa. Kuinka monta prosenttia pallon tilavuus on ympyräkartion tilavuudesta? Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella.



27. S10/6

Pisteitä $A = (1, 4)$ ja $B = (7, 1)$ katsotaan origosta. Kuinka suuressa kulmassa jana AB tällöin näkyy, ts. mikä on janan päätepisteisiin suuntautuvien tähtäysviivojen välinen kulma? Anna vastaus yhden asteen tarkkuudella.



28. S09/5

Sadetin kastelee urheilukenttää 14 metrin päähän sektorissa, jonka keskuskulma on 105 astetta. Nurmikenttä vaatii 4 mm vettä. Kuinka kauan sadetinta on pidettävä toiminnassa, kun se käyttää 32 litraa vettä minuutissa? Oletetaan, että sadettimen vesi jakaantuu sektorille tasaisesti.



29. (s09/6)

Kaksi autoilijaa ajaa peräkkäin vaakasuoraa tietä. Toinen näkee 5,0 m silmäkorkeutta ylempänä olevat ryhmittymismerkit noin 15 asteen kulmassa ja toinen noin 35 asteen kulmassa vaakatasoon nähden. Kuinka kaukana autoilijat ovat toisistaan?



30. S09/8

Suoran ympyrälieriön muotoisessa 10,0 cm:n korkuisessa lasissa on mehua 6,5 cm:n korkeuteen. Lasiin upotetaan viisi pallon muotoista lasikuulaa, joiden halkaisija on 20 mm. Mehun pinta nousee tällöin 7 mm. Laske lasin pohjan halkaisija.



31. (K09/9)

Kolmion kärjet ovat pisteissä $(-6, 1)$, $(0, 0)$ ja $(4, 9)$.

- Laske kolmion kulmat asteen kymmenesosan tarkkuudella.
- Laske kolmion pinta-ala yhden desimaalin tarkkuudella.



32. K09/6

Kuparipallon ympärysmitta on 64,2 cm ja massa 37,9 kg. Tutki, onko pallon sisällä tyhjää tilaa. Kuparin tiheys on $8,96 \text{ g/cm}^3$.



33. S08/7

Neliöpohjaisen suoran pyramidin korkeus on 8 ja pohjasärmän pituus 12. Määritä pyramidin sivutahkon ala. Kuinka suuren kulman pyramidin sivusärmä muodostaa pohjatahkon kanssa? Ilmoita kulma 0,01 asteen tarkkuudella.



34. S08/9

Helsingin Pasilassa sijaitsee linkkitorni, jonka korkeus meren pinnasta mitattuna on 146 metriä. Kuinka korkealta paikalta Tallinnasta tornin huippu on mahdollista nähdä, kun Helsingin ja Tallinnan välinen etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna on 85 km? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.



35. K08/3

a) Laskettelurinteen kaltevuuskulma on 7,0 astetta ja rinteiden korkeusero 180 metriä. Kuinka pitkä rinne on? Kuinka kauan kestää hiihtohissillä matka rinnettä pitkin alhaalta ylös, kun hiihtohissin nopeus on 6 km/h?

b) Suora kulkee pisteiden (1, 0) ja (3, 3) kautta. Kuinka suuren kulman se muodostaa x -akselin positiivisen suunnan kanssa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.



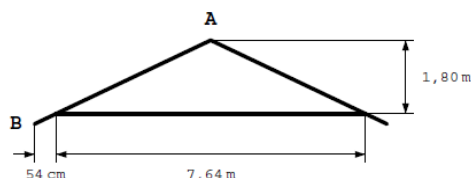
36. K08/4

Kumiputken ulkohalkaisija on 53 mm ja seinämän paksuus 4 mm. Kuinka pitkä putken on oltava, jotta putkeen mahtuisi 3,0 litraa vettä?



37. (s07/6)

Talon harja on 1,80 metriä korkeammalla kuin sivuseinien yläreunat. Räystään kohtisuora etäisyys seinästä on 54 cm. Päätyseinän pituus on 7,64 m. Talon harja on keskellä kattoa. Määritä lappeen pituus AB senttimetrin tarkkuudella.



38. K07/7

Lentokone lähestyy Oulunsalon kenttää kolmen asteen kulmassa maahan nähden. Kiitoradan pituus on 2,5 km, ja kone koskettaa kiitorataa 300 metrin päässä sen alkupäästä. Kuinka kaukana kiitoradan alkupäästä (vaakasuoraan ajateltuna) kone oli 500 jalan korkeudessa (1 jalka = 0,3048 m)? Kuinka kauan tästä kului maakosketukseen, jos lentokoneen lähestymisnopeus ilman suhteen oli 270 km/h? Oletetaan, että sää oli tyyni.



39. S06/5

Omakotitalon räystäskouruja puhdistettaessa käytettiin tikkaita, joiden pituutta voidaan säätää. Kun tikkaat oli asetettu viiden metrin pituisiksi ja sijoitettu pystysuoraa seinää vasten siten, että tikkaiden alapää osui maahan 150 cm:n etäisyydelle seinästä, jäi tikkaiden yläpää tasan metrin liian alas. Kuinka paljon tikkaita tuli pidentää, kun niiden alapään paikkaa ei haluttu muuttaa? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.



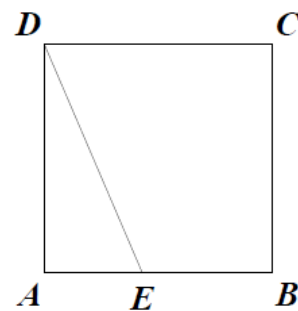
40. S06/8

Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 12,4 cm ja toinen terävä kulma $64,5^\circ$. Kolmio pyörähtää pitemmän kateettinsa ympäri. Laske syntyneen kartion tilavuus ja vaipan ala.



41. (K06/3)

Neliön $ABCD$ sivulla AB on sellainen piste E , että $AE = 1$ ja $ED = 3$. Laske neliön a) sivun pituus, b) pinta-ala, c) lävistäjän pituus. Anna vastaukset tarkkoina arvoina.



42. (K06/10)

Suunnikkaan $ABCD$ kärkipisteet ovat $A = (1, -2)$, $B = (6, -1)$, $C = (7, 2)$ ja $D = (2, 1)$. Laske suunnikkaan pinta-ala sekä kulmien suuruudet asteen kymmenesosan tarkkuudella.



43. (K05/6)

Kesämökin kalliolle porataan kaivoa. Pyöreän porausreiän halkaisija on 140 mm ja syvyys 57,2 m. Reiästä porattu kiviaines levitetään tasapaksuna kerroksena suora-
viivaisesti kulkeville mökkipoluille, joiden leveys on 45 cm ja yhteispituus 72,5 m. Kuinka paksu kerros syntyy? Oletetaan, että kiviaineksen tilavuus on sama kuin porausreiän tilavuus.



44. (s05/2)

Oletetaan, että pölyhiukkasen halkaisija on viisi tuhannesosamillimetriä. Kuinka monta hiukkasta mahtuu yhteen kuutiometriin, jos jokainen pölyhiukkanen vie kuutionmuotoisen tilan, jonka särmänpituus on hiukkasen halkaisija?



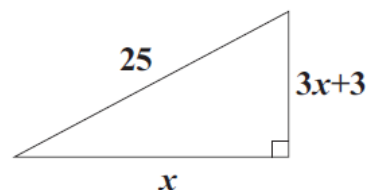
45. (s05/7)

Kuinka suuri on sen ympyrän säde, jonka kehällä olevaa 5,1 metrin pituista vastaa 9 asteen keskuskulma?



46. (K05/2)

Muodosta yhtälö oheisen suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien välille ja ratkaise tämän avulla kolmion kateettien pituudet.



47. (s04/5)

Kaksi 14 mm paksua lautaa liitetään päällekkäin yhteen 30 mm pitkällä naulalla. Naulan tulee jäädä koko pituudeltaan lautojen sisään, joten naula lyödään hieman vinoon. Mikä on naulan a) pienin, b) suurin mahdollinen kaltevuuskulma, kun naulan tulee yltää alempaan lautaan vähintään 8 mm:n syvyyteen mutta ei kuitenkaan laudan läpi? Vastaukset asteen tarkkuudella.

48. (s04/9)

Tyynessä järvessä uiva kesälomailija on tarkkaillut veden pintaa ja väittää näkevänsä maapallon kaareutumisen järven pinnan kohoumana. Oletetaan, että kaareutuminen on mahdollista havaita veden pinnasta, jos pinta on uimarista vastakkaiselle rannalle ulottuvan suoran linjan keskikohdalla vähintään 20 cm linjaa ylempänä. Kuinka kaukana uimarista vastarannan on silloin vähintään oltava? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.

49. (K04/4)

Metsäpalstan pinta-alaksi peruskartalla mitattiin $2,9 \text{ cm}^2$, missä mittausvirhe on enintään $0,1 \text{ cm}^2$. Laske palstan koko hehtaareina ja sen maksimivirhe, kun peruskartan mittakaava on 1 : 20 000.

50. (s03/4)

Maapallon väkiluku on 6,3 miljardia, ja maapallon säde on 6 370 km. Mikä on väestön tiheys (henkeä/km^2), jos väestö ajatellaan jaetuksi tasaisesti koko maapallolle? Mikä on väestön tiheys, jos otetaan huomioon vain maapinta-ala? Vesistöjen osuus maapallon pinnasta on 71 %.

51.

Strategiapelissä rakennetaan uudelle planeetalle makean veden säiliötä. Säiliö on ympyräpohjainen lieriö, jonka korkeus on 320 m ja pohjan halkaisija 2 000 m. Säiliöstä haihtuu vettä keskimäärin 100 litraa minuutissa. Kuinka monta planeetan vuotta säiliössä riittäisi vettä, ennen kuin täysi säiliö pelkästään haihtumisen vuoksi olisi tyhjentynyt? Planeetan vuosi on $3 \cdot 10^7$ sekuntia.

52.

Urheilukentän juoksuradan sisäpuolinen kenttä koostuu suorakulmiosta ja sen päissä olevista puoliympyröistä, joiden säde on 36,00 m. Kuinka pitkät ovat juoksuradan suorat osat, kun juoksuradan koko pituus on tasan 400 metriä radan sisäreunaa pitkin mitattuna? Juoksuradalla on yhteensä kahdeksan 122 cm:n levyistä rinnakkaisrataa. Kuinka monta metriä uloin, kahdeksas rata on sisärataa pidempi ratojen sisäreunoja pitkin mitattuna? Anna vastaus 0,01 metrin tarkkuudella. Kuinka monta prosenttia tämä ero on?

53.

Jalallisen viinilasin sisätila on kärjellään seisova suora ympyräkartio, jonka tilavuus on 1,75 dl. Kuinka paljon lasissa on nestettä nestepinnan lasissa ulottuessa puoleenväliin lasin sisätilan korkeudesta?

54.

Katsoja näkee pilvien välisen salaman välähdyksen 25 asteen kulmassa horisontin yläpuolella ja kuulee jyrähdyksen 35 sekunnin kuluttua salamaniskusta. Kuinka korkealla salamanisku tapahtui? Kuinka etäällä katsojasta oli paikka, jonka yläpuolella salama iski? Äänen nopeus on 340 m/s. Maan pinta oletetaan tasoksi.

55.

Ympyrän pinta-ala on 12 cm^2 . Mikä on ympyrän ympäri piirretyn neliön ala? Entä ympyrän sisään piirretyn neliön ala? Anna vastaus neliösenttimetreinä kahden desimaalin tarkkuudella.

56.

Matkapuhelinmasto sijaitsee mäellä, joka kohoaa 32 metriä läheisen järven pintaa korkeammalle. Maston korkeus on 120 metriä. Missä kulmassa (vaakasuoraan tasoon nähden) järven vastakkaisella rannalla mastosta 4,5 kilometrin päässä oleva katsoja näkee maston huipussa olevan punaisen valon? Vastaus 0,1 asteen tarkkuudella.

57.

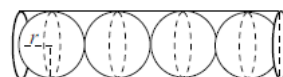
Tuoreen koivutukin pituus on neljä metriä ja sen keskimääräinen halkaisija puoli metriä. Mikä on tukin massa, kun tuoreen koivun tiheys on noin $0,9 \text{ kg/dm}^3$?

58.

Ajatellaan, että Helsingistä Brysseliin kaivetaan liikennetunneli, joka yhdistää kaupungit suoraviivaisesti maapallon jännettä pitkin. Miten syvällä on tunnelin syvin kohta? Kuinka monen asteen kaltevuudessa tunneliin ajetaan sen kummassakin päätepisteessä? Maapallon säde on 6 370 km. Helsingin ja Brysselin välinen lyhin etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna on 1 650 km.

59.

Täysinäisessä tiiviisti pakatussa ympyrälieriön muotoisessa säilytyskotelossa on neljä tennispalloa. Kuinka suuri osa pallojen tilavuus on kotelon tilavuudesta?



60.

Suorakulmaisen kolmion ABC kateetin AC pituus on 8,6 cm ja kateetin BC pituus 5,8 cm. Kateetilla AC on piste D siten, että $DA = DB$. Määritä janojen AB ja CD pituudet.

61.

Pystyssä olevan suoran ympyrälieriön muotoisen tynnyrin pohjan halkaisija on 0,70 m ja korkeus 1,20 m. Tynnyriin kaadetaan 120 litraa öljyä. Määritä tyhjän tilan korkeus tynnyrissä.

62.

Kolmion kärjet ovat pisteissä $A = (-2, 2\sqrt{2})$, $B = (-2, -\sqrt{2})$ ja $C = (3, \sqrt{2})$. Laske kolmion kulmien suuruudet 0,1 asteen tarkkuudella.

63.

Suorakulmaisen särmiön muotoinen hautakivi on 80 cm korkea, 2,10 m pitkä ja 32 cm leveä. Voiko kivi nostaa nosturilla, joka pystyy nostamaan enintään kahden tonnin painoisen kuorman? Hautakiven tiheys on $2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

64.

Harjakattoisen talon pituus on 12,0 m ja leveys 8,0 m. Talon pääty muodostuu $3,0 \text{ m} \times 8,0 \text{ m}$ suuruisesta suorakulmiosta ja tasakylkisestä kolmiosta, jonka kanta on 8,0 m. Katto jatkuu seinän yli 0,5 m talon joka sivulla muodostaen räystäät. Suunnitteluvaiheessa päätyseinän kolmio oli ajateltu 2,0 m korkeaksi, mutta rakennusvaiheessa siitä kuitenkin tehtiin 2,5-metrinen. Kuinka monta prosenttia talon katon pinta-ala muutoksen johdosta kasvoi?

4. Yo-tehtävät suorista

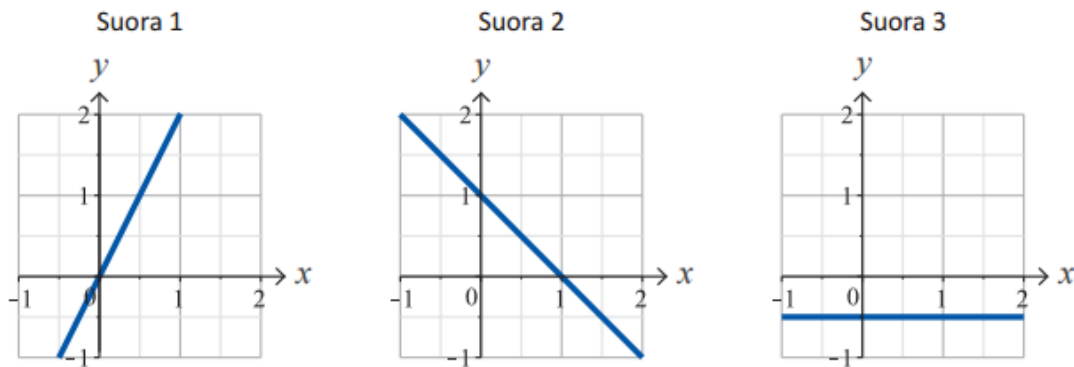
1. K16/9

Suora L_1 kulkee pisteiden $(3, 0)$ ja $(0, 5)$, suora L_2 pisteiden $(6, 0)$ ja $(0, 3)$, ja suora L_3 pisteiden $(2, 0)$ ja $(2, 2)$ kautta. Nämä kolme suoraa ja koordinaattiakselit rajoittavat monikulmion, jonka yksi kärki on $(0, 0)$. Etsi funktion $f(x, y) = 2x - 4y + 10$ suurin ja pienin arvo tässä monikulmiossa.



2. K15/1

- Alla on kolmen suoran kuvaajat. Esitä niiden yhtälöt muodossa $y = kx + b$. Perusteluita ei tarvita.



3. K15/5

Yksinkertaistetun mallin mukaan ilman lämpötila laskee lineaarisesti korkeuden h suhteen noin 11 kilometriin saakka. Merenpinnan tasolla $h = 0$ keskilämpötila on $+15$ celsiusastetta ja 11 kilometrin korkeudella -56 celsiusastetta.

- a) Kuinka monta astetta ilma jäähtyy, kun nousee 5,0 kilometrin korkeudelta 1,0 kilometriä ylöspäin?
- b) Määritä ilman lämpötilan lauseke $T = T(h)$ korkeuden h avulla lausuttuna ja piirrä sen kuvaaja (h, T) -koordinaatistoon, kun $0 \leq h \leq 11$ km.



4. S14/1c

- c) Missä pisteessä suorat $x + 5y = 1$ ja $x - 5y = 5$ leikkaavat toisensa?



5. S14/13

- a) Epäyhtälöt $x+3y \leq 18$, $3x+2y \leq 19$, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ määrittelevät nelikulmion N . Piirrä sen kuva xy -koordinaatistossa ja laske kärkien koordinaatit.
- b) Määritä lausekkeen $2x+y$ suurin ja pienin arvo nelikulmiossa N .



6. K14/2

- a) Missä pisteessä suora $x-5y=4$ leikkaa y -akselin?
- b) Ratkaise yhtälö $4x^3=48$. Anna tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo.
- c) Ratkaise yhtälö $2 \cdot 3^x = 162$.



7. S13/2a

- a) Missä pisteissä suora $y=-3x+12$ leikkaa koordinaattiakselit?



8. S12/2c

- c) Määritä pisteiden $(0,8)$ ja $(12,0)$ kautta kulkevan suoran yhtälö.



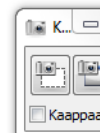
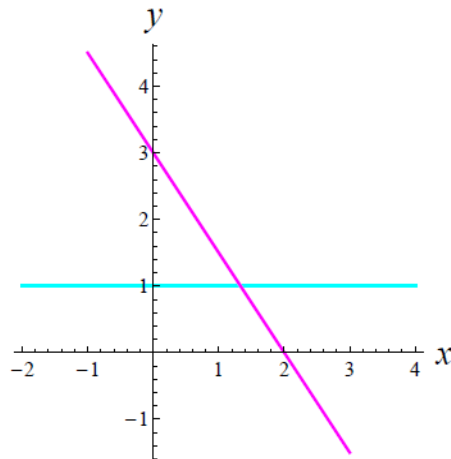
9. K12/4

- a) Funktion $f(x) = \frac{3}{2}x + b$ nollakohta on 2. Määritä vakion b arvo.
- b) Missä pisteessä a-kohdan funktion kuvaaja leikkaa y -akselin?
- c) Kuinka suuren terävän kulman a-kohdan funktion kuvaaja muodostaa x -akselin kanssa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.



10. S10/3

Oheisessa kuviossa on kaksi suoraa. Määritä näiden yhtälöt, ja laske niiden leikkauspisteen koordinaatit. Mikä on suorien ja y -akselin rajaaman kolmion pinta-ala?



11. K10/1c

c) Määritä suorien $x + y = 2$ ja $2x - y = 5$ leikkauspiste.



12. K10/9

Määritä sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteiden $A = (-1, 1)$ ja $B = (8, 4)$ yhdysjanan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa tätä janaa vastaan. Missä pisteissä suora leikkaa koordinaattiakselit? Piirrä kuvio.



13. S09/12

Suorat $x + y = 8$, $x + 3y = 18$ ja $y - 3 = 0$ rajoittavat kolmion. Piirrä kuvio ja laske kolmion pinta-ala. Muodosta epäyhtälöryhmä, jonka ratkaisuna on piirtämäsi kolmio sivut mukaan lukien.



14. K09/3a (videossa piirroksessa virhe)

a) Suoran kulmakerroin on $-\frac{1}{3}$, ja suora kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta. Esitä suoran yhtälö muodossa $y = kx + b$.



15. S08/2a

a) Suora kulkee pisteiden $(-2, 0)$ ja $(1, 7)$ kautta. Muodosta sen yhtälö muodossa $y = ax + b$.

b) Pallon tilavuus on 1000 m^3 . Laske pallon säde kolmen numeron tarkkuudella.

c) Ratkaise yhtälö $2^x = 1024$.



16. K08/3b

b) Suora kulkee pisteiden $(1, 0)$ ja $(3, 3)$ kautta. Kuinka suuren kulman se muodostaa x -akselin positiivisen suunnan kanssa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.



17. S07/4

Määritä suorien $y = 2x - 3$ ja $y = 3x - 2$ leikkauspiste P . Suora s kulkee pisteiden P ja $Q = (7, 7)$ kautta. Määritä suoran s yhtälö. Piirrä kuvio.



18. S07/10

Ratkaise graafisesti epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} y \geq x - 2, \\ 7x + 2y \geq 14, \\ 5x + 4y \leq 28. \end{cases}$$



Anna vastauksena kuvio, johon on merkitty ratkaisujoukko.

19. K07/5

a) Määritä pisteiden $(1, 2)$ ja $(4, 3)$ kautta kulkevan suoran yhtälö muodossa $y = kx + b$. b) Onko piste $(120, 40)$ tällä suoralla?

**20. S06/2**

Olkoon annettuna kaksi pistettä: $A = (2, 6)$ ja $B = (1, -1)$. Määritä a) pisteiden A ja B määrittämän suoran yhtälö, b) janan AB pituus, c) janan AB keskipisteen koordinaatit.

**21. S05/12**

Määritä paraabelin $y = x^2 - x$ ja suoran $y = x + 2$ leikkauspisteet ja näiden välinen etäisyys.

**22. K05/9**

Tasaisella vaakasuoralla puutarhapalstalla peruskallio on lähellä maanpintaa. Puutarhuri etsi kokeilemalla rautakangen avulla kohtaa, jossa peruskallio on lähinnä maanpintaa. Hän mittasi peruskallion syvyyden kolmessa pisteessä, jotka eräässä xy -koordinaatistossa (yksikkönä cm) olivat $A = (132, 247)$, $B = (357, 519)$ ja $C = (471, 125)$. Peruskallio oli syvimmillään pisteessä A . Siten kallio näytti nousevan maanpintaa kohti, kun pisteestä A siirryttiin kohti pisteitä B ja C . Puutarhuri päätti siirtyä pisteestä A ensin janan BC keskipisteeseen ja siitä vielä samaan suuntaan yhtä pitkän matkan pisteeseen D , jossa hän mittasi kallion syvyyden. a) Piirrä kuvio. b) Laske janan BC keskipisteen koordinaatit. c) Laske pisteen D koordinaatit.

**23. K05/12**

Lämpömittaria tutkittiin tarkkuusmittarin avulla. Kun lämpömittari näytti $-9,9$ °C, oikea lämpötila oli $-9,2$ °C. Kun lämpömittari näytti $18,5$ °C, oikea lämpötila oli $18,1$ °C. Oletetaan, että oikean lämpötilan ja lämpömittarin lukeman välinen riippuvuus on lineaarinen. a) Johda lauseke, jolla oikea lämpötila y voidaan laskea, kun lämpömittarin lukema x tunnetaan. Ilmoita esiintyvät kertoimet neljän desimaalin tarkkuudella. b) Missä lämpötilassa lämpömittari näyttää aivan oikein?



5. Eksponentiaalisen muutoksen yo-tehtäviä

Vastausvideot aukevat QR-koodien avulla puhelimellasi. Vieressä teoriavideo ->.



1. K15/8 (a)212 000, b)25%, c)31h)

Ravintoliuoksessa kasvatettavan bakteeripopulaation yksilömäärä $N(t)$ kasvaa eksponentiaalisen mallin $N(t) = 1000 \cdot 1,25^t$ mukaisesti, kun aika t ilmoitetaan tunteina.

- a) Mikä on populaation koko 24 tunnin kuluttua? Anna vastaus tuhannen bakteerin tarkkuudella.
- b) Kuinka monta prosenttia populaatio kasvaa jokaisen tunnin aikana?
- c) Kuinka monta tuntia kestää, että populaation koko ylittää miljoonan?



2. S14/12 (58%)

Yhdistyneet kansakunnat asetti vuosituhannen vaihteessa yhdeksi tavoitteekseen, että maailman hiilidioksidipäästöt olisivat vuonna 2015 merkittävästi pienemmät kuin vuonna 1990. Tavoite ei näytä toteutuvan, sillä vuosina 1990–2008 päästöjen määrä kasvoi 39 %. Oletetaan, että päästöjen vuotuinen kasvuprosentti on ollut aikavälillä 1990–2008 vakio. Kuinka monta prosenttia päästöt kasvavat yhteensä vuosina 1990–2015, jos niiden vuotuinen kasvuprosentti pysyy edelleen samana? Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella.



3. s13/10 (12,2%)

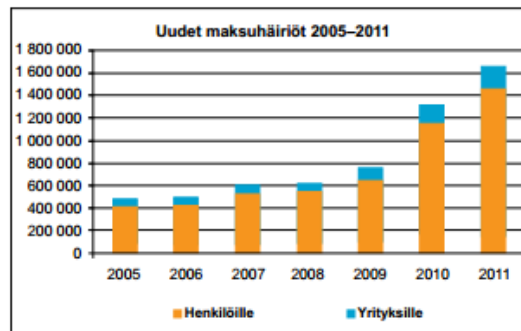
Maalämpöpumppuja myyvän yrityksen liikevaihto kymmenkertaistui kahdessakymmenessä vuodessa. Kuinka monta prosenttia liikevaihto kasvoi vuodessa, kun vuotuinen kasvuprosentti pysyi koko ajan samana? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.



4. k13/8 (246%, -26,7%)

- . Vuonna 2005 yksityishenkilöiden maksuhäiriöiden lukumäärä Suomessa oli 422 500, ja vuonna 2011 se oli 1 460 500.

- a) Kuinka monta prosenttia maksuhäiriöiden lukumäärä kasvoi tällä aikavälillä? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.
- b) Vuonna 2011 ministeriö asetti tavoitteeksi vähentää maksuhäiriöiden määrän neljässä vuodessa takaisin vuoden 2005 tasolle. Kuinka monta prosenttia määrä vähenee vuodessa, kun vuotuinen vähenemisprosentti on sama? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.



<<http://www.asiakastieto.fi/asiakastieto/tilastot/maksuhairiot/>>. Luettu 5.3.2012.

5. s12/12 (vuonna 2048)

Maailman väkiluvun kasvua kuvataan usein eksponentiaalisen mallin avulla. Vuonna 2004 väkiluku oli 6,4 miljardia ja vuonna 2010 noin 6,8 miljardia. Minä vuonna väkiluku ylittää mallin mukaan 10 miljardin rajan?



6. k12/8 (57,60e)

Naisten hiusten leikkaus maksaa nyt 45 euroa. Kuinka paljon se maksaa kymmenen vuoden kuluttua, jos hintaa korotetaan vuoden välein 2,5 %?



7. k11/14 (1860e, 1,95me)

- a) Säätiöllä on 1,8 miljoonan euron pääoma, jonka vuosittainen tuotto on 5,4 prosenttia. Eräänä vuonna säätiö on päättänyt siirtää tuotosta 30 prosenttia pääomaan ja jakaa lopusta tuotosta kaksi 21 000 euron suuruisia apurahaa opiskeluun ulkomailla sekä 14 yhtä suurta matka-apurahaa. Kuinka suuria matka-apurahat ovat?
- b) Kuinka suureksi säätiön 1,8 miljoonan euron pääoma kasvaa viidessä vuodessa, jos tuotto on jokaisena vuotena 5,4 prosenttia pääomasta ja vuosittain pääomaan siirretään 30 prosenttia tuotosta?



8. k11/11(8vrk, 59,5kBq)

Radioaktiivisen näytteen aktiivisuudeksi mitattiin 25,0 kBq ja viisi vuorokautta myöhemmin 16,2 kBq. Laske puoliintumisaika ja näytteen aktiivisuus kymmenen vuorokautta ennen ensimmäistä mittausta. Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti, ja puoliintumisaika on aika, jonka kuluessa aktiivisuus vähenee puoleen.



9. s10/12 (2016, 2046, Vaasassa samat)

Tšernobylin ydinvoimalaonnettomuuden jälkeen vuonna 1987 cesium-137-laskeuman radioaktiivisuus eräillä alueilla Hämeessä ja Keski-Suomessa oli 78 kBq/m². Vuonna 2006 tämä oli laskenut arvoon 50 kBq/m². Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti. Minä vuonna alkuperäinen aktiivisuus on vähentynyt puoleen? Entä neljännekseen? Minä vuonna Vaasan seudun pienempi aktiivisuus on vähentynyt puoleen?



10. k10/14 (4,2%)

Sanomalehden tilaushinta vuodeksi 2003 oli 194,26 € ja vuodeksi 2009 vastaavasti 249 €. Kuinka monen prosentin vuosittaista hinnankorotusta tämä vastaa, kun oletetaan, että prosentti on jokaisena vuonna ollut sama?



11. s10/5

Tuhat euroa talletetaan viiden prosentin korolla 50 vuodeksi. Korko liitetään pääomaan vuosittain. Laadi pylväsdiagrammi, joka kuvaa talletuksen arvoa viiden vuoden välein. Lähdeveroa ei oteta huomioon.



12. s09/7

Vuonna 1990 Helsingissä oli 492 400 asukasta. Vuonna 2000 asukkaita oli 555 474. Kuinka monta prosenttia väkiluku oli noussut keskimäärin vuodessa? Mikä on Helsingin väkiluku vuonna 2015, jos oletetaan, että väestönkasvu jatkuu vuodesta toiseen prosentuaalisesti samansuuruisena?



13. k9/14

Talletustilin vuosikorko on 1,50 prosenttia, ja korkotuotosta peritään vuosittain 29 prosentin lähdevero. Tiliä avattaessa talletetaan 1 000 €, eikä muita talletuksia tehdä.

- a) Kuinka paljon tilillä on rahaa kymmenen vuoden kuluttua, kun korko liitetään pääomaan vuoden välein?
b) Monenko vuoden kuluttua talletus on kaksinkertaistunut?



14. s6/12

Radioaktiivisen aineen määrän havaittiin vuodessa vähentyneen 0,043 %. Määritä aineen puoliintumisaika.



15. K08/14

Vuoden 2002 alussa Liisa talletti 1 000 euroa tilille, jonka vuotuinen korko oli 1,5 prosenttia. Kuinka suuri talletus korkoineen oli viisi vuotta myöhemmin? Korkotulon lähdevero oli 1.1.2005 lähtien 28 prosenttia ja sitä ennen 29 prosenttia. Mikä oli talletuksen reaaliarvon muutos prosentteina? Vuoden 2002 alussa elinkustannusindeksi oli 1548 ja viisi vuotta myöhemmin 1632.



16. K06/8

Tehtaan on vähennettävä vesistöön joutuvia päästöjä yhteensä 20 prosenttia seuraavien neljän vuoden aikana. a) Kuinka monta prosenttia on asetettava vuotuisiksi tavoitteeksi, kun halutaan, että suhteellinen vähennys on sama kaikkina vuosina?
b) Jos samaa vuotuista tavoitetta noudatetaan edelleen, kuinka monen vuoden kuluttua päästöt on saatu vähenemään alle puoleen alkuperäisestä määrästä?



17. K05/13

Maanjäristyksessä vapautuvan seismisen energian E ja Richterin asteikon lukeman M välillä on yhteys $\log_{10} E = 11,8 + 1,5M$. Rakennus on mitoitettu kestävään järistys, jossa vapautuva seisminen energia on 50 % suurempi kuin seisminen energia järistyksessä, jonka voimakkuus Richterin asteikolla on 6,8. Kuinka voimakkaan järistyksen rakennus kestää Richterin asteikolla mitattuna?



18.

Tarina kertoo, että tunnettu matemaatikko Jacques Bernoulli talletti vuoden 1699 alussa Baselin pankkiin 58 Sveitsin frangia ja unohti sitten asian. Pankki maksoi talletukselle peräti 0,8 prosentin vuotuista korkoa, joka liitettiin pääomaan aina vuoden lopussa. Minkä vuoden alkuun mennessä talletus kaksinkertaistui? Entä nelinkertaistui? Kuinka suuri olisi talletus ollut tämän vuoden alussa?

19.

Floridan rannikolta on löydetty fossiilisia hain hampaita, jotka ovat kuuluneet kymmeniätuhansia vuosia sitten sukupuuttoon kuolleelle valkohain esi-isälle. Kuinka vanha on hain hammas, kun sen sisältämän radioaktiivisen hiili-isotoopin C-14-pitoisuus on pienentynyt 9 prosenttiin elävässä organismissa olevasta C-14-pitoisuudesta? Isotoopin C-14 puoliintumisaika on noin 5 730 vuotta.

20.

Lääkeaineen pitoisuus puoliintuu elimistössä yksilöllisesti vaihdellen 15–18 tunnissa. Lääkityksen päätyttyä aineen voidaan katsoa poistuvan elimistöstä ajassa, joka on viisi kertaa puoliintumisaika. Kuinka monta prosenttia lääkeainetta on tuolloin kuitenkin vielä jäljellä? Kuinka monta tuntia lääkityksen jälkeen on odotettava, jotta 99 % lääkeaineesta on poistunut elimistöstä?

21.

Tšernobylin ydinvoimalaonnettomuuden jälkeen vuonna 1987 cesium-137-laskeuman radioaktiivisuus eräillä alueilla Hämeessä ja Keski-Suomessa oli 78 kBq/m^2 . Vuonna 2006 tämä oli laskenut arvoon 50 kBq/m^2 . Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti. Minä vuonna alkuperäinen aktiivisuus on vähentynyt puoleen? Entä neljännekseen? Minä vuonna Vaasan seudun pienempi aktiivisuus on vähentynyt puoleen?

21.

Vuonna 2002 oli maksukorttimaksujen arvo Suomessa noussut noin 2,5-kertaiseksi siitä, mitä se oli vuonna 1993. Kuinka monta prosenttia korttimaksujen arvo on noussut vuosittain, jos oletetaan kasvun eri vuosina olleen prosentuaalisesti yhtä suurta? Kuinka suuri oli korttimaksujen arvo vuosina 2002 ja 1993 euroina ilmaistuna, kun se vuonna 1995 oli 10,1 miljardia euroa?

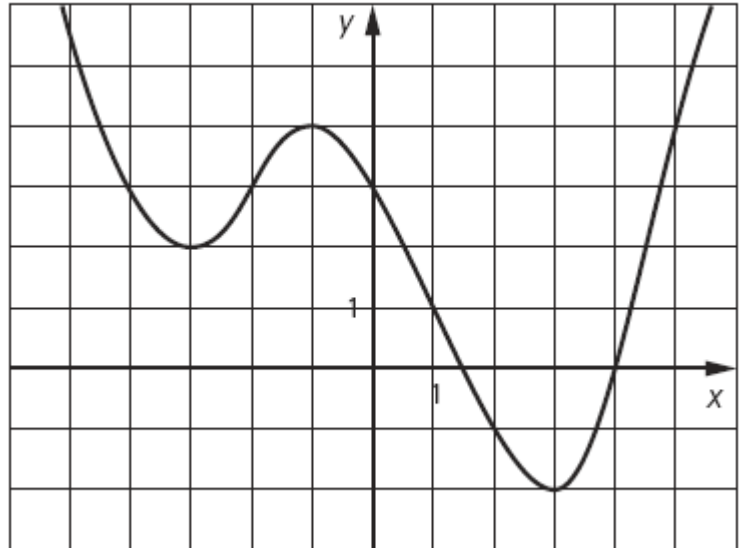
6. Yo derivaatta

Mallivastausvideot löytyvät QR-koodin takaa kännykälläsi.

Derivaatan teoria lyhyesti

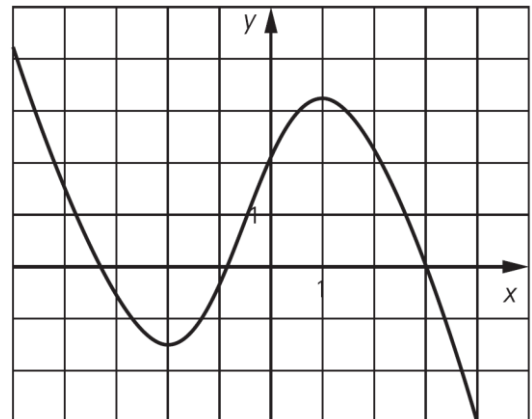
- Derivaatta = kasvunopeus = käyrän jyrkkyys = tangentin kulmakerroin
- Derivaatta voidaan määrittää
 - 1) Kuvaajasta
 - a. piirrä kysyttyyn kohtaan tangentti
 - b. määritä tangentin kulmakerroin
 - 2) Laskemalla=derivoiminen
 - a. ”potenssi tippuu eteen kertoimeksi ja potenssista vähennetään yksi”
 - b. $4x^n$ derivaatta on $4n$ ja pelkän luvun nolla
 - c. sijoittamalla derivaatan lausekkeeseen x :lle arvon, saat käyrän jyrkkyyden sillä kohtaa
- Kun derivaatta on nolla eli $f'(x) = 0$ on kuvaaja vaakasuora eli ollaan kuvaajan huipussa tai montussa.
- Kun derivaatta on positiivinen, niin kuvaajassa on ylämäki eli funktio on *kasvava*.
- Kun derivaatta on negatiivinen, niin kuvaajassa on alamäki eli funktio on *vähenevä*.
- Funktion suurin tai pienin arvo (eli korkeus eli y) saavutetaan, joko tarkasteluvälin päätepisteissä tai huipuissa, joissa $f'(x) = 0$
- Sovellustehtävissä etsitään usein suurinta (tai pienintä) arvoa.
 - 1) tee funktio
 - 2) katso millä välillä x voi vaihdella
 - 3) etsi suurin arvo tällä välillä

- T1.** a) Määritä oheisen funktion f derivaatta kohdassa $x = -2$
- b) Määritä $f'(2)$.
- c) Määritä funktion nollakohdat.
- d) Missä kohdissa $f'(x) = 0$?



T2. Määritä

- a) derivaatan nollakohdat
- b) funktion nollakohdat
- c) funktion arvo kohdassa $x=4$
- d) $f'(0)$
- e) $f'(2)$



T3.

- a) Derivoi $f(x) = -x^3 + 2x - 5$ (1p)
- b) Derivoi $f(x) = (x - 2)^2$ (2p)

T4. Missä pisteessä on paraabelin $y = -x^2 - 4x + 1$ huippu?

T5. Määritä funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 2]$.

Yo-tehtävät

1. S12/4

Tarkastellaan paraabelia $y = x^2 - 12x + 35$.

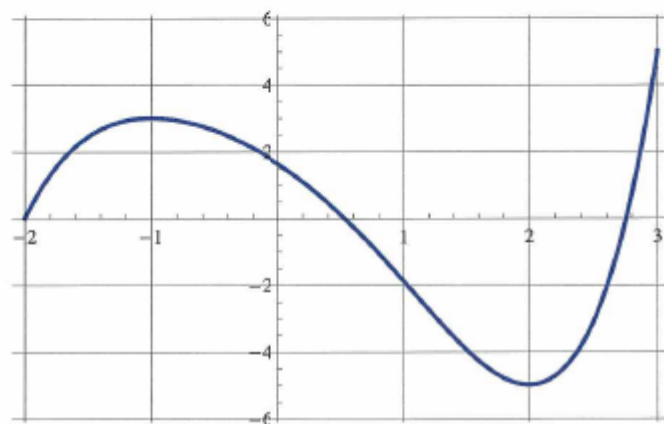
- a) Missä pisteissä paraabeli leikkaa x -akselin?
- b) Määritä paraabelin huipun koordinaatit.



2. K10/3

Oheisessa kuviossa on erään funktion kuvaaja. Määritä kuvion perusteella

- a) funktion nollakohdat,
- b) funktion derivaatan nollakohdat,
- c) funktion suurin arvo välillä $[-2, 3]$,
- d) funktion pienin arvo välillä $[-2, 3]$,
- e) välit, joilla funktio on kasvava, ja
- f) väli, jolla funktio on vähenevä.



3. S11/6

Määritä funktion $f(x) = x^3 - 4x + 1$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 2]$.



4. K06/7

Tutki, milloin funktio $f(x) = x^3 - 27x + 2$ on kasvava ja milloin vähenevä.



5. K12/5

Tarkastellaan funktiota $f(x) = (x+3)(x^2 - 4)$.

- a) Laske funktion $f(x)$ nollakohdat.
- b) Määritä derivaatta $f'(x)$.
- c) Laske derivaatan nollakohdat.



6. S09/3

Olkoon $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4$.

- a) Muodosta funktion f derivaatta.
- b) Missä kohdissa funktion kuvaajan tangentti on x -akselin suuntainen?
- c) Millä välillä funktio on vähenevä?



7. S14/5

Millä muuttujan x arvolla summa $(x-3)^2 + (x-9)^2$ on mahdollisimman pieni?



8. K08/7

Pallo heitetään hetkellä $t = 0$. Sen lentokorkeus metreinä saadaan lausekkeesta $-0,15t^2 + 2,4t + 1,8$, missä t on aika sekunneissa. Kuinka korkealla pallo käy? Millä aikavälillä sen lentorata on laskeva?



9. S13/9

Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 4]$.



10. S06/10

Toisen asteen polynomin $y = ax^2 + bx + c$ kuvaaja kulkee pisteiden $(0, 0)$, $(1, 2)$ ja $(4, 3)$ kautta. Määritä kertoimet a , b ja c ja piirrä polynomin kuvaaja. Määritä polynomin derivaatta kohdassa $x = 2$.



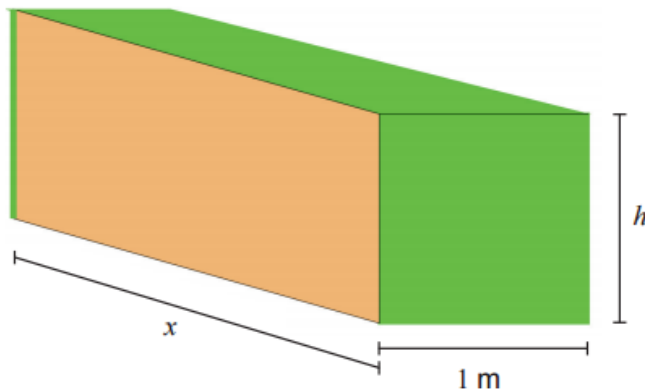
11. K10/6

Määritä funktion $f(x) = (x - 2)(3 - x)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-3, 3]$.



12. K15/6

Metrin pituisista haloista kasataan suorakulmaisen särmiön muotoinen pino. Pino suojataan pressulla sekä päältä että kahdelta vastakkaiselta sivulta kuvion mukaisesti. Määritä halkopinon leveys x ja korkeus h silloin, kun pressun pinta-ala on 10 neliömetriä ja pinon tilavuus on suurin mahdollinen.



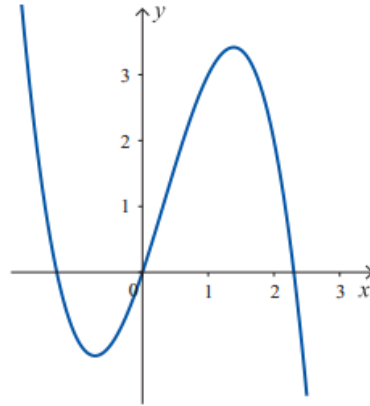
13. K15/9

Käyrä $y = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$ leikkaa x -akselin kolmessa kohdassa. Määritä keskimäiseen leikkauspisteeseen asetetun käyrän tangentin ja x -akselin välinen terävä kulma.



14. K14/13

- a) Mihin käyrän $y = -x^3 + x^2 + 3x$ pisteeseen asetetun tangentin kulmakerroin on suurin mahdollinen?
- b) Määritä a-kohdan tangentin yhtälö.



15. K13/7 helppo väliin

Mitä arvoja funktio $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 10x + 5$ saa välillä $[0, 2]$?



16. S11/11

Paraabelin $y = x^2 + 4$ pisteeseen $A = (3, 13)$ asetetaan tangentti. Tämä leikkaa x -akselin pisteessä B . Pisteeseen A kautta kulkeva y -akselin suuntainen suora leikkaa x -akselin pisteessä C . Laske kolmion ABC pinta-ala.



17. K11/5

Alla on taulukoituina erään funktion arvot $0,1:n$ välein välillä $[-1, 1]$. Hahmottele funktion kuvaaja ja määritä sen avulla likimääräisesti funktion derivaatta kohdassa $x = 0$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
-1,0	0,00	-0,5	5,64	0,1	10,51	0,6	11,19
-0,9	1,05	-0,4	6,72	0,2	10,89	0,7	11,01
-0,8	2,18	-0,3	7,70	0,3	11,14	0,8	10,74
-0,7	3,34	-0,2	8,59	0,4	11,27	0,9	10,40
-0,6	4,51	-0,1	9,36	0,5	11,28	1,0	10,00
		0,0	10,00				



18. K11/9

Olkoon $f(x) = -x^3 + x + 2$ ja $g(x) = x^3 - x - 2$. Millä muuttujan x arvoilla on $f'(x) > g'(x)$?



19. S10/7

Määritä polynomin $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x$

- a) nollakohdat,
- b) ääriarvokohdat ja ääriarvot sekä
- c) piirrä polynomin kuvaaja.



20. K09/10

Suorakulmion yksi kärki on origossa, toinen pisteessä $(x, 0)$, $0 \leq x \leq 4$, ja kolmas paraabelilla $y = 4x - x^2$. Muodosta suorakulmion alan lauseke x :n avulla ja määritä alan suurin arvo.



21. S07/12

Rautalanka, jonka pituus on 120 cm, katkaistaan kahteen osaan. Toinen osa taivutetaan neliöksi, toinen ympyräksi. Miten lanka on katkaistava, jotta ympyrän ja neliön alojen summa olisi mahdollisimman pieni?



22. S08/12

Määritä funktion $f(x) = -x^3 + 13,5x^2 - 41x + 50$ suurin arvo välillä $[0, 10]$. Mikä on vastaava muuttujan x arvo? Millä muuttujan x arvolla funktio kasvaa nopeimmin? Anna vastaukset kolmen desimaalin tarkkuudella. Piirrä funktion kuvaaja ko. välillä.



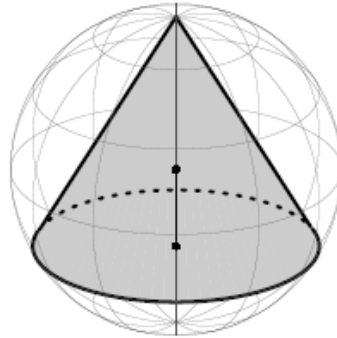
23. K07/8

Määritä funktion $f(x) = x(3 - 4x - x^2)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 3]$.



24. K07/14

Pallon säde on 3. Määritä pallon sisään mahtuvan tilavuudeltaan mahdollisimman suuren suoran ympyräkartion tilavuus. Ympyräkartion kärki ja pohjaympyrän kehä ovat pallon pinnalla. Valitse muuttujaksi pohjan etäisyys pallon keskipisteestä. Ilmoita tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.



25. S06/9

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}$ välillä $[-1, 4]$. a) Määritä funktion suurin ja pienin arvo annetulla välillä ja piirrä funktion kuvaaja. b) Määritä käyrän $y = f(x)$ tangentin kulmakertoimen suurin ja pienin arvo annetulla välillä.



26. K06/13

Pienien alumiinista valmistettavien suoran ympyräkartion muotoisten valaisinkupujen korkeuden ja pohjaympyrän halkaisijan summa on 18,6 cm. Määritä kartion pohjaympyrän säde siten, että kartion tilavuus on mahdollisimman suuri. Määritä tämä tilavuus.



27. S09/10

Ravintolan julkisivu on 8,0 m, ja julkisivua tai sen osaa on tarkoitus käyttää ravintolan suorakulmion muotoisen terassin yhtenä sivuna. Terassin aitaa, portti mukaan lukien, on käytettävissä 20,0 m. Mikä on terassin suurin mahdollinen pinta-ala? Minkä pituisia ovat terassin sivut?



28. S09/13

Pienoisrakettia laukaistaessa sen lähtösuunta poikkei 20 astetta pystysuorasta suunnasta. Raketti putosi sadan metrin päähän lähtöpaikasta. Kuinka korkealla raketti kävi? Lentorata oletetaan paraabeliksi.



Vanhempia tehtäviä

1.

Tutki, milloin funktio $f(x) = x^3 - 27x + 2$ on kasvava ja milloin vähenevä.

2.

Olkoon $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$. Laske $f'(\frac{\sqrt{3}}{2})$. Millä x :n arvoilla on $f'(x) = 0$?

3.

Määritä ne kohdat, joissa funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 17$ derivaatta saa arvon 2.

4.

Olkoon $f(x) = x^2 - 3,1x - 1,4$. Laske funktion f nollakohdat ja tutki, millä välillä se saa negatiivisia arvoja.

5.

Strutsien kasvattaja haluaa tilapäisesti vuokrata eläinten jaloitteluun peltoa. Pellosta pyydetään vuokraa 128 € hehtaarilta. Alue tulee lisäksi aidata, ja aitakustannukset ovat 0,20 € aitametriltä. Strutsifarmari on varannut tarkoitukseen 550 euroa. Kuinka suuren aidalla ympäröitävän neliönmuotoisen peltoalan hän pystyy vuokraamaan?

6.

Osoita, että funktioilla $f(x) = -4x^3$ ja $g(x) = x^3 + x$ ei ole ääriarvoja, mutta summafunktiolla $h(x) = f(x) + g(x)$ on. Mitkä ovat nämä ääriarvot?

7.

Kannettoman neliöpohjaisen muovisen laatikon valmistamiseen käytetään materiaalia sen verran, että laatikon pohjan ja seinien kokonaispinta-ala on 1 200 cm². Laatikon tilavuus halutaan mahdollisimman suureksi. Määritä laatikon tilavuus, korkeus ja pohjan sivun pituus.

8.

Tee selkoa, mitä polynomifunktion derivaatta kertoo funktion kulusta. Osoita, että funktio $f(x) = 5x^3 + \frac{13}{2}x^2 + 3x - 12$ on kaikkialla kasvava.

9.

a) Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ suurin ja pienin arvo välillä $[0, 2]$. b) Määritä vakio a siten, että funktion $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + a$ pienin arvo välillä $[0, 2]$ on $-4\frac{1}{2}$. Mikä on tällöin funktion suurin arvo ko. välillä?

10.

Tutki, millainen luvun q tulee olla, jotta polynomifunktio $f(x) = x^3 + x^2 + qx + 1$ olisi ainakin jollakin välillä vähenevä. Mikä on tällöin tämä väli?

11.

Kennelin pitäjä tekee koirilleen aitauksen, jossa on rinnakkain viisi samanlaista suorakulmion muotoista osastoa siten, että koko aitauksesta muodostuu suorakulmio. Aita-aineksia on käytettävissä tasan 200 metrin aitaan. Mitkä ovat yhden osaston mitat silloin, kun koko aitauksen ala on mahdollisimman suuri? Mikä on tällöin koko aitauksen ala?

12.

Mikä yhteys on funktion f derivaatan $f'(a)$ ja pisteeseen $(a, f(a))$ piirretyn funktion f kuvaajan tangentin välillä? a) Määritä $f'(1)$, kun funktion f kuvaajalla on pisteessä $(1, -\frac{3}{4})$ tangenttina suora $4y + 5x = 2$. b) Voiko funktion f , $f(x) = x^2$ kuvaajalla olla tangenttina suora $y = x - 2$ käyrän jossakin pisteessä?

13.

Pakkauslaatikoita valmistettaessa jää ylimääräisiä 0,80 m pitkiä ja 0,50 m leveitä suorakulmion muotoisia pahvipaloja. Näistä laaditaan kannettomia suorakulmaisen särmiön muotoisia marjalaatikoita leikkaamalla joka nurkasta neliön suuruinen pala pois siten, että neliön sivu vastaa laatikon korkeutta. Kuinka korkea laatikosta tulisi tehdä, jotta saataisiin tilavuudeltaan mahdollisimman suuri laatikko? Kuinka monta litraa marjoja tähän laatikkoon enimmillään mahtuu?

7. Todennäköisyys yo-tehtäviä

1. s06/4 (0,833; 0,164; 0,003)

Abiturientilla on kaksi herätyskelloa. Uudempi toimii oikein 98 %:n todennäköisyydellä ja vanhempi 85 %:n todennäköisyydellä. Matematiikan kokeen aattona abiturienti asettaa molemmat kellot soimaan seuraavana aamuna. Millä todennäköisyydellä kelloista soi oikeaan aikaan a) molemmat, b) vain toinen, c) ei kumpikaan?



2. s08/11 (0,936; 0,718)

Puutarhuri istuttaa siemeniä, joiden itävyys on 60 %.

- a) Mikä on todennäköisyys, että kolmesta istutetusta siemenestä mikään ei idä? Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi siemen itää?
- b) Siemeniä istutetaan viiteen ruukkuun kuhunkin kolme. Mikä on todennäköisyys, että jokaisessa ruukussa ainakin yksi siemen itää?



3. K13/10 (15/36 ja 11/36)

Noppaa heitetään kaksi kertaa. Millä todennäköisyydellä

- a) silmälukujen summa on vähintään kahdeksan?**
- b) silmälukujen summa on suurempi kuin niiden tulo?**



4. K14/9 (0,33)

Sarjakuvanäyttelyn lipun hinta on 5 €, mutta lipunmyyjä on unohtanut ottaa mukaan vaihtorahaa. Lippujonossa on neljä asiakasta, joista kullakin on vain yksi seteli. Kahdella on 5 €:n seteli ja kahdella muulla 10 €:n seteli. Kuinka suurella todennäköisyydellä asiakkaat ovat sellaisessa järjestyksessä, että lipunmyyjä voi antaa heti jokaiselle oikean vaihtorahan?



5. S03/9 (15 380 937, on oikea, 10416, ja 224)

Lottoarvonnassa arvotaan 39 numerosta 7 numeroa. Kuinka monta erilaista 7 rastin lottoruudukkoa on olemassa? Kun on arvottu seitsemän numeroa (eikä ns. lisänumeroita oteta huomioon), erilaisia 4 oikein -ruudukkoja on erään lehtiartikkelin mukaan olemassa 173 600. Tarkista, onko luku oikea. Jos ei, niin mikä on oikea lukumäärä? Laske, kuinka monta erilaista 5 oikein -ruudukkoa ja kuinka monta erilaista 6 oikein -ruudukkoa on olemassa.

6. K10/8 (0,0024; 0,074)

Tiedonsiirtojärjestelmässä havaittiin yksittäisen bitin saapuvan virheellisenä vastaanottajalle todennäköisyydellä 0,00015. Yksittäisten bittien siirtojen oletetaan olevan toisistaan riippumattomia.

- a) Millä todennäköisyydellä vastaanottajalle saapuvassa 16 bitin jonossa on ainakin yksi virheellinen bitti?
- b) Jos lähetetään 32 kappaletta 16 bitin jonoja, niin millä todennäköisyydellä vastaanottajalle saapuu ainakin yksi virheellinen jono?

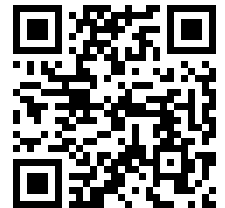


7. (a) 32, b)3003)

Kokelaan ylioppilastutkinnon matematiikan koe muodostuu 10 tehtävästä. Vanhanmuotoisessa matematiikan kokeessa oli 10 tehtävää ja osassa tehtävistä oli kaksi vaihtoehtoa, joista sai laskea vain toisen; nykyisessä kokeessa saa 15 tehtävästä vapaasti valita suoritettavakseen 10 tehtävää. Kuinka monta erilaista 10 tehtävän kokonaisuutta on a) vanhanmuotoisessa kokeessa, jossa viidessä tehtävässä on kaksi vaihtoehtoa, ja b) nykyisessä uudenmuotoisessa kokeessa?

8. s06/11 ($2,65 \cdot 10^{32}$; 4060 ja $4,42 \cdot 10^{31}$; $8,41 \cdot 10^{12}$ vuotta)

- a) Kuinka monta erilaista istumajärjestystä voidaan muodostaa luokassa, jossa on 30 oppilasta ja 30 pulpettia? b) Kuinka monella tavalla kolme tyhjää pulpettia voidaan valita luokassa, jossa on 27 oppilasta ja 30 pulpettia? Kuinka monta erilaista istumajärjestystä on tässä luokassa? c) Kuinka monta vuotta tietokoneelta kuluisi, jos se kävisi läpi a-kohdan erilaiset istumajärjestykset käsitellen biljoona (10^{12}) istumajärjestystä sekunnissa? Yksi vuosi on keskimäärin 365,25 vuorokautta.



9. K15/10 (0,055)

Kokeessa on 10 tehtävää, joissa valitaan kahdesta vaihtoehdosta oikea vastaus. Oikeasta vastauksesta saa yhden pisteen ja väärästä vastauksesta menettää yhden pisteen. Huonosti valmistautunut opiskelija valitsee kaikki vastaukset arvaamalla. Kuinka suurella todennäköisyydellä hän saa kokeesta vähintään 8 pistettä?



10. S13/8 (2/3n)

Pussissa on punaisia ja valkoisia palloja. Todennäköisyys sille, että väriä näkemättä valitsee punaisen pallon, on $0,4$. Kuinka monta punaista palloa pussissa on, jos siinä on n kappaletta valkoisia palloja?



11. S11/9

Värisävy esimerkiksi www-sivulla voidaan ilmoittaa kuusimerkkisellä RGB-koodilla, joka sisältää tiedon sävyn muodostavien perusvärien punainen (Red), vihreä (Green) ja sininen (Blue) määristä. Kunkin perusvärin määrä ilmoitetaan kahdella peräkkäin kirjoitetulla merkillä, jotka valitaan joukosta

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f.

Laske, kuinka monta erilaista värisävyä RGB-koodilla voidaan ilmaista.



0000ff



f5c97a

12. S10/8

Verkkopankkiin kirjaututaan niin, että ensin annetaan kuuden numeron pituinen käyttäjätunnus ja neljän numeron pituinen salasana, minkä jälkeen annetaan vielä neljän numeron pituinen kertakäyttötunnus. Jokaisella pankin asiakkaalla on eri käyttäjätunnus, mutta usealla asiakkaalla voi olla sama salasana ja kertakäyttötunnus.

- Jos verkkopankilla on 600 000 asiakasta, niin mikä on todennäköisyys sille, että yhdellä arvauksella löytää jonkun asiakkaan käyttäjätunnuksen?
- Mikä on todennäköisyys sille, että yhdellä yrityksellä pääsee kirjautumaan verkkopankkiin?

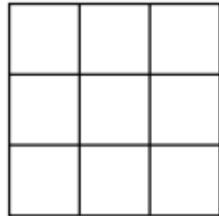


13. K11/8

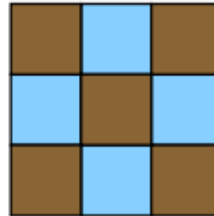
Alla olevan kuvion 1 kukin ruutu väritetään satunnaisesti ja toisista riippumatta joko ruskeaksi tai siniseksi.

a) Millä todennäköisyydellä saadaan kuvion 2 shakkilautakuvio?

b) Millä todennäköisyydellä mikään vaakarivi ei ole yksivärinen?



Kuvio 1



Kuvio 2



14. (K06/9)

Noppaa heitetään 5 kertaa. Millä todennäköisyydellä tuloksena on a) täsmälleen kaksi kuutosta, b) vähintään kaksi kuutosta?

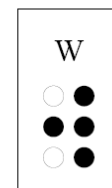


15.

Sanan YLIOPIILAS kymmenestä kirjaimesta otetaan umpimähkään kolme. Millä todennäköisyydellä a) ensiksi otettu kirjain on vokaali, b) otetuista kirjaimista vain yksi on vokaali, c) otetuista kolmesta kirjaimesta voidaan muodostaa sana ILO?

16. (k07/10)

Ranskalaisen Louis Brailleen vuonna 1825 kehittämä pistekirjoitus on kohokirjoitusta, jota luetaan sormin. Pistekirjoitusjärjestelmässä kutakin merkkiä kohti on käytettävissä kuusi kiinteää paikkaa, joihin voidaan asettaa yhdestä kuuteen pistettä. (Esimerkkinä kuviossa on kirjain W.) Kuinka monta erilaista merkkiä järjestelmässä voidaan esittää?



17. K09/11

Vasenkätisiä on erään tiedon mukaan 10 % väestöstä. Kuinka monta henkilöä tulee satunnaisesti kootussa ryhmässä olla, jotta siinä olisi ainakin yksi vasenkätinen todennäköisyydellä 0,8?



18. S07/11

Golfsimulaattorissa pallon puttaaminen reikään onnistuu varmasti, jos pallo on enintään 80 cm:n päässä reiästä. Tästä alkaen todennäköisyys saada pallo reikään on kääntäen verrannollinen pallon ja reiän välisen etäisyyden neliöön. Millä todennäköisyydellä kymmenestä pallosta ainakin yksi menee reikään putattaessa kolmen metrin etäisyydeltä?



19. K08/8

Kulhossa on viisi punaista ja kymmenen mustaa palloa. Kulhosta poimitaan umpimähkään viisi palloa palauttamatta yhtäkään. Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi poimituista palloista on punainen? Millä todennäköisyydellä kaikki viisi ovat samanvärisiä?



20. K05/10

Pelaaja lyö euron vetoa, että rahanheiton tulos on kruuna, mutta häviää. Hän uudistaa vetonsa kaksinkertaistamalla panoksensa ja häviää jälleen. Näin jatkuu edelleen. Hävittyään hän uudistaa aina vetonsa kaksinkertaistamalla panoksensa. **a)** Mikä on todennäköisyys sille, että pelaaja häviää 20 kertaa peräkkäin? **b)** Muodosta lauseke sille rahamäärälle, jonka hän on menettänyt n peräkkäisen häviön jälkeen, ja laske sen avulla, kuinka paljon pelaaja jää voitolle, jos hän 20 häviön jälkeen voittaa 21. kerralla. Voitto on panoksen suuruinen.



21. S05/6

Kokouksen alussa osanottajat kätelivät toisensa kertaalleen. Kädenpuristuksia tuli tällöin kaikkiaan 66. Kuinka monta osanottajaa kokouksessa oli?



8. Yo Tilastot

1. S11/10 (47p)

Oletetaan, että matematiikan ylioppilaskokeen tulokset (jotka ovat välillä $0, \dots, 60$ pistettä) jakautuvat likimain normaalisti keskiarvona 30 ja keskihajontana 10. Määritä tämän perusteella laudaturin pisteraja, kun tavoitteena on antaa laudatureja enintään viidelle prosentille osallistujista.



2. K11/7 ($x=3,1$, $s=1,56$)

Eräässä kokeessa annettiin suoritusten arvosanoiksi 0, 1, 2, 3, 4, 5 tai 6. Näiden prosentiosuudet olivat seuraavat:

arvosana	0	1	2	3	4	5	6
osuus	5,80	10,99	17,54	24,78	19,95	15,48	5,46



Laske kokeen keskiarvo ja keskihajonta.

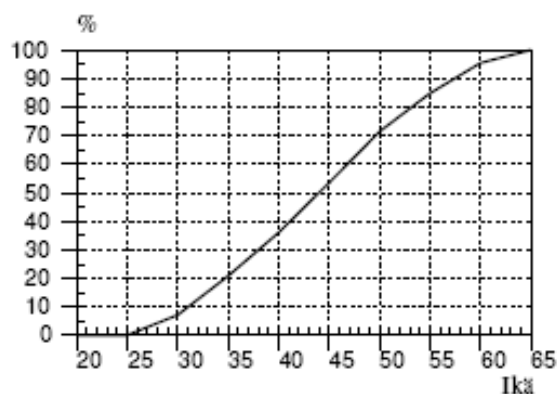
3. K13/12 (0,055)

Valmistajan tarkistusmittauksissa todettiin, että hajuvesipullon sisällön määrä noudattaa normaalijakaumaa, jonka keskiarvo on 52 millilitraa ja keskihajonta on 1,25 millilitraa. Millä todennäköisyydellä hajuvesipullon sisältö on alle 50 millilitraa?



4.

Kuvion summafrekvenssikuvaaja esittää ammatissa toimivien lääkäreiden ikäjakaumaa vuonna 2001. (Lähde: Terveystieteiden tutkimuskeskus 31.12.2001, Stakes 5/2002.)



Arvioi kuvaajan perusteella

- lääkäreiden mediaani-ikä,
- ikä, jonka 25 % lääkärikunnasta alitti,
- ikä, jonka 25 % lääkärikunnasta ylitti,
- kuinka monta prosenttia lääkärikunnasta oli 40 vuotta täyttäneitä,
- kuinka monta prosenttia enemmän oli alle 35-vuotiaita lääkäreitä kuin 55 vuotta täyttäneitä.

5. s15/13 (a)10% b) 13%)

Hiustenkuivaaja toimii vioittumatta ajan, joka on normaalijakautunut odotusarvona 15,2 kuukautta ja keskihajontana 2,5 kuukautta. Kuivaajalla on yhden vuoden takuu.

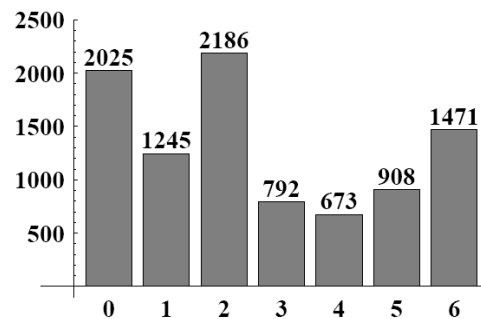
a) Kuinka monta prosenttia kuivaajista joutuu takuukorjaukseen?

b) Kuinka monta prosenttia kuivaajista toimii vioittumatta yli 18 kuukautta?



6. k09/4

Alla oleva pylväsdiagrammi esittää kevään 2007 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen tehtävän 8 pistejakaumaa (vaaka-akselilla pisteet, pylväiden korkeus osoittaa kyseisen pistemäärän saaneiden lukumäärän). Laadi vastaava sektoridiagrammi, josta ilmenee kunkin pistemäärän saaneiden suhteellinen osuus, ja ilmoita osuudet prosentteina.



7. K15/13 ($x=4,86$ ja $s=1,25$)

Erään koulun matematiikan ylioppilaskokeen arvosanjakauma oli oheisen taulukon mukainen. Määritä arvosanojen keskiarvo ja keskihajonta, kun arvosanoille käytetään taulukkoon merkittyjä numeroarvoja.

Arvosana	Numeroarvo	Lukumäärä
I	7	7
e	6	20
m	5	30
c	4	16
b	3	9
a	2	4
i	0	0



8. K12/14 (1,2)

Vuorokauden keskilämpötila maaliskuussa on eräällä paikkakunnalla normaalijakautunut niin, että odotusarvo on $4,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ja 90 % vuorokautisista keskilämpötiloista on $2,0\text{ }^{\circ}\text{C} - 6,0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Laske keskilämpötilan keskihajonta.



9. S14/8 ($x=6555$, $s=1565$, Jokerit ja HIFK)

Alla olevassa taulukossa ovat jääkiekon SM-liigan kuuden seuratuimman joukkueen keskimääräiset kotiottelujen katsojaluvut liigakaudella 2011–2012.

a) Laske katsojalukujen keskiarvo ja keskihajonta.

b) Minkä joukkueiden katsojaluvut poikkeavat keskiarvosta enemmän kuin keskihajonnan verran?

Jokerit	9 173
HIFK	8 266
Kärpät	5 821
TPS	5 534
Tappara	5 359
Ilves	5 177



10. S12/14 (0,023)

Eräässä tutkimuksessa mitattiin tiettyä lisäainepitoisuutta sadassa pullollisessa virvoitusjuomaa. Pitoisuuden keskiarvoksi saatiin $\bar{x} = 0,215\text{ }%$ ja keskihajonnaksi $s = 0,005\text{ }%$. Lisäainepitoisuus noudattaa normaalijakaumaa. Millä todennäköisyydellä lisäaineen pitoisuus pullossa ylittää sallitun rajan $0,225\text{ }%$?



11. (7,5)

Eräässä matematiikan kokeessa arvosanojen jakauma oli seuraava:

4	5	6	7	8	9	10
1,3 %	9,8 %	15,8 %	20,3 %	23,3 %	23,4 %	6,1 %

Laske arvosanojen keskiarvo.

12. S09/9

Erään väestötilaston mukaan 18-vuotiaiden tyttöjen pituuden keskiarvo on 165 cm ja keskihajonta 6 cm. Samanikäisten tyttöjen pituus noudattaa likimain normaalijakaumaa. Mikä on todennäköisyys sille, että umpimähkään valittu 18-vuotias tyttö on korkeintaan 175 cm pitkä? Millä todennäköisyydellä kolmen tytön ryhmässä kaikki ovat alle 175 cm pitkiä? Entä millä todennäköisyydellä kolmesta tytöstä ainakin yksi on yli 175 cm pitkä?



13. (helppo)

Suomalaisten 30-vuotiaiden miesten keskipituus on 180,0 cm, ja pituuksien keskihajonta on 5,8 cm. Kuinka monta prosenttia 30-vuotiaista miehistä on yli kaksi metriä pitkiä, jos oletetaan, että pituus noudattaa normaalijakaumaa?

14. S05/14

Eräässä lyhyen matematiikan ylioppilaskokeessa keskiarvo oli 27,36 ja keskihajonta 12,23 pistettä. Jos oletetaan pistemäärän noudattavan normaalijakaumaa, niin a) mikä on alin pistemäärä, jolla saa laudaturin, jos laudatur-arvosanojen osuudeksi halutaan enintään 5 % kaikista kokelaista, b) kuinka monta prosenttia kokelaista hyväksytään, jos alin hyväksytty pistemäärä on 12?



15. K05/3 (helppo)

Nuoripari pitää kirjaa talousmenoistaan. Joka kuukauden viimeisenä päivänä he laskevat, kuinka paljon kuukauden menot ovat olleet. Eräänä vuonna marraskuun lopussa menot olivat olleet keskimäärin 1651,20 euroa kuukaudessa. Joulukuussa menot olivat 1814,88 euroa. Mikä oli talousmenojen kuukausikeskiarvo koko vuoden osalta?



16. K05/15

Kilon sokeripusseja täytetään koneellisesti. Pussituskone voidaan asettaa täyttämään pusseja, joiden paino noudattaa normaalijakaumaa keskiarvona koneelle asetettu paino ja keskihajontana 8,0 g. Kuinka suureksi sokeripussin paino tulee asettaa koneeseen, jotta 95 % sokeripusseista olisi painoltaan vähintään 1000 g?



17. K06/15

Ilpo ja Antero säätivät vuorotellen alumiiniprofiilin leikkurin terää 2000 mm:n kohdalle. Hyväksyttävä profiilin pituus on $2000 \text{ mm} \pm 0,40 \text{ mm}$. Säädetyt terän leikkauskohdan oletetaan noudattavan normaalijakaumaa keskiarvona 2000 mm. Ilpon säädön keskihajonta on 0,19 mm ja Anteron 0,24 mm. Kun jokaisella säädöllä leikataan yhtä monta profiilia, niin kuinka monta prosenttia enemmän hukkakappaleita leikkuri keskimäärin tuottaa Anteron säätämänä kuin Ilpon säätämänä?



18. s06/15

Automaattisessa nopeusseurannassa saatiin vuorokauden aikana tietoja mittauskohdan ohittaneista kaikkiaan 4190 ajoneuvosta. Nopeuksien otoskeskiarvo oli 97,75 km/h ja otoskeskihajonta 10,70 km/h; nopeudet jakautuivat likimain normaalisti. **a)** Määritä nopeuden keskiarvon (odotusarvon) 95 % luottamusväli. **b)** Arvioi, kuinka moni seuraavista mittauskohdan ohittavista 1 000 ajoneuvosta ylittää nopeuden 90 km/h.



9. Yo Yhtälöparit ja epäyhtälöt

1. S13/2b

b) Ratkaise yhtälöpari
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 1. \end{cases}$$



2. K14/6

- . Kiinalainen arvoitus 5 000 vuoden takaa: Häkissä on fasaaneja ja kaniineja. Niillä on yhteensä 35 päätä ja 94 jalkaa. Kuinka monta fasaania ja kuinka monta kaniinia häkissä on?



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Common_Pheasant_RWD2.jpg.
Luettu 12.3.2013.



<http://www.hdwallpapersarena.com/rabbit-wallpapers.html>.
Luettu 12.3.2013.

3. S12/1

a) Ratkaise yhtälö $x^2 - 2x = 0$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{2}{3}x - 1 = \frac{2}{3}$.

c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = -3. \end{cases}$$



4. K11/1c

c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 3y = 1. \end{cases}$$



5. S09/12

Suorat $x + y = 8$, $x + 3y = 18$ ja $y - 3 = 0$ rajoittavat kolmion. Piirrä kuvio ja laske kolmion pinta-ala. Muodosta epäyhtälöryhmä, jonka ratkaisuna on piirtämäsi kolmio sivut mukaan lukien.



6. K12/1c

c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 8. \end{cases}$$



7. S07/8

Keltaista ja sinistä väripigmenttiä käytettiin kahden erisävyisen vihreän maalin sekoittamiseen. Maaliin A tarvittiin litraa kohden 80 g keltaista pigmenttiä ja 110 g sinistä pigmenttiä, maaliin B vastaavasti 120 g keltaista ja 90 g sinistä pigmenttiä. Kuinka monta litraa kumpaakin maalia valmistettiin, kun keltaista pigmenttiä käytettiin 3,2 kg ja sinistä 3,5 kg?



8. K10/1c

c) Määritä suorien $x + y = 2$ ja $2x - y = 5$ leikkauspiste.



9. S08/6

Kupari-nikkeliseoksessa on 75 % kuparia ja 25 % nikkeliä. Toisessa kupari-nikkeliseoksessa on kuparia 80 % ja nikkeliä 20 %. Näistä valmistetaan sulattamalla 300 g kupari-nikkeliseosta, jonka nikkelipitoisuus on 22 %. Kuinka paljon kumpaakin seosta tähän tarvitaan?



10. S07/10

Ratkaise graafisesti epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} y \geq x - 2, \\ 7x + 2y \geq 14, \\ 5x + 4y \leq 28. \end{cases}$$



Anna vastauksena kuvio, johon on merkitty ratkaisujoukko.

11. S14/13

a) Epäyhtälöt $x + 3y \leq 18$, $3x + 2y \leq 19$, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ määrittelevät nelikulmion N . Piirrä sen kuva xy -koordinaatistossa ja laske kärkien koordinaatit.

b) Määritä lausekkeen $2x + y$ suurin ja pienin arvo nelikulmiossa N .



12. K09/1

a) Muodosta polynomien $-x^2 + 2x$ ja $2x^2 - 3x + 1$ summa ja tulo.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = x - 1$.

c) Ratkaise yhtälöryhmä $x + y = 1$, $x - y = 2$.



13. S13/13

Eräässä tosi-TV-sarjassa kilpailijoiden tehtävänä on kerätä kulta- ja hopearahoja. Yhteensä niitä saa kerätä enintään 60 kappaletta. Kultarahan arvo on 25 € ja hopearahan arvo 20 €. Rahat täytyy kuljettaa ohuessa muovipussissa, joka kestää kolikoita vain yhden kilogramman verran. Yksi kultaraha painaa 20 grammaa ja hopearaha 10 grammaa. Kuinka monta kulta- ja hopearahaa kilpailijan kannattaa kerätä, jotta saaliin arvo on mahdollisimman suuri?



14. K09/12

Mikä on suurin arvo, jonka lauseke $x + y$ saa epäyhtälöiden

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 2x + 3y \leq 24 \quad \text{ja} \quad 5x + 3y \leq 30$$

määrittelemässä alueessa? Laske alueen kärkipisteiden koordinaatit. Piirrä kuvio.



15. K12/11

Levitöimiseen tarvittavassa taikajuomassa on oltava vähintään 20 hyppysellistä jauhettua lepakon siipeä ja vähintään 10 hyppysellistä hämähäkin seittiä. Taikajuomapuodissa on kahta valmissekoitetta Ascensus ja Sursum. Pikarillinen Ascensus maksaa kaksi kultarahaa, ja siinä on kolme hyppysellistä lepakon siipeä ja kaksi hyppysellistä hämähäkin seittiä. Pikarillinen Sursumia maksaa kolme kultarahaa. Siinä puolestaan on neljä hyppysellistä lepakon siipeä ja yksi hyppysellinen hämähäkin seittiä. Kuinka paljon kumpaakin sekoitetta kannattaa levitoijakokelaan ostaa, jotta hän saisi taikajuoman mahdollisimman edullisesti?



16. K08/9

Lomapaketin hinta koostui hotelli- ja matkakustannuksista. Hotellikustannukset lasivat 5 % ja matkakustannukset nousivat 18 %. Muutosten jälkeen lomapaketin hinta oli sama kuin aikaisemminkin. Kuinka monta prosenttia matkakustannukset olivat lomapaketin hinnasta ennen muutoksia?



17. S10/13

Millä vakion a arvolla yhtälöparilla

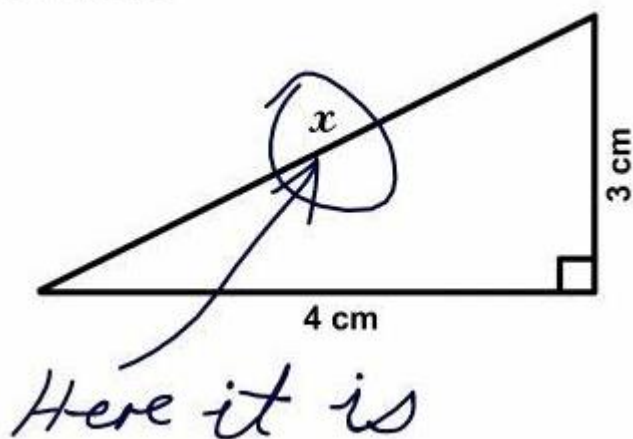
$$\begin{cases} 2x + (a + 1)y = 5, \\ 3x + (a - 2)y = a \end{cases}$$

ei ole ratkaisua?



The Romans didn't
find algebra very
challenging, because
 X was always
10.

3. Find x .



10. Yo Sarjat ja summat

Mallivastausvideot aukenevat qr-koodin avulla puhelimellasi.

1. K13/11

Lukujonossa (a_n) on $a_1 = 2$ ja $a_2 = \frac{12}{5}$. Määritä jonon sadan ensimmäisen termin summa,

kun jono on

a) aritmeettinen

b) geometrinen. Anna tämän kohdan vastaus miljoonan tarkkuudella.



2. K09/13

Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on 1, viimeinen termi on 61, ja jonon termien summa on 961. Mikä on jonon toinen termi?



3. S08/10

Lukujonon ensimmäinen termi on 2, ja jonon kukin seuraava termi on aina 5 % suurempi kuin edellinen termi. Muodosta jonon n :nnen termin lauseke. Tutki tämän avulla, kuinka moni jonon termi on pienempi kuin 1000 miljoonaa. Laske näiden termien summa kolmen numeron tarkkuudella.



4. S07/9

Vanhassa tarinassa šakkilaudan 64 ruudulle sijoitetaan vehnänjyviä: ensimmäiselle ruudulle yksi, toiselle kaksi, kolmannelle neljä jne. Seuraavalla ruudulla on aina edellisen ruudun määrä kaksinkertaisena. Kuinka monta ruutua voidaan täyttää Suomen vuotuisella 700 miljoonan kilogramman vehnäsadolla, jos oletetaan, että yksi vehnänjyvä painaa 25 mg?



5. S03/7

Geometrisen jonon suhdeluku on 4 ja kymmenen ensimmäisen termin summa 3 844 775. Määritä jonon ensimmäinen termi. Mikä on jonon kymmenes termi?

6. K06/11

Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on $\frac{3}{2}$, toinen on 7 ja viimeinen 117. Laske jonon summa.



7. S00/11

Toipilaan tulee leikkauksen jälkeen kuntouttaa lihaksiaan harjoittelemalla tiettyä liikesarjaa päivittäin kuukauden mittaisen kuntoutusjakson ajan. Hän aloittaa 15 minuutin pituisella voimistelulla ja lisää suoritusaikaa kuntoutusohjelman mukaan joka kerralla viidellä prosentilla. a) Kuinka pitkän ajan hän voimistelee kuntoutusjakson 30. päivänä? b) Kuinka paljon hän kaikkiaan käyttää aikaa voimisteluun kuntoutusjakson aikana? Anna vastaukset minuutin tarkkuudella.

8. K12/7

Henkilö lähettää sähköpostin kahdelle ystävälleen. Kumpikin näistä lähettää saman viestin 10 minuutin kuluttua edelleen kahdelle uudelle henkilölle, jotka toimivat samoin. Tilanne toistuu kunkin saajan kohdalla aina samalla tavalla, eikä kukaan saa kyseistä sähköpostia toista kertaa. Kuinka kauan kestää, että 20 000 henkilöä on saanut sähköpostin? Anna vastaus 10 minuutin tarkkuudella.



9. K07/11

Verenpainelääkettä otetaan aamuisin kerta-annoksena 60 mg. Vuorokaudessa lääkettä häviää elimistöstä 35 prosenttia. a) Laske, paljonko lääkettä on elimistössä välittömästi toisen ja viidennen lääkkeenottokerran jälkeen. b) Laske, paljonko lääkettä on elimistössä välittömästi n :nnen lääkkeenottokerran jälkeen. c) Tutki (esimerkiksi laskinta käyttäen), mitä arvoa tämä lääkkeen määrä näyttää lähestyvän lääkkeenottokertojen määrän n kasvaessa.



10. K14/8

Pyramidihuijari avaa pankkitilin ja siirtää ensimmäisessä vaiheessa tilille 100 €. Tämän jälkeen hän houkuttelee mukaan kolme sijoittajaa, joista jokainen siirtää toisessa vaiheessa huijarin tilille 100 €. Kolmannessa vaiheessa kukin näistä kolmesta houkuttelee edelleen mukaan kolme uutta sijoittajaa, joista jokainen siirtää 100 € huijarin tilille. Huijaus jatkuu saman kaavan mukaisesti. Kuinka monen vaiheen jälkeen tilillä oleva summa ylittää Suomen valtion vuoden 2013 talousarvion, joka on 54,1 miljardia euroa?



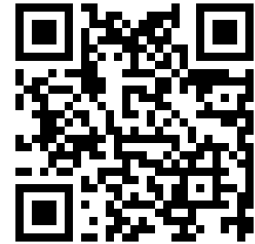
11. K12/9

Farao Djoser (hallitsi 2667–2648 eaa.) suunnitteli porraspyramidia, jossa on päällekkäin 100 suorakulmaista neliöpohjaista särmiötä niin, että kaikilla on sama korkeus ja jokaisen pohjasärmä on 10 % lyhyempi kuin alla olevan pohjasärmä. Alimmaisen särmiön tilavuus on $10\,000\text{ m}^3$. Määritä tällaisen porraspyramidin tilavuus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.



Porraspyramidi

<<http://fi.wikipedia.org/wiki/Djoser>>. Luettu 29.3.2011.



12. S11/13

Laske lukujen 1 000 ja 2 000 välissä olevien 13:lla jaollisten lukujen summa.



13. K11/13

Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on 10 ja toinen termi 12. Geometrisen jonon ensimmäinen termi on 2 ja suhdeluku $q = \frac{21}{20}$. Monennestako termistä lähtien geometrisen jonon termi on suurempi kuin vastaava aritmeettisen jonon termi? Muodosta tarvittava epäyhtälö ja etsi sille ratkaisu kokeilemalla.



14. S10/11

Ryöstöyrityksen keskeydyttyä Arska pinkaisi poliisia pakoon ja sai 200 metrin etumatkan. Kun poliisi oli juossut tämän 200 metriä, Arskalla oli vielä etumatkaa 180 metriä. Kun poliisi oli juossut tämän, Arskan etumatka oli jälleen kutistunut kymmenesosalla. Takaa-ajo jatkui samalla tavoin. Saiko poliisi Arskan kiinni? Jos sai, niin kuinka pitkän matkan juostuaan poliisi ulottui tarttumaan Arskaan? Poliisin käden pituudeksi oletetaan puoli metriä.



15. K10/11

Lukujonon seuraava termi a_{n+1} lasketaan edellisen termin a_n avulla kaavan

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$$

mukaisesti. Laske desimaalilukuina riittävällä tarkkuudella lukujonon termit a_1 , a_2 , a_3 ja a_4 , kun

$$\text{a) } a_0 = 3 \quad \text{ja} \quad \text{b) } a_0 = 8.$$

Laske molemmissa tapauksissa, kuinka monta prosenttia termi a_4 poikkeaa luvusta $\sqrt{2}$.

**16. S09/11**

Postimyyntiliike pyrkii saamaan lisää asiakkaita lupaamalla lahjan asiakkaalleen, joka hankkii kaksi uutta asiakasta. Liisa haluaa lahjan ja ilmoittaa kaksi ystäväänsä, jotka puolestaan hankkivat kukin kaksi uutta asiakasta jne. Oletetaan, että jokaiseen uusien asiakkaiden hankkimiskierrokseen kuluu aikaa viikko eikä entisiä asiakkaita saa pyytää uudelleen. Kuinka monta uutta asiakasta tällä tavalla olisi saatu kokoon viidessä viikossa? Muodosta lauseke uusien asiakkaiden määrälle n viikon kuluttua. Kuinka monta viikkoa menisi siihen, että näin hankittuja uusia asiakkaita olisi yli 10 000?

**17. S09/15**

Mauri on ottanut asuntolainaa 81 600 euroa 4,2 prosentin korolla. Hän lyhentää sitä vuosittain 4800 euroa ja maksaa samalla siihen mennessä kertyneet korot. Kuinka paljon korkoa hän maksaa toisen vuoden lopussa? Kuinka monta vuotta lainan takaisinmaksu kestää? Kuinka paljon korkoa Mauri maksaa kaiken kaikkiaan?

**18. S08/14**

Isovanhemmat sitoutuivat avustamaan lastenlastensa harrastustoimintaa viiden vuoden ajan. Kuinka suuri kertasumma heidän tulee vuodenvaihteessa sijoittaa tilille, jonka korkokanta on 2,2 %, jotta he voivat jakaa lastenlapsilleen vuosittain 2 500 euroa seuraavien viiden vuoden ajan? Ensimmäinen erä maksetaan vuoden kuluttua sijoituksesta ja seuraavat neljä erää vuoden välein. Lähdevero on 28 %.

**19. S10/14**

Yrittäjälle myönnetään lupa kalanviljelylaitoksen perustamiseen edellyttäen, että laitoksen toiminnasta koituva haitta korvataan rajanaapureille. Haitan vuotuiseksi arvoksi arvioidaan 7 000 euroa, ja ennen laitoksen käynnistämistä on maksettava tämän nykyarvo kymmenen vuoden ajalta. Paljonko yrittäjän on maksettava haittakorvausta, kun laskennassa käytetään 3,75 prosentin vuotuista korkoa?



20. K08/11

Isoisä avasi vuoden 2006 alussa lapsenlastaan varten tilin, jonka vuotuinen korkoprosentti lähdeveron vähentämisen jälkeen on 1,750, ja talletti tilille 700 euroa. Isoisä jatkaa seuraavina vuosina tallettamalla saman summan. Korko lisätään vuosittain tilin saldoon vuoden viimeisenä päivänä. Kuinka paljon tilillä on rahaa vuoden 2010 lopussa koron lisäyksen jälkeen? Muodosta ja sievennä lauseke, joka antaa tilin saldon vuoden lopussa, kun talletus on tehty n kertaa. Minkä vuoden lopussa rahaa on vähintään 12 000 euroa?



21. S06/14

Henkilö osallistuu jatkuvasti lottoarvontaan täyttämällä Internetissä yhden lottorivin kymmeneksi viikoksi joka toisen kuukauden alussa. Laske, kuinka paljon henkilölle kertyisi rahaa pankkitilille, jos hän loton sijasta 40 vuoden ajan, alkaen tammi-kuun 1. päivästä, tallettaisi joka toisen kuukauden alussa 7 euroa tilille, joka kasvaa korkoa 1,5 % vuodessa. Lähdeveroa ei oteta huomioon.



22. S04/6

Muodosta geometrisen jonon $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, \dots$ n :n ensimmäisen termin summa. Ratkaise summalauseketta käyttäen, mistä n :n arvosta alkaen summa ylittää miljoonan.

23. K04/8

Opiskelija on opintojensa alussa tehnyt lainasopimuksen, jonka mukaan hän nostaa jokaisen opiskeluvuoden alussa opintolainaa 4 000 €. Vuotuinen lainakorko on 4 %, mutta opiskeluaikana ei korkoa eikä lyhennyksiä tarvitse maksaa, vaan kertynyt korko liitetään jokaisen opiskeluvuoden lopussa lainapääomaan. Laske sopivan summalausekkeen avulla, paljonko opiskelijalla on velkaa, kun hän 12 vuoden opintojen jälkeen lopulta valmistuu.

24. K03/10

Lukujonon ensimmäinen termi on 4 ja viides 1. Määritä jonon toinen, kolmas, neljäs ja kymmenes termi, kun jono on **a)** aritmeettinen, **b)** geometrinen.

25. K02/12

Uutta pesukonemallia Suomeen tuova yritys sai joulukuussa 2000 myydyksi 470 pesukonetta. Yritys sai mainostajalta tarjouksen, jossa luvattiin mainostamisen lisäävän myyntiä vuoden 2001 alusta lähtien 25 % edelliseen kuukauteen verrattuna joka kuukausi kahden vuoden ajan. **a)** Kuinka monta pesukonetta yritys myisi tarjouksen mukaan vuoden 2001 kesäkuussa? **b)** Kuinka monta konetta myynti olisi koko kahden vuoden aikana?

11. Talousmatikan yo-tehtävät

Mallivastaukset aukeavat puhelimellasi/tabletillasi oheisista qr-koodeista. Ne löytyvät myös koneella youtubesta etsimällä esimerkiksi hakusanoilla Matti Leppänen, MAB S15

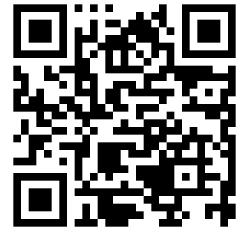
1. K2017/5

- a) Elina on lähdössä työmatkalle Norjaan. Hän vaihtaa aamulla 120 euroa Norjan kruunuiksi alla olevan taulukon kurssilla. Sen jälkeen hän saa kuitenkin tiedon matkan peruuntumisesta. Kuinka monta euroa Elina jää tappiolle, kun hän käy vaihtamassa samassa valuutanvaihtopisteessä kruunut takaisin euroiksi taulukon kurssilla? Yhtiö ei peri vaihtamisesta erillistä palkkiota.



Yhden euron arvo Norjan kruunuina,
setelikurssi

Osto	Myynti
9,8605 NOK	9,3565 NOK



Lähde (kuvat): <wikipedia.org>. Luettu 16.3.2016.

- b) Vuonna 2015 Helsingin pörssi heilahteli voimakkaasti. OMXH-indeksi, joka kuvaa pörssiyritysten kokonaismarkkina-arvoa, vaihteli vuosineljänneksittäin alla olevan taulukon osoittamalla tavalla. Mikä oli indeksin kokonaismuutos vuoden 2015 aikana, ja mihin suuntaan?

Ajanjakso	Muutos prosenteissa
1. neljännes	+16,19
2. neljännes	-8,10
3. neljännes	-7,25
4. neljännes	+11,89



Lähde (kuva): <kauppalehti.fi>. Luettu 16.3.2016.

2. K2017/10

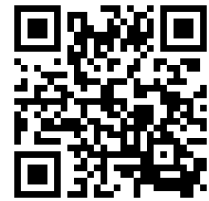
Suomalaisten kotitalouksien talletusten kokonaisarvo oli 80 778 000 000 euroa vuoden 2015 lopussa. Näiden talletusten keskimääräinen korko oli 0,32 %. Valtiovarainministeriö yrittää arvioida talletusten koroista saatavan vuoden 2017 lähdeveron suuruutta seuraavien oletusten pohjalta: kotitalouksien talletusten arvo nousee vuoden 2016 loppuun mennessä 1,5 % ja edelleen 1,0 % vuoden 2017 loppuun mennessä. Lisäksi arvioidaan, että keskiporko laskee 0,05 prosenttiyksikköä kumpanakin vuonna.

Kuinka paljon Suomen valtio saa tämän arvion perusteella talletusten koroista perittävää lähdeveroa vuodelta 2017, kun lisäksi oletetaan, että lähdeveroprosentti on koko ajan 30? Anna vastaus miljoonan euron tarkkuudella.



3. S2016/13

Allu haluaa ostaa 1 800 € maksavan maastopyörän. Mummo antaa hänelle 700 €. Allu tallettaa mummolta saamansa rahat 30.12.2014 tilille, jonka vuosittainen korkotuotto on 0,6 %. Lisäksi Allu asettaa itselleen kuukausittaisen säästötavoitteen: hän tallettaa jokaisen kuukauden ensimmäisenä päivänä tietyn summan, alkaen helmikuusta 2015. Paljonko Allun tulee kuukausittain säästää, jotta hän saa vuoden 2015 loppuun mennessä kokoon 1 800 €? Oletetaan, että jokaisessa kuussa on 30 päivää ja että lähdevero on 30 %.



4. K2016/5

5. Oheinen taulukko kuvaa kuluttajahintaindeksin kehitystä 2000-luvulla.

a) Kuinka monta prosenttia kuluttajahinta on noussut kesäkuusta 2006 kesäkuuhun 2010?

b) Petteri on vuokrannut asunnon syyskuussa 2011. Vuokrasopimuksen mukaan vuokranantajalla on oikeus korottaa vuokraa kerran vuodessa niin, että korotus vastaa kuluttajahintaindeksin muutosta. Vuokranantaja käyttää korotusoikeuttaan täysimääräisenä niin, että korotus tulee voimaan tammikuun alusta vuosina 2012, 2013 ja 2014. Kesäkuussa 2014 Petterin vuokra on 542 €/kk. Mikä oli vuokra vuokrasopimusta solmittaessa?



	tammi	helmi	maalis	huhti	touko	kesä	heinä	elo	syys	loka	marras	joulu
2014	119,0	119,3	119,6	119,8	119,5	119,5	119,4	119,6	120,2	120,0	119,8	119,6
2013	117,1	117,8	118,3	118,5	118,5	118,5	118,4	118,2	118,7	118,8	118,6	119,1
2012	115,2	115,9	116,3	116,7	116,7	116,8	116,6	116,8	117,3	117,4	117,0	117,2
2011	111,7	112,4	113,0	113,2	113,3	113,6	113,3	113,7	114,2	114,5	114,5	114,5
2010	108,3	108,7	109,2	109,5	109,4	109,7	109,1	109,6	110,0	110,5	110,7	111,3
2009	108,5	108,6	108,6	108,6	108,4	108,7	108,0	108,3	108,5	107,9	108,0	108,1
2008	106,2	106,7	107,6	107,8	108,4	108,8	108,6	109,1	109,6	109,6	109,1	108,7
2007	102,2	102,9	103,6	104,1	104,0	104,2	104,1	104,2	104,7	105,0	105,3	105,1
2006	99,9	100,7	101,0	101,5	101,6	101,7	101,5	101,9	102,0	102,3	102,3	102,4
2005	99,1	99,8	100,1	100,2	99,9	100,0	99,6	100,0	100,5	100,4	100,2	100,2

Lähde: Tilastokeskus

5. K2016/10

- a) Annika sai 58 000 € perintönä. Kuinka monta euroa Annika maksaa perinnöstä veroa? Mikä on hänen perintöveroprosenttinsa?
- b) Piirrä kuvaaja, josta käy ilmi perintöveron suuruus prosentteina perinnön arvon funktiona, kun perinnön suuruus on välillä 0 € ja 60 000 €.

Verotettavan osuuden arvo, €	Veron vakioerä osuuden alarajan kohdalla, €	Vero alarajan ylimenevästä osasta, %
20 000–40 000	100	8
40 000–60 000	1 700	11
60 000–200 000	3 900	14
200 000–1 000 000	23 500	17
1 000 000–	159 500	20



(Perintö- ja lahjaverolaki, 378/1940, § 14)

6. S15/14

Vuonna 2014 pääomatulojen veroprosentti on 40 000 euroon saakka 30 ja sen yli menevältä osalta veroprosentti on 32.

- a) Muodosta lauseke $f(x)$ pääomatuloveron suuruudelle, kun pääomatulo x on yli 40 000 euroa vuodessa.
- b) Laske veron määrä, kun pääomatuloja on 41 700,23 euroa vuodessa.
- c) Kun yksityishenkilö saa osinkotuloa pörssiyhtiön osakkeista, niin veronalainen osuus on 85 % osinkotuloista. Tästä osuudesta maksetaan pääomatuloveroa yllä mainitun säännön mukaisesti. Kuinka monta prosenttia veroa henkilö maksaa osinkotulostaan, kun osingon määrä on 41 700,23 euroa?



7. K15/14

Sijoitustilin talletukselle lasketaan vuotuinen korko, josta vähennetään lähdevero. Jäljelle jäänyt tuotto lisätään tilille vuoden lopussa. Hannele talletti vuoden 2010 lopussa 1 000 euroa säästötilille. Vuoden 2013 lopussa tilillä oli 1 086,37 euroa. Kyseisellä aikavälillä kuluttajahintaindeksi nousi arvosta 100,0 arvoon 108,5, toisin sanoen inflaatio oli tällä aikavälillä yhteensä 8,5 %.

- a) Laske talletuksen nimellinen vuosikorkoprosentti näiden kolmen vuoden aikana.
- b) Mikä on talletuksen todellinen korko euroina näiden kolmen vuoden aikana?



8. S14/4

Hammastahnaputkilon tilavuus on 100 ml ja hinta 1,50 €. Putkilon tilavuutta kasvatetaan 25 %, mutta samalla myyntihintaa korotetaan 40 %. Kuinka monta prosenttia kalliimpaa hammastahnaa on uudessa putkilossa millilitraa kohden?



9. S14/14

Kristian aikoo vaihtaa autoa ja hakee pankilta 8 000 euron lainaa. Pankki tarjoaa hänelle tasaerälainaa, joka maksetaan takaisin kahdessa vuodessa. Lainan vuotuinen korko on 6,6 % koko takaisinmaksukauden ajan. Muita kuluja ei oteta huomioon.

- a) Määritä lainan kuukausittaisen tasaerän suuruus.
- b) Kuinka paljon lainaa on jäljellä silloin, kun puolet takaisinmaksuajasta on kulunut?
- c) Kuinka paljon korkoa Kristian maksaa yhteensä koko kahden vuoden laina-aikana?



10. K14/8

Pyramidihuijari avaa pankkitilin ja siirtää ensimmäisessä vaiheessa tilille 100 €. Tämän jälkeen hän houkuttelee mukaan kolme sijoittajaa, joista jokainen siirtää toisessa vaiheessa huijarin tilille 100 €. Kolmannessa vaiheessa kukin näistä kolmesta houkuttelee edelleen mukaan kolme uutta sijoittajaa, joista jokainen siirtää 100 € huijarin tilille. Huijaus jatkuu saman kaavan mukaisesti. Kuinka monen vaiheen jälkeen tilillä oleva summa ylittää Suomen valtion vuoden 2013 talousarvion, joka on 54,1 miljardia euroa?



11. S13/10

Maalämpöpumppuja myyvän yrityksen liikevaihto kymmenkertaistui kahdessakymmenessä vuodessa. Kuinka monta prosenttia liikevaihto kasvoi vuodessa, kun vuotuinen kasvuprosentti pysyi koko ajan samana? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.



12. S13/14

Abiturientti saa lahjoituksen, jonka suuruus on verojen jälkeen 12 000 €. Hän sijoittaa sen vuodeksi kahteen rahastoon, joiden vuotuiset korot ovat verojen jälkeen 3,5 % ja 5,5 %.

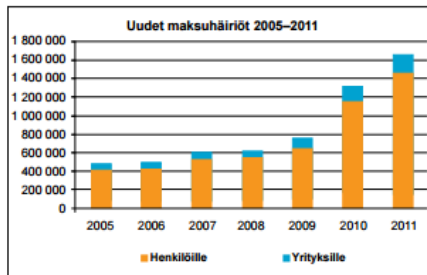
- a) Lahjoituksesta x euroa sijoitetaan 3,5 % tuoton tarjoavaan rahastoon ja loput toiseen rahastoon. Esitä koko sijoituksen arvo y muuttujan x avulla lausuttuna, kun $0 \leq x \leq 12\,000$.
- b) Piirrä a-kohdan funktion kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 12\,000$.



13. K13/8

Vuonna 2005 yksityishenkilöiden maksuhäiriöiden lukumäärä Suomessa oli 422 500, ja vuonna 2011 se oli 1 460 500.

- Kuinka monta prosenttia maksuhäiriöiden lukumäärä kasvoi tällä aikavälillä? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.
- Vuonna 2011 ministeriö asetti tavoitteeksi vähentää maksuhäiriöiden määrän neljässä vuodessa takaisin vuoden 2005 tasolle. Kuinka monta prosenttia määrä vähenee vuodessa, kun vuotuinen vähenemisprosentti on sama? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.



<<http://www.asiakastieto.fi/asiakastieto/tilastot/maksuhairiot/>>. Luettu 5.3.2012.

14. K13/14

Yhtiö valmistaa kännykkäkoteloiden, joiden valmistuskustannukset ovat 12,30 € kappale. Tämän lisäksi yhtiön kiinteät kustannukset ovat 98 000 euroa. Koteloiden myydään aluksi 17,99 eurolla, mutta viimeiset 25 % myydään varaston tyhjentämiseksi 14,00 eurolla kappale. Oletetaan, että yhtiö saa myytyä kaikki kotelot. Tehtävässä ei oteta huomioon verotusta.



- Muodosta lauseke, joka kuvaa yhtiön kokonaiskustannuksia koteloiden valmistusmäärän x avulla lausuttuna.
- Muodosta lauseke, joka kuvaa yhtiön saamaa voittoa valmistusmäärän x avulla lausuttuna.
- Kuinka monta koteloa yhtiön täytyy valmistaa, jotta kiinteät kustannukset saadaan katettua yllä mainitulla hinnoittelustrategialla?

15. S12/13

Karoliina ja Petteri tallettivat kumpikin 10 000 euroa vuodeksi. Karoliina sijoitti rahansa vuoden määräaikaistilille 2,20 %:n vuotuisella korolla. Maksetusta korosta pankki pidätti 30 % lähdeveroa. Petteri sijoitti rahansa ensin puolen vuoden määräaikaistilille, jonka vuosikorko oli 2,35 %. Puolen vuoden kuluttua Petteri sijoitti pääoman korkoineen, josta pankki oli pidättänyt 30 % lähdeveroa, toiselle puolen vuoden määräaikaistilille. Tämän tilin vuosikorko oli 2,00 %. Maksetusta korosta pankki pidätti jälleen 30 % lähdeveroa. Kumpi teki paremman sijoituksen, ja mikä oli sen arvo vuoden kuluttua?



16. K12/8

Naisten hiusten leikkaus maksaa nyt 45 euroa. Kuinka paljon se maksaa kymmenen vuoden kuluttua, jos hintaa korotetaan vuoden välein 2,5 %?



17. K12/13

Simeoni osti Saapasnahkatornin 12 000 eurolla ja teetti siihen myöhemmin 4 000 euron peruskorjauksen. Yksitoista vuotta myöhemmin hän myi sen Juhanille 42 000 eurolla. Voitosta on maksettava 30 % pääomatuloveroa. Verottaja tulkitsee voitoksi summan, joka saadaan, kun myyntihinnasta vähennetään ostohinta ja peruskorjauskulut. Toisaalta Simeoni voi myös halutessaan käyttää ns. hankintameno-olettamaa. Tällöin myyntihinnasta vähennetään 20 %, jos on omistanut tornin alle 10 vuotta, ja 40 %, jos on omistanut yli 10 vuotta. Mitään muita vähennyksiä ei saa tehdä. Jäljelle jääneestä summasta maksetaan 30 % pääomatuloveroa.

- Paljonko Simeonille jää myyntihinnasta verotuksen jälkeen, kun hän valitsee edullisemman vaihtoehdon?
- Mikä olisi sellainen myyntihinta, että Simeoni maksaisi kummassakin verotusvaihtoehdossa samaa?



18. S11/5

Osakkeen arvo laski 46 prosenttia ja nousi sitten ensiksi 15 prosenttia ja tämän jälkeen vielä 34 prosenttia.

- Oliko osakkeen arvo näiden muutosten jälkeen suurempi vai pienempi kuin ennen muutoksia?
- Kuinka monta prosenttia jälkimmäisen nousun olisi pitänyt olla, jotta olisi palattu alkuperäiseen arvoon?



19. S11/14

Matti lainaa ystävältään 7 500 euroa ja maksaa summan takaisin neljässä 2 000 euron erässä vuoden välein, ensimmäisen erän vuoden kuluttua lainan nostamisesta. Määritä, millaista vuotuista korkoprosenttia p tämä vastaa muodostamalla ensin yhtälö korkotekijälle $q = 1 + p/100$ ja etsimällä tälle likimääräinen ratkaisu. Anna vastauksena korkoprosentti yhden desimaalin tarkkuudella.



20. K11/14

- a) Säätiöllä on 1,8 miljoonan euron pääoma, jonka vuosittainen tuotto on 5,4 prosenttia.

Eräänä vuonna säätiö on päättänyt siirtää tuotosta 30 prosenttia pääomaan ja jakaa lopusta tuotosta kaksi 21 000 euron suuruista apurahaa opiskeluun ulkomailla sekä 14 yhtä suurta matka-apurahaa. Kuinka suuria matka-apurahat ovat?

- b) Kuinka suureksi säätiön 1,8 miljoonan euron pääoma kasvaa viidessä vuodessa, jos tuotto on jokaisena vuotena 5,4 prosenttia pääomasta ja vuosittain pääomaan siirretään 30 prosenttia tuotosta?

**21. S10/5**

Tuotteen hintaa korotetaan ensin 45 prosenttia ja sen jälkeen 62 prosenttia. Näytä, että tulos on sama, jos tuotteen hintaa korotetaan ensin 62 prosenttia ja sitten 45 prosenttia. Kuinka monen prosentin nousua tuotteen hinnassa korotukset yhteensä merkitsevät? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

**22. S10/14**

Yrittäjälle myönnetään lupa kalanviljelylaitoksen perustamiseen edellyttäen, että laitoksen toiminnasta koituva haitta korvataan rajanaapureille. Haitan vuotuiseksi arvoksi arvioidaan 7 000 euroa, ja ennen laitoksen käynnistämistä on maksettava tämän nykyarvo kymmenen vuoden ajalta. Paljonko yrittäjän on maksettava haittakorvausta, kun laskennassa käytetään 3,75 prosentin vuotuista korkoa?

**23. K10/5**

Tuhat euroa talletetaan viiden prosentin korolla 50 vuodeksi. Korko liitetään pääomaan vuosittain. Laadi pylväsdiagrammi, joka kuvaa talletuksen arvoa viiden vuoden välein. Lähdeveroa ei oteta huomioon.

**24. K10/13**

Lahjavero määräytyy ensimmäisessä veroluokassa seuraavasti:

Verotettavan osuuden arvo, euroa	Veron vakioerä osuuden alarajan kohdalla, euroa	Veroprosentti ylimenevästä osasta
4 000–17 000	100	7
17 000–50 000	1 010	10
50 000–	4 310	13



Lähde: www.vero.fi
(26.5.2009)

- a) Kuinka paljon veroa menee 30 000 euron lahjoituksesta?
- b) Piirrä sen funktion kuvaaja, joka esittää lahjaveron riippuvuutta lahjan arvosta (so. verotettavan osuuden arvosta).

25. K10/14

Sanomalehden tilaushinta vuodeksi 2003 oli 194,26 € ja vuodeksi 2009 vastaavasti 249 €. Kuinka monen prosentin vuosittaista hinnankorotusta tämä vastaa, kun oletetaan, että prosentti on jokaisena vuonna ollut sama?

26. S09/4

Elintarvikkeiden arvonlisävero on 17 prosenttia tuotteen verottomasta hinnasta. Tapio maksoi ruokaostoksistaan 54,35 euroa. Kuinka monta euroa ostoksen hinta aleni, jos ruoan arvonlisäveroa laskettaisiin 9 prosenttiyksiköllä? Kuinka suuri olisi ostoksen hinnan alennus prosentteina?



27. S09/15

Mauri on ottanut asuntolainaa 81 600 euroa 4,2 prosentin korolla. Hän lyhentää sitä vuosittain 4 800 euroa ja maksaa samalla siihen mennessä kertyneet korot. Kuinka paljon korkoa hän maksaa toisen vuoden lopussa? Kuinka monta vuotta lainan takaisinmaksu kestää? Kuinka paljon korkoa Mauri maksaa kaiken kaikkiaan?



28. K09/8

Opintorahaa saanut opiskelija saattoi vuonna 2006 tehdä kunnallisverotuksessa ansiotulosta opintorahavähennyksen, jonka suuruus laskettiin seuraavasti: Vähennyksen enimmäismäärä oli 2 200 euroa, ja sitä pienennettiin 50 prosentilla siitä määrästä, jolla puhtaan ansiotulon määrä ylitti vähennyksen enimmäismäärän. Kuitenkin vähennys oli enintään opintorahan suuruinen. Piirrä kuvaaja, joka osoittaa vähennyksen riippuvuuden palkkatulosta, kun opintorahan suuruus on 1 500 euroa. Oletetaan, että puhdas ansiotulo muodostuu palkkatulosta ja opintorahasta. Miten suurilla palkkatuloilla vähennystä ei tässä tapauksessa enää saa?



29. K09/14

Talletustilin vuosikorko on 1,50 prosenttia, ja korkotuotosta peritään vuosittain 29 prosentin lähdevero. Tiliä avattaessa talletetaan 1 000 €, eikä muita talletuksia tehdä.

a) Kuinka paljon tilillä on rahaa kymmenen vuoden kuluttua, kun korko liitetään pääomaan vuoden välein?

b) Monenko vuoden kuluttua talletus on kaksinkertaistunut?



30. S08/4

Lentokoneen käyttökustannuksista polttoaineen osuus on 35 %. Kuinka monta prosenttia polttoaine voi kallistua, ennen kuin käyttökustannukset kasvavat 10 %? Anna vastaus promillen tarkkuudella.



31. S08/14

Isovanhemmat sitoutuivat avustamaan lastenlastensa harrastustoimintaa viiden vuoden ajan. Kuinka suuri kertasumma heidän tulee vuodenvaihteessa sijoittaa tilille, jonka korkokanta on 2,2 %, jotta he voivat jakaa lastenlapsilleen vuosittain 2 500 euroa seuraavien viiden vuoden ajan? Ensimmäinen erä maksetaan vuoden kuluttua sijoituksesta ja seuraavat neljä erää vuoden välein. Lähdevero on 28 %.



32. K08/9

Lomapaketin hinta koostui hotelli- ja matkakustannuksista. Hotellikustannukset lasivat 5 % ja matkakustannukset nousivat 18 %. Muutosten jälkeen lomapaketin hinta oli sama kuin aikaisemminkin. Kuinka monta prosenttia matkakustannukset olivat lomapaketin hinnasta ennen muutoksia?

33. K08/11

Isoisä avasi vuoden 2006 alussa lapsenlastaan varten tilin, jonka vuotuinen korkoprosentti lähdeveron vähentämisen jälkeen on 1,750, ja talletti tilille 700 euroa. Isoisä jatkaa seuraavina vuosina tallettamalla saman summan. Korko lisätään vuosittain tilin saldoon vuoden viimeisenä päivänä. Kuinka paljon tilillä on rahaa vuoden 2010 lopussa koron lisäyksen jälkeen? Muodosta ja sievennä lauseke, joka antaa tilin saldon vuoden lopussa, kun talletus on tehty n kertaa. Minkä vuoden lopussa rahaa on vähintään 12 000 euroa?



34. S07/3

Suomen sähkönkulutus vuonna 2005 oli 84,9 TWh (terawattituntia). Tästä katettiin omalla ydinvoimalla 26,3 %, muilla kotimaisilla energialähteillä 53,7 % ja tuontisähköllä loput. Olkiluodon uusi ydinvoimala lisää sähköntuotantoa 14 TWh:lla vuonna 2009. Oletetaan, että sähkönkulutus on tällöin noussut vuoden 2005 tasosta 12 %, muita muutoksia kotimaisessa energiantuotannossa ei ole tapahtunut ja tuonnilla katetaan edelleen kotimaisen tuotannon ylittävä osuus. Mikä on tällöin kotimaisen ydinvoiman ja mikä tuontisähkön suhteellinen osuus kokonaiskulutuksesta?

35. S07/14

Veljekset Matti ja Teppo ostavat yhdessä naapuriltaan Sepolta käytetyn leikkuupuimurin. He sopivat seuraavanlaisesta maksujärjestelystä: Matti maksaa heti 32 000 € ja tämän jälkeen neljä kertaa vuoden välein 900 €. Teppo maksaa heti 30 500 € ja tämän jälkeen kaksi kertaa 2 500 € vuoden välein. Mikä oli leikkuupuimurin nykyarvo, ja paljonko veljesten maksuosuudet poikkesivat toisistaan nykyarvoina laskettuina, kun laskentakorkokanta oli 1,95 %?



36. K07/4

Tuotteen myyntitulot kasvoivat edelliseen vuoteen verrattuna 5,0 % vuonna 2004 ja 3,0 % vuonna 2005. Vuonna 2003 tuotteen valmistuskustannukset olivat 91 % tavaran myyntituloista. Vuonna 2004 valmistuskustannukset olivat 7,1 % suuremmat kuin vuonna 2003, ja seuraavana vuonna ne nousivat edelleen 1,2 %. Kuinka monta prosenttia myyntitulot olivat valmistuskustannuksia suuremmat vuonna 2005?



37. K07/15

Piensijoittaja osti yhtiön osakkeita 1 200 eurolla. Ensimmäisenä vuonna osakkeiden kurssi laski 15,6 prosenttia, mutta seuraavana vuonna se nousi 8,1 prosenttia. a) Kuinka monta prosenttia osakkeiden kurssin tulisi nousta kolmantena vuonna, jotta osakkeiden arvo olisi alkuperäisen suuruinen? b) Sijoittaja arvioi, että kurssinousu kolmantena vuonna on normaalisti jakautunut keskiarvona 7,0 prosenttia ja keskihajontana 5,0 prosenttia. Mikä on todennäköisyys, että kolmannen vuoden lopussa osakkeiden arvo on vähintään alkuperäisen suuruinen?



38. S06/13

Tuotteen hintaa nostettiin p %. Huonon menekin vuoksi näin saatua hintaa laskettiin myöhemmin $2p$ %, jolloin hinta oli 5,5 % halvempi kuin ennen korotusta. Muodosta yhtälö luvun p määrittämiseksi ja ratkaise p .



39. S06/14

Henkilö osallistuu jatkuvasti lottoarvontaan täyttämällä Internetissä yhden lottorivin kymmeneksi viikoksi joka toisen kuukauden alussa. Laske, kuinka paljon henkilölle kertyisi rahaa pankkitilille, jos hän loton sijasta 40 vuoden ajan, alkaen tammi-kuun 1. päivästä, tallettaisi joka toisen kuukauden alussa 7 euroa tilille, joka kasvaa korkoa 1,5 % vuodessa. Lähdeveroa ei oteta huomioon.



40. K06/5

Suomen viennin jakauma vuonna 2003 sekä viennin määrässä vuonna 2004 tapahtuneet muutokset käyvät ilmi seuraavasta taulukosta. (Lähde: Kaupan Keskusliitto.)

Vienti toimialoittain	Jakauma vuonna 2003 (%)	Muutos vuodesta 2003 vuoteen 2004 (%)
Puu- ja paperiteollisuus	25,4	+13,6
Kemianteollisuus	8,7	+4,4
Kone- ja metalliteollisuus	25,1	-4,4
Sähkötekniinen teollisuus	24,3	+1,9
Muut	16,5	+14,6



a) Lisääntyikö vai vähenikö kokonaisvienti vuonna 2004? Kuinka monta prosenttia muutos oli? b) Esitä viennin prosentuaalinen jakauma vuonna 2004.

41. K06/14

Henkilö ottaa 120 000 euron asuntolainan. Laina sovitaan hoidettavaksi tasaerä- eli annuiteettilainana puolivuositain, ja vuotuiseksi koroksi sovitaan 3,70 %. Harkittavana on laina-ajan pituus. Laske lainan hoitomaksun eli annuiteetin suuruus, jos laina-aika on a) 22 vuotta, b) 60 vuotta. Kuinka paljon lainaa jälkimmäisessä tapauksessa olisi vielä jäljellä silloin, kun laina ensimmäisessä tapauksessa olisi tullut maksetuksi loppuun? Lainasta ei aiheudu muita kuluja.



42. S05/9

Vuonna 2002 oli maksukorttimaksujen arvo Suomessa noussut noin 2,5-kertaiseksi siitä, mitä se oli vuonna 1993. Kuinka monta prosenttia korttimaksujen arvo on noussut vuosittain, jos oletetaan kasvun eri vuosina olleen prosentuaalisesti yhtä suurta? Kuinka suuri oli korttimaksujen arvo vuosina 2002 ja 1993 euroina ilmaistuna, kun se vuonna 1995 oli 10,1 miljardia euroa?



43. S05/15

Henkilö avasi 2.5.2002 säästötilin ja talletti tilille 11 000 €. Tilin korko oli pankin primekorko vähennettynä yhdellä prosenttiyksiköllä. Primekorkoa tarkistettiin seuraavasti (tarkistuspäivä ja silloin voimaan tullut korko):

02.05.2002	3,50	02.01.2003	3,20
11.06.2002	3,75	03.03.2003	2,90
15.10.2002	3,50	24.06.2003	2,50



Korko laskettiin todellisten kalenteripäivien mukaan, ja vuoteen laskettiin 365 korkopäivää. Tarkistuspäiviltä korko laskettiin uuden koron mukaan. Korot, joista oli peritty 29 % lähdeveroa, liitettiin pääomaan vuoden lopussa ja tiliä lopetettaessa. Henkilö lopetti tilin 2.5.2003. Paljonko hän sai varat nostaessaan? Mikä oli talletuksen tuotto prosentti?

44. K05/8

Henkilön palkasta jäi ennakonpidätyksen jälkeen käteen 73 %. Vuodenvaihteessa henkilö sai 45 euron palkankorotuksen. Samanaikaisesti ennakonpidätys laski 0,8 prosenttiyksikköä. Henkilölle jäi ennakonpidätyksen jälkeen käteen nyt 49,60 euroa enemmän kuin ennen muutoksia. Mikä oli henkilön uusi ennakonpidätysprosentti, ja mikä oli hänen uusi palkkansa?



45. K05/14

Postimyyntiyritys tarjoaa mainoslehtisessään nopeaa ja vaivatonta kulutuslainaa. Lainaehtojen mukaan laina maksetaan takaisin yhtä suurin erin kunkin kuukauden lopussa, kuukausikorko on 1,9 % jäljellä olevasta velkasaldosta ja lisäksi kuukausittain peritään lisämaksua, joka on 0,4 % myönnetyn luoton määrästä. a) Määritä kuukausierän suuruus ja lainan kokonaiskustannukset, jos lainasumma on 1 200 euroa ja laina-aika yksi vuosi. b) Osoita, että lainan todellinen vuosikorko on noin 31 %, toisin sanoen yhtä suureen kuukausierään päädytään, jos kuukausittain lyhennettävän tasaerälainan korko on 31 % vuodessa. Anna vastaukset euron tarkkuudella.



46. S04/7

Metsänomistaja teetti metsätöitä urakoitsijalla ja sopi alustavasti työn hinnaksi kuitupuun osalta 14 €/m³ ja tukkipuun osalta 9,2 €/m³. Kuitupuuta kertyi 156 m³ ja tukkipuuta 89,4 m³. Alustaviin hintoihin ei sisältynyt kuitenkaan arvonnlisäveroa, vaikka metsänomistaja oli näin ymmärtänyt. Keskustelujen jälkeen osapuolet päätyivät sopimukseen, jonka mukaan urakoitsija alentaa ilmoittamiaan verottomia hintoja siten, että koko urakan osalta metsänomistajalle koitua lisämaksu tulee yhtä suureksi kuin urakoitsijan antama alennus. Kuinka paljon metsänomistaja maksoi teettämästään työstä arvonnlisäveroineen? Arvonnlisäveron suuruus on 22 % työn verottomasta hinnasta.

47.

14. Henkilö tekee säästösuunnitelman seitsemäksi vuodeksi ja tallettaa vuosittain kunkin vuoden alussa tietyn summan tilille, jolle maksetaan vuotuista korkoa 2,00 prosentin mukaan. Hän haluaa ottaa suunnitelmassaan huomioon inflaation vaikutuksen ja korottaa talletuksensa määrää keskimääräisen inflaatio-odotuksen mukaisesti aina kahdella prosentilla edellisen vuoden talletuksen määrästä. Mikä on säästösumma sen vuoden lopussa, jona seitsemäs talletus on tehty, kun ensimmäinen talletus on K euroa? Laske sovelluksena säästösumma tapauksessa $K = 500$ €. Lähdevero on 29 %.

48. K04/8

8. Opiskelija on opintojensa alussa tehnyt lainasopimuksen, jonka mukaan hän nostaa jokaisen opiskeluvuoden alussa opintolainaa 4 000 €. Vuotuinen lainakorko on 4 %, mutta opiskeluaikana ei korkoa eikä lyhennyksiä tarvitse maksaa, vaan kertynyt korko liitetään jokaisen opiskeluvuoden lopussa lainapääomaan. Laske sopivan summalausekkeen avulla, paljonko opiskelijalla on velkaa, kun hän 12 vuoden opintojen jälkeen lopulta valmistuu.

49. K04/15

15. Henkilö otti vuoden 2003 alussa 40 000 euron asuntolainan 10 vuodeksi. Hän maksaa lainan ja korot yhtä suurena vuotuisena eränä aina vuoden lopussa, ts. kyseessä on tasaerälaina. Mikä on erän suuruus, jos korko on neljä prosenttia? Lainasopimuksen mukaan koron noustessa erän suuruus ei muutu (mahdollisesti pienemmäksi jäävää viimeistä erää lukuun ottamatta), vaan laina-aikaa pidennetään nousua vastaavasti. Minkä vuoden lopussa henkilö maksaa viimeisen erän, jos korko nousee viiden vuoden kuluttua kuuteen prosenttiin eikä tämän jälkeen muutu? Mikä on viimeisen erän suuruus?

50. S03/8

8. Tilille sijoitettiin ensimmäisen vuoden alussa 5 000 € ja toisen vuoden alussa 4 500 €. Kolmannen vuoden alkaessa tilin saldo oli 9 894,85 €. Mikä on tilin korkokanta, kun korko lisättiin pääomaan vuosittain vuoden lopussa ja koroista perittiin vuosittain lähdeveroa 29 %? Tilillä ei kyseisenä aikana ollut muita tilitapahtumia.

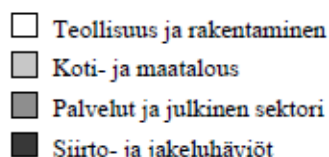
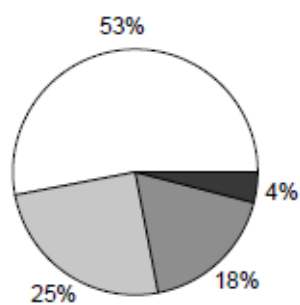
51. S03/14

14. Rahastosäästäjä ostaa osakerahaston osuuksia tai niiden osia 100 eurolla joka kuukausi. Ensimmäisellä ostokerralla yhden rahasto-osuuden arvo on 20 €. Oletetaan, että kurssi laskee tästä 2 eurolla joka kuukausi, kunnes saavuttaa pohjalukeman 8 €. Tämän jälkeen kurssi alkaa toipua ja nousee 2 eurolla joka kuukausi, kunnes se on saavuttanut lähtöarvonsa 20 €, jolloin säästäjä tekee viimeisen ostonsa. Selvitä säästäjän osakesalkun arvo periodin lopussa. Kuinka monta prosenttia suurempi tämä on, kuin jos hän olisi sijoittanut periodin alussa yhdellä kertaa koko sijoittamansa summan? Sijoittamisesta koituvia kuluja (ja mahdollisia osinkoja) ei oteta huomioon.

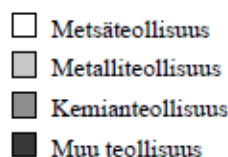
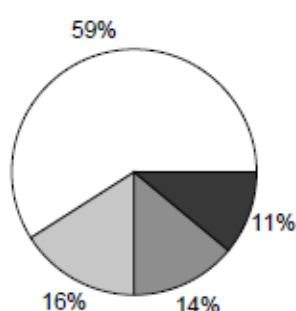
52. K03/2

2. Sähkönkulutuksen jakauma vuonna 2001 käy ilmi alla olevista diagrammeista. Palveluiden ja julkisen sektorin kulutus oli 14 717 GWh. (Lähde: Ympäristötilasto 2002.) Kuinka suuri oli metalliteollisuuden sähkönkulutus kyseisenä vuonna?

SÄHKÖN KULUTUS SEKTOREITTAIN



SÄHKÖN KULUTUS TEOLLISUUDEN JA RAKENTAMISEN SEKTORILLA



53.

12. Vuoden 2002 tammikuun alussa talletetaan tietty summa tilille, jolle maksetaan vuotuista korkoa 2,54 %, ja tasan vuoden kuluttua samansuuruinen summa toiselle tilille, jonka korkoprosentti on 3,25. Varat on tarkoitus nostaa tileiltä, kun talletukset ovat kasvaneet yhtä suuriksi. Arvioi kuukauden tarkkuudella, milloin tämä tapahtuu. Sovella koronkoronlaskuperiaatetta, muodosta yhtälö ja ratkaise se. Lähdeveroa ei oteta huomioon.

54.

14. Piensijoittaja osti vuoden alussa erään yhtiön osakkeita. Osake menetti kuitenkin lyhyessä ajassa viidenneksen vuoden alun arvostaan. Tämän jälkeen osakkeen kurssi kääntyi hitaaseen nousuun ja nousi vuoden loppuun mennessä alimmalta tasoltaan 7,0 %. a) Kuinka monta prosenttia osakkeiden arvo oli muuttunut vuoden alusta vuoden loppuun mennessä? b) Mihin hintaan piensijoittaja oli osakkeet ostanut, kun hän myi ne vuoden lopussa ja laski menettäneensä 900 €? c) Kuinka monta prosenttia osakekurssin olisi tullut edelleen nousta, jotta se olisi saavuttanut alkuperäisen tasonsa? Pörssin välityspalkkioita tms. ei laskussa oteta huomioon.

12. Yo Mab8

1. K17/11 (järjettömän vaikea)

Maakellarin sisälämpötila vaihtelee hitaasti vuodenaikojen mukaan. Alin lämpötila 2°C saavutetaan helmi-maaliskuun vaihteessa, ja ylin lämpötila 8°C saavutetaan elo-syyskuun vaihteessa. Oletetaan, että lämpötilan vaihtelua voidaan kuvata sinikäyrällä. Määritä sel-laiset parametrien A , B , c ja t_0 arvot, että lämpötila T saadaan kaavalla

$$T = A + B \sin(c(t + t_0)),$$

kun ajan t yksikkönä on kuukausi. Tehtävässä kaikki kuukaudet voidaan olettaa yhtä pitkiksi.



2. K16/11

- a) Määritellään funktio $f(x) = \cos(x) + 1$. Määritä funktion suurin ja pienin arvo.
- b) Määritellään funktio $g(x) = A \sin(x) + B$, missä $A, B > 0$ ovat vakioita. Mitä kaikkia arvoja tämä funktio voi saada?



3. S15/15

- . Aino ja Mikko ovat maailmanpyörän kyydissä. Korin korkeus y merenpinnan tasosta mitattuna on

$$y = 17 \sin\left(\frac{\pi t}{25}\right) + 55 \text{ metriä},$$

kun ajan t yksikkönä on sekunti ja kulma ilmaistaan radiaaneina.

- a) Laske korin suurin ja pienin korkeus sekä maailmanpyörän halkaisija.
- b) Kuinka monen sekunnin kuluttua kori saavuttaa ensimmäisen kerran maksimikorkeutensa hetken $t = 0$ jälkeen?
- c) Kuinka monen sekunnin kuluttua kori on ensimmäisen kerran hetken $t = 0$ jälkeen 45 metrin korkeudella merenpinnan tasosta? Voit ratkaista tämän kohdan joko graafisesti kuvaajan avulla, kun $0 \leq t \leq 50$ sekuntia, tai laskemalla lausekkeiden avulla.



<www.panoramio.com>. Luettu 20.2.2014.



4. K15/15

- a) Suorakulmion kolme kärkeä ovat origossa, pisteessä $(2,1)$ ja pisteessä $(2,-4)$. Määritä neljännen kärjen koordinaatit.
- b) Määritä a-kohdan suorakulmion pinta-ala.
- c) Yhdysjanat origosta pisteisiin $(1,2,1)$, $(1,-1,1)$ ja $(2,0,-2)$ muodostavat suorakulmaisen särmiön kolme särmää. Mihin pisteeseen päättyy origosta alkava särmiön avaruuslävistäjä?



5. S14/15

Jonna ampuu uudenvuodenraketin katolta koordinaatiston pisteestä $(20,10,5)$ vektorin $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ suuntaan. Raketti lentää suoraviivaisesti 105 metriä, kunnes se räjähtää. Koordinaatiston yksikkönä on metri.

- a) Missä pisteessä raketti räjähtää?
- b) Kuinka kaukana koordinaatiston origossa seisovista katsojista räjähdyspiste on?

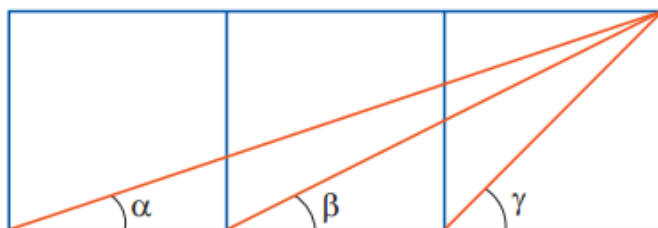


6. K14/15

- a) Ratkaise yhtälö $\tan \gamma = 1$, kun $0^\circ \leq \gamma \leq 360^\circ$.
- b) Oheisessa kuvassa on vierekkäin kolme neliötä, joiden sivun pituus on 1. Lisäksi kuvioon on merkitty kulmat α , β ja γ . Laske $\tan(\alpha + \beta)$ käyttämällä tangentin yhteenlaskukaavaa

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

ja perustele yhtälö $\alpha + \beta = \gamma$.



7. S13/15

Olkoot $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ja $\vec{b} = \vec{j} - 2\vec{k}$.

a) Laske $2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$.

b) Laske $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2$.



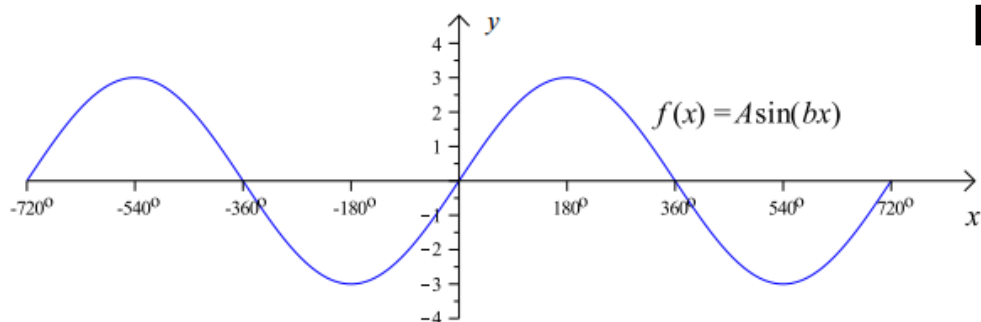
8. K13/15

15. Alla on funktion $f(x) = A \sin(bx)$ kuvaaja välillä $x \in [-720^\circ, 720^\circ]$. Määritä kuvaajan perusteella

a) vakion A arvo

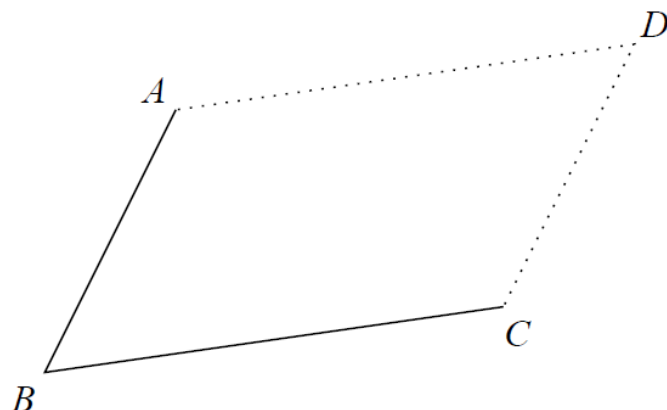
b) vakion b arvo

c) funktion f lyhin jakso L , jolle pätee $L > 0$ ja $f(x+L) = f(x)$ kaikilla x .



9. S12/15

Paikkavektorit $\vec{OA} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{OB} = 6\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$ ja $\vec{OC} = 7\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k}$ määrittävät suunnikkaan kolme kärkipistettä A , B ja C . Määritä neljännen kärjen D paikkavektori $\vec{OD}$ sekä suunnikkaan lävistäjävektorit $\vec{AC}$ ja $\vec{BD}$.



10. K12/15

a) Määritä yhtälön

$$\sin(2x + 4^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ratkaisut välillä $x \in [0^\circ, 90^\circ]$.

b) Määritä a-kohdan yhtälön kaikki ratkaisut.



11. S11/15

Kulma x on välillä $[0^\circ, 360^\circ]$. Ratkaise asteen tarkkuudella seuraavat yhtälöt:

a) $\sin x = \frac{1}{3}$, b) $\cos x = \frac{1}{4}$, c) $\tan x = \frac{1}{5}$.



12. K11/15

Laske avaruuden kulman $\sphericalangle BAC$ suuruus asteen tarkkuudella, kun $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 5, 6)$ ja $C = (9, 8, 7)$.

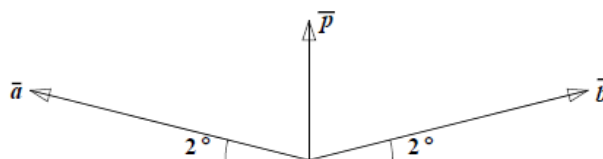


13. K10/15

Pystysuora vektori $\vec{p} = 5\vec{j}$ esitetään kahden vektorin

$$\vec{a} = -x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{ja} \quad \vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

summana. Miten on x ja y valittava, kun vaatimuksena on, että sekä vektorin $\vec{a}$ että vektorin $\vec{b}$ kulma x -akseliin nähden on 2° ?



14. S09/14

Ratkaise yhtälö $\cos 3\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mitkä ratkaisuista ovat välillä $[180^\circ, 360^\circ]$?



15. K09/15

Olkoon $\vec{a} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

a) Laske $\vec{b} - \vec{a}$.

b) Piirrä vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{b} - \vec{a}$ koordinaatistoon siten, että niiden alkupiste on origossa.

c) Määritä vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma.



16. S08/15

B) Kuminauhaan ripustettu paino saatetaan heilahtelemaan pystysuoraan. Sen poikkeamaa tasapainoasemasta mallintaa tällöin muotoa $A \sin(bt)$ oleva funktio, missä t on aika sekunteina. Piirrä funktion kuvaaja, kun $A = 1$ ja $b = 2$. Mikä arvo kertoimella b on, jos kahden peräkkäisen alimmassa asemassa käynnin välillä kuluu 3,2 sekuntia? Anna vastaus viiden desimaalin tarkkuudella.

17. K08/15

кеңжаа.

B) Suunnikkaan $ABCD$ kärki A on pisteessä $(-3, 7)$ ja sen pisteestä A lähtevinä sivuina ovat vektorit $\vec{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{AD} = \vec{i} + 5\vec{j}$. Määritä pisteiden B , C ja D paikkavektorit. Kuinka suuri on lävistäjävektoreiden $\vec{AC}$ ja $\vec{DB}$ välinen kulma? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.



18. S07/15

B) Laske vektoreiden $\vec{a} = 2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$ ja $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ pituudet ja suuntakulmat x -akseliin nähden. Laske myös vektoreiden summa $\vec{a} + \vec{b}$ ja erotus $\vec{a} - \vec{b}$.

