

YO-tehtäviä kurseittain	4
1. Lausekkeet ja yhtälöt (MAB1)	4
2. Geometria (MAB2)	10
3. Matemaattisia malleja I (MAB3)	15
4. Matemaattinen analyysi (MAB4)	19
5. Tilastot ja todennäköisyys (MAB5)	24
6. Matemaattisia malleja II (MAB6)	31
7. Talousmatematiikka (MAB7)	34
8. Matemaattisia malleja III (MAB8)	40

YO-tehtäviä kursseittain (2005-2011)

1. Lausekkeet ja yhtälöt (MAB1)

KESKEISET SISÄLLÖT (s.5-18, s.29-36)

- suureiden välinen lineaarinen riippuvuus ja verrannollisuus
- ongelmien muotoileminen yhtälöiksi
- yhtälöiden graafinen ja algebrallinen ratkaiseminen
- ratkaisujen tulkinta ja arvioiminen
- toisen asteen polynomifunktio ja toisen asteen yhtälön ratkaiseminen

K2005/T1

1. Ratkaise a) yhtälö $3x + 2 = x - 4(5x - 1)$, b) yhtälö $\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = x + 1$.

K2006/T1

1. Ratkaise yhtälöt a) $20x^2 - 49x + 9 = 0$, b) $\frac{x}{3} + \frac{4}{6} = \frac{x}{2}$.

K2006/T2

2. Sievennä lausekkeet

a) $\frac{x^2}{3x} + \frac{2(1-x)}{6}$, b) $\frac{(x+2)(x-2)}{x^2-4}$, c) $\frac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7}$.

K2007/T1

1. a) Ratkaise yhtälö $\frac{3}{4}(x - \frac{1}{12}) = \frac{1}{3}(\frac{3}{4}x - \frac{1}{5})$.
 b) Ratkaise yhtälö $7x(3 + 7x) - 4 = 0$.
 c) Mikä on lausekkeen $\frac{a(a-1)}{x} + ax$ arvo, kun $x = a - 1$?

K2007/T4

4. Tuotteen myyntitulot kasvoivat edelliseen vuoteen verrattuna 5,0 % vuonna 2004 ja 3,0 % vuonna 2005. Vuonna 2003 tuotteen valmistuskustannukset olivat 91 % tavarahan myyntituloista. Vuonna 2004 valmistuskustannukset olivat 7,1 % suuremmat kuin vuonna 2003, ja seuraavana vuonna ne nousivat edelleen 1,2 %. Kuinka monta prosenttia myyntitulot olivat valmistuskustannuksia suuremmat vuonna 2005?

K2007/T9

9. Täyttäessään 20 vuotta Laura oli 25 prosenttia vanhempi kuin sisarensa Veera. Kuinka monta prosenttia sisartaan vanhempi Laura on täyttäessään 30 vuotta?

K2008/T1

1. a) Ratkaise yhtälö $2x + 1 = x^2 + 2x$.
 b) Ratkaise yhtälöryhmä $2x + y = 1, x - y = 0$.
 c) Kumpi luvuista $\frac{5}{7}$ ja $\frac{6}{9}$ on suurempi? Perustele ratkaisusi likiarvoja käyttämättä esimerkiksi muodostamalla lukujen erotus.

K2008/T2ac

2. a) Ratkaise yhtälö $5x - (1 - x) = 13x$.
 c) Sievennä lauseke $\frac{a + 3}{a} : \frac{3a + 9}{2a}$.

K2008/T6

6. Äänilähteen tuottaman äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen äänilähteen etäisyyden neliöön. Festareilla Miisa istui aluksi 50 metrin päässä orkesterista, mutta siirtyi sitten 15 metrin päähän orkesterista. Kuinka monta prosenttia kasvoi äänen intensiteetti?

K2008/T9

9. Lomapaketin hinta koostui hotelli- ja matkakustannuksista. Hotellikustannukset laskevat 5 % ja matkakustannukset nousivat 18 %. Muutosten jälkeen lomapaketin hinta oli sama kuin aikaisemminkin. Kuinka monta prosenttia matkakustannukset olivat lomapaketin hinnasta ennen muutoksia?

K2009/T1ab

1. a) Muodosta polynomien $-x^2 + 2x$ ja $2x^2 - 3x + 1$ summa ja tulo.
b) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = x - 1$.

K2009/T2c

- c) Laske lausekkeen $\frac{2x-1}{x+1}$ arvo, kun $x = \frac{5}{8}$.

S2008/T3b

- b) Suureet x ja y ovat kääntäen verrannolliset. Jos $x = 2$, niin $y = 3$. Mikä on y :n arvo, kun $x = 5$?

K2010/T1ab

1. a) Ratkaise yhtälö $\frac{1}{2}(3x - 2) = \frac{1}{3}(2x + 3)$.
b) Ratkaise yhtälö $(x + 2)(x - 2) = 5$.

K2010/T4

4. Kuinka monta litraa 12-prosenttista suolaliuosta on lisättävä kolmeen litraan 5-prosenttista suolaliuosta, jotta saadaan 8-prosenttinen suolaliuos?

K2011/T1

1. a) Ratkaise yhtälö $4x + (5x - 4) = 12 + 3x$.
b) Sievennä lauseke $x^2 + x - (x^2 - x)$ ja laske sen arvo, kun $x = \frac{1}{2}$.

K2011/T3

3. a) Määritä sellainen vakio a , että $x = 2$ toteuttaa yhtälön $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$.
b) Positiivinen luku a kasvaa 20 % ja pienenee tämän jälkeen 17 %. Onko tulos suurempi vai pienempi kuin alkuperäinen luku a ? Kuinka monta prosenttia alkuperäisestä luvusta muutos on?

S2005/T1

1. a) Ratkaise yhtälö $(3x - 2)(3x + 5) = 0$. b) Mikä on lausekkeen $\frac{a^2 - c^2}{b - c}$ arvo, kun $a = 1$, $b = -2$ ja $c = -\frac{1}{2}$?

S2005/T3

3. Boolin valmistukseen käytettiin 0,4 litraa marjamehua, puoli litraa vodkaa ja 1,5 litraa soodavettä. Vodkan alkoholipitoisuus on 38 tilavuusprosenttia. Paljonko boolissa oli alkoholia a) litroina, b) tilavuusprosentteina?

S2005/T8

8. Nikon autosta on bensiini loppunut, ja hän on lähtenyt kävelemään tietä pitkin noustaakseen bensiiniä lähimmältä huoltoasemalta. Kun hän on kävellyt 46 minuuttia, hänen ohitseen ajaa polkupyörällä Jasmine, joka kertoo käyvänsä huoltoasemalla ja lupaa samalla tuoda Nikolle kanisterissa bensiiniä. Niko kääntyy kävelemään takaisin autolle. Kun hän on kävellyt 38 minuuttia, Jasmine tuo hänelle bensiinkanisterin. Bensiinin osto huoltoasemalla oli kestänyt 7 minuuttia. Kuinka kaukana huoltoasema oli Nikon pysähtyneestä autosta, kun Niko kävelee 5 km tunnissa ja Jasmine pyöräilee 15 km tunnissa? Anna vastaus 100 metrin tarkkuudella.

K2006/T4

4. Kappaleen paino on kääntäen verrannollinen maapallon keskipisteestä mitatun etäisyyden neliöön. Lentokone painaa maan pinnalla 56,0 tonnia. Kuinka paljon se painaa kymmenen kilometrin korkeudessa? Maan pinnan etäisyys keskipisteestä on 6370 kilometriä.

S2006/T3

3. Kuinka paljon 2-prosenttista desinfektioliuosta tarvitaan, jotta siitä laimennettuna saadaan 500 ml 0,35-prosenttista desinfektioliuosta?

S2006/T6

6. Talon lämmityskustannukset pakkasella ovat suoraan verrannolliset sisä- ja ulkolämpötilojen väliseen erotukseen. Ulkolämpötilan ollessa $-2,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ja sisälämpötilan $22,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ sisälämpötila pudotetaan $21,0\text{ }^{\circ}\text{C}$:seen. Kuinka monella prosentilla talon lämmityskustannukset tällöin pienenevät?

S2006/T13

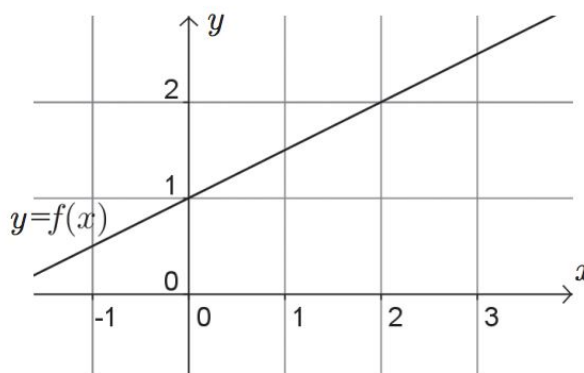
13. Tuotteen hintaa nostettiin $p\%$. Huonon menekin vuoksi näin saatua hintaa laskettiin myöhemmin $2p\%$, jolloin hinta oli $5,5\%$ halvempi kuin ennen korotusta. Muodosta yhtälö luvun p määrittämiseksi ja ratkaise p .

S2007/T5

5. Henkilö osti 150 gramman erän maustettua teetä 3,30 eurolla ja halvempaa mustaa teetä, jonka hinta oli 5,50 €/kg. Kuinka monta grammaa mustaa teetä tulisi maustetee-erään lisätä, jotta sekoituksen kilohinta olisi puolet maustetun teen kilohinnasta?

S2016/A4

4. a) Ratkaise yhtälö $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$.
 b) Ratkaise yhtälö $[f(x)]^2 - \frac{5}{2}f(x) + 1 = 0$, missä $f(x)$ on kuvion funktio.



S2016/A3

3. Mitkä väitteet A–F ja kaavat 1–6 liittyvät toisiinsa? Merkitse vastauksesi alimpaan taulukkoon.

	Sanallinen muoto
A	Luku b on 50 % suurempi kuin luku a .
B	Luku a on neljäsosa luvusta b .
C	Luku b on puolet luvusta a .
D	Luku b on 25 % suurempi kuin luku a .
E	Luku b on kaksinkertainen lukuun a verrattuna.
F	Luku a on nelinkertainen lukuun b verrattuna.

	Kaava
1	$b = 2a$
2	$b = 0,5a$
3	$b = 1,5a$
4	$b = \frac{1}{4}a$
5	$b = 4a$
6	$b = \frac{5}{4}a$

Sanallinen muoto	A	B	C	D	E	F
Kaavan numero						

K2016/A3

3. Täydennä oikeiden vaihtoehtojen numerot alempaan taulukkoon.

		1	2	3
A	Lausekkeen $1,1^3$ arvo on	1,13	3,3	1,331
B	Tilavuus $0,5 \text{ m}^3$ on sama kuin	50 l	500 l	5 000 l
C	Luvuista $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$ ja $\frac{16}{21}$ suurin on	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{16}{21}$
D	Luvun $-a + b$ vastaluku on	$b - a$	$a - b$	$-a - b$
E	Yhtälön $x^2 - 3x + 1 = 0$ juurten summa on	3	4	5
F	Tuotteen hinta nousee ensin 10 % ja laskee sitten 10 %, joten lopullinen hinta on ... alkuperäisestä hinnasta.	99 %	100 %	101 %

Kohta	A	B	C	D	E	F
Vaihtoehtojen numero						

K2016/A-osa T2

2. a) Onko epäyhtälö $\sqrt{7} < 3$ tosi? Perustele.
 b) Ratkaise epäyhtälö $-x^2 + 3(x - 2) + 9 > 3(x - 2) + 2x^2$.
 c) Jussi laskee päässä kertolaskun seuraavasti: $27 \cdot 31 = 20 \cdot 30 + 7 \cdot 30 + 20 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 600 + 210 + 20 + 7 = 837$. Onko Jussin päättely oikein? Perustele.

S2016/B-osa T5

5. Pöytäliinan alkuperäinen koko on 2 m kertaa 4 m. Se kutistuu pesussa 5 % sekä pituutta että leveyssuunnassa. Kuinka monella prosentilla pöytäliinan pinta-ala pienenee?

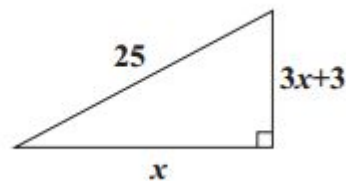
2. Geometria (MAB2)

KESKEISET SISÄLLÖT (s.37-53)

- kuvioiden yhdenmuotoisuus
- suorakulmaisen kolmion trigonometria
- Pythagoraan lause
- kuvioiden ja kappaleiden pinta-alan ja tilavuuden määrittäminen
- geometrian menetelmien käyttö koordinaatistossa

K2005/T2

2. Muodosta yhtälö oheisen suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien välille ja ratkaise tämän avulla kolmion kateettien pituudet.



K2005/T5

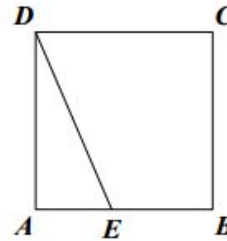
5. Henkilö ostaa 10 000 eurolla itse metsään merkitsemänsä tontin, jota hän luulee neliönmuotoiseksi ja yhden hehtaarin suuruiseksi. Kaupanteon jälkeen selviää, että tontti on neljäkäs, jonka sivun pituus on 98,5 m ja yksi kulma 81° . Määritä tontin pinta-ala hehtaareina sekä tontin neliömetrihinta euroina.

K2005/T6

6. Kesämökin kalliolle porataan kaivoa. Pyöreän porausreiän halkaisija on 140 mm ja syvyys 57,2 m. Reiästä porattu kiviaines levitetään tasapaksuna kerroksena suora-
viivaisesti kulkeville mökkipoluille, joiden leveys on 45 cm ja yhteispituus 72,5 m. Kuinka paksu kerros syntyy? Oletetaan, että kiviaineksen tilavuus on sama kuin porausreiän tilavuus.

K2006/T3

3. Neliön $ABCD$ sivulla AB on sellainen piste E , että $AE = 1$ ja $ED = 3$. Laske neliön a) sivun pituus, b) pinta-ala, c) lävistäjän pituus. Anna vastaukset tarkkoina arvoina.



K2007/T2a

2. a) Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 1 ja 3. Määritä kolmion terävien kulmien suuruudet 0,01 asteen tarkkuudella.

K2007/T7

7. Lentokone lähestyy Oulunsalon kenttää kolmen asteen kulmassa maahan nähden. Kiitoradan pituus on 2,5 km, ja kone koskettaa kiitorataa 300 metrin päässä sen alkupäästä. Kuinka kaukana kiitoradan alkupäästä (vaakasuoraan ajateltuna) kone oli 500 jalan korkeudessa (1 jalka = 0,3048 m)? Kuinka kauan tästä kului maakeskukseen, jos lentokoneen lähestymisnopeus ilman suhteen oli 270 km/h? Oletetaan, että sää oli tyyni.

K2007/T13

13. Polkupyörän digitaalinen mittari näyttää kuljetun matkan ja ajonopeuden, kun siihen on syötetty etupyörän ulkokehän pituus. Mittari määrittää matkan kertomalla ulkokehän pituuden etupyörän pyörähdysten lukumäärällä ja nopeuden jakamalla ulkokehän pituuden pyörähdysajalla. Anteron pyörässä renkaan ulkokehän halkaisija on 26,0 tuumaa (1 tuuma = 25,40 mm). a) Laske renkaan kehän pituus millimetrin tarkkuudella. b) Antero mittaa renkaan ulkokehän pituuden mittanauhalla ja saa pituudeksi 209,5 cm. Kun tämä virheellinen arvo syötetään mittariin, kuinka pitkäksi mittari mittaa 20,0 kilometrin matkan? Jos nopeusmittari näyttää tasan 30 km/h, mikä on polkupyörän todellinen nopeus?

K2008/T3

3. a) Laskettelurinteen kaltevuuskulma on $7,0$ astetta ja rinteen korkeusero 180 metriä. Kuinka pitkä rinne on? Kuinka kauan kestää hiihtohissillä matka rinnettä pitkin alhaalta ylös, kun hiihtohissin nopeus on 6 km/h?
- b) Suora kulkee pisteiden $(1,0)$ ja $(3,3)$ kautta. Kuinka suuren kulman se muodostaa x -akselin positiivisen suunnan kanssa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

K2008/T4

4. Kumiputken ulkohalkaisija on 53 mm ja seinämän paksuus 4 mm. Kuinka pitkä putken on oltava, jotta putkeen mahtuisi $3,0$ litraa vettä?

K2008/T12

12. Taiteilija suunnittelee taideteoksen, joka koostuu suoran ympyrälieriön muotoisesta vesialtaasta sekä siihen sijoitetusta kivikuutiosta, jonka pohjaneliö lepää altaan vaakasuoralla pohjalla. Tilasyistä altaan halkaisijaksi valitaan $3,5$ metriä, mutta altaan syvyyden ja kuution koon taiteilija saa valita vapaasti. Hän haluaa kuution ylätahkon olevan samassa tasossa kuin vedenpinta. Vettä altaassa pitää olla mahdollisimman paljon. Mikä on veden syvyys näillä ehdoilla? Anna vastaus desimetrin tarkkuudella.

K2009/T6

6. Kuparipallon ympärysmitta on $64,2$ cm ja massa $37,9$ kg. Tutki, onko pallon sisällä tyhjää tilaa. Kuparin tiheys on $8,96$ g/cm³.

K2009/T7

7. Neljäkkään (vinoneliön) sivun pituus on $8,0$ cm. Lyhyempi lävistäjistä on $4,0$ cm pitkä. Laske pitemmän lävistäjän pituus.

K2010/T2a

2. a) Neliön pinta-ala on $1,20$ m². Laske neliön lävistäjän pituus senttimetrin tarkkuudella.

K2010/T7

7. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat $3,2$ cm ja $5,7$ cm. Laske hypotenuusan pituus ja suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta.

K2010/T10

10. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 2 ja 3. Kolmio pyörähtää täyden kierroksen lyhyemmän kateettinsa ympäri, jolloin syntyy avaruuskappale. Piirrä kappaleen kuva ja laske sen tilavuus.

K2011/T2a

2. a) Suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus on 2 ja hypotenuusan pituus 5. Laske kolmion terävien kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.

K2011/T4

4. Muinaiset egyptiläiset laskivat ympyrän pinta-alan sellaisen neliön alana, jonka sivun pituus on $\frac{8}{9}$ ympyrän halkaisijasta.
- a) Laske tällä säännöllä ympyrän ala, kun sen halkaisija on 5.
- b) Onko edellä saatu ala liian suuri vai liian pieni? Kuinka suuri virhe on prosentteina? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

K2011/T6

6. A4-kokoisen kartan mittakaava on 1:20 000. Kartta pienennetään kopiokoneella A5-kokoiseksi, jolloin sen pinta-ala pienenee puoleen, mutta muoto säilyy. Mikä on pienennetyn kartan mittakaava?

S2008/T2b

- b) Pallon tilavuus on 1000 m^3 . Laske pallon säde kolmen numeron tarkkuudella.

S2008/T9

9. Helsingin Pasilassa sijaitsee linkkitorni, jonka korkeus meren pinnasta mitattuna on 146 metriä. Kuinka korkealta paikalta Tallinnasta tornin huippu on mahdollista nähdä, kun Helsingin ja Tallinnan välinen etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna on 85 km? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.

.. ..

S2010/T2ab

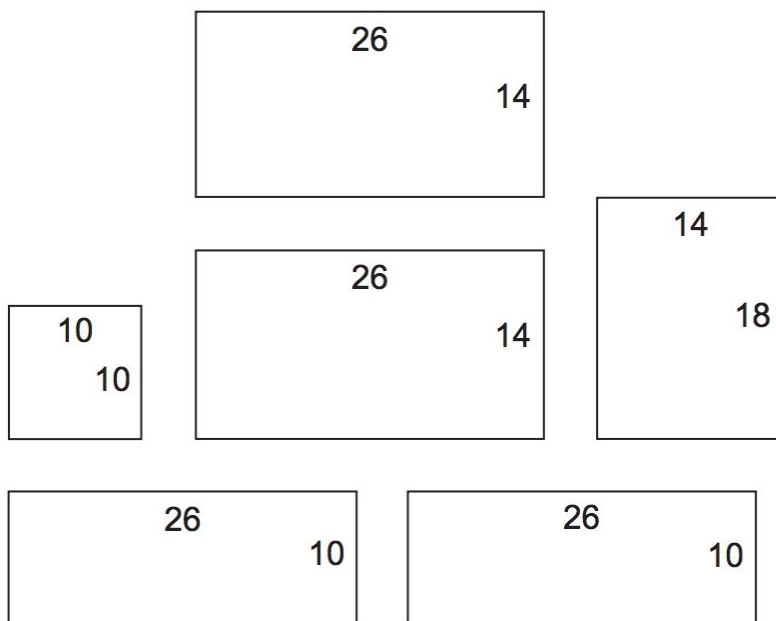
2. a) Ympyrän kehän pituus on 10,25 m. Määritä ympyrän pinta-ala 0,01 neliömetrin tarkkuudella.
- b) Suorakulmaisessa kolmiossa toisen terävän kulman sini on 0,123. Laske kolmion terävät kulmat asteen tarkkuudella.

S2010/T10

10. Suoran ympyräkartion korkeus on sama kuin sen pohjan halkaisija, kumpikin suuruudeltaan = 1. Kartion sisään asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa ja pohjaa. Kuinka monta prosenttia pallon tilavuus on ympyräkartion tilavuudesta? Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella.

K2016/B1-osa 5

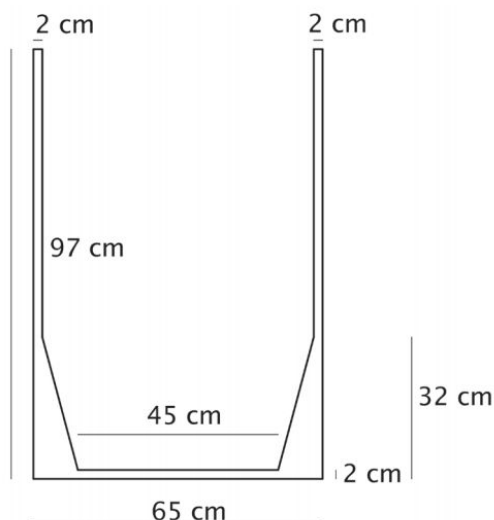
6. Peppi rakentaa oheisen kuvan mukaisista laudankappaleista linnunpönttö. Yksikkönä on senttimetri.
- a) Paljonko linnunpönttö painaa? Sisääntuloaukkoa ei tarvitse huomioida eikä käytettäviä nauloja. Laudan tiheys on 550 kg/m^3 ja paksuus 2,0 cm.
- b) Mikä on linnunpönttöön sisätilavuus?



<www.bing.com>. Luettu 18.11.2015.

S2016/B1-osa T6

6. Tommi ostaa uuden kompostikäymälän, jonka sisäosa on pyörähdyskappale, jolla on kuvan mukainen poikkileikkaus. Laske kompostikäymälän säiliön sisätilavuus.



<<http://sauna.net>>.
Luettu 28.4.2015.

3. Matemaattisia malleja I (MAB3)

KESKEISET SISÄLLÖT (s.58-63, s.65-71)

- lineaarisen ja eksponentiaalisen mallin soveltaminen
- potenssiyhtälön ratkaiseminen
- eksponenttiyhtälön ratkaiseminen logaritmin avulla

K2005/T4

4. Potilas, joka painaa 75 kg, saa lääkettä tiputuksena verisuoneen. Annostus riippuu henkilön painosta siten, että annostusnopeuden on oltava 10 mikrogrammaa minuutissa henkilön jokaista painokiloa kohti. Lääke annetaan laimennettuna tiputusliuoksena; 1 ml kyseistä liuosta sisältää 500 mikrogrammaa lääkeainetta. a) Kuinka monta millilitraa tiputusliuosta minuutissa potilaalle tällöin annetaan? b) Kuinka kauan kestää 465 ml:n liuoksen tiputus?

K2005/T13

13. Maanjäristyksessä vapautuvan seismisen energian E ja Richterin asteikon lukeman M välillä on yhteys $\log_{10} E = 11,8 + 1,5M$. Rakennus on mitoitettu kestävään järjestys, jossa vapautuva seisminen energia on 50 % suurempi kuin seisminen energia järjestyksessä, jonka voimakkuus Richterin asteikolla on 6,8. Kuinka voimakkaan järistyksen rakennus kestää Richterin asteikolla mitattuna?

K2006/T8

8. Tehtaan on vähennettävä vesistöön joutuvia päästöjä yhteensä 20 prosenttia seuraavien neljän vuoden aikana. a) Kuinka monta prosenttia on asetettava vuotuisiksi tavoitteeksi, kun halutaan, että suhteellinen vähennys on sama kaikkina vuosina? b) Jos samaa vuotuista tavoitetta noudatetaan edelleen, kuinka monen vuoden kuluessa päästöt on saatu vähenemään alle puoleen alkuperäisestä määrästä?

K2007/T5

5. a) Määritä pisteiden $(1, 2)$ ja $(4, 3)$ kautta kulkevan suoran yhtälö muodossa $y = kx + b$. b) Onko piste $(120, 40)$ tällä suoralla?

K2007/T6

6. a) Millä x :n arvolla on $2^x = 1$? b) Ratkaise yhtälö $2^{x^2-2} = 1$.

K2007/T11

11. Verenpainelääkettä otetaan aamuisin kerta-annoksena 60 mg. Vuorokaudessa lääkettä häviää elimistöstä 35 prosenttia. a) Laske, paljonko lääkettä on elimistössä välittömästi toisen ja viidennen lääkkeenottokerran jälkeen. b) Laske, paljonko lääkettä on elimistössä välittömästi n :nnen lääkkeenottokerran jälkeen. c) Tutki (esimerkiksi laskinta käyttäen), mitä arvoa tämä lääkkeen määrä näyttää lähestyvän lääkkeenottokertojen määrän n kasvaessa.

K2009/T3a

3. a) Suoran kulmakerroin on $-\frac{1}{3}$, ja suora kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta. Esitä suoran yhtälö muodossa $y = kx + b$.

K2010/T2b

- b) Mille positiiviselle luvulle x pätee $x^4 = 17$? Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.

K2010/T14

14. Sanomalehden tilaushinta vuodeksi 2003 oli 194,26 € ja vuodeksi 2009 vastaavasti 249 €. Kuinka monen prosentin vuosittaista hinnankorotusta tämä vastaa, kun oletetaan, että prosentti on jokaisena vuonna ollut sama?

K2011/T2bc

b) Sievennä lauseke $(\sqrt{x} - 1)^2 + 2\sqrt{x}$.

c) Laske $|x - y|$, kun $x = 2$ ja $y = 5$.

K2011/T11

11. Radioaktiivisen näytteen aktiivisuudeksi mitattiin 25,0 kBq ja viisi vuorokautta myöhemmin 16,2 kBq. Laske puoliintumisaika ja näytteen aktiivisuus kymmenen vuorokautta ennen ensimmäistä mittausta. Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti, ja puoliintumisaika on aika, jonka kuluessa aktiivisuus vähenee puoleen.

S2006/T2

2. Olkoon annettuna kaksi pistettä: $A = (2, 6)$ ja $B = (1, -1)$. Määritä a) pisteiden A ja B määrittämän suoran yhtälö, b) janan AB pituus, c) janan AB keskipisteen koordinaatit.

S2006/T12

12. Radioaktiivisen aineen määrän havaittiin vuodessa vähentyneen 0,043 %. Määritä aineen puoliintumisaika.

S2008/T2ac

2. a) Suora kulkee pisteiden $(-2, 0)$ ja $(1, 7)$ kautta. Muodosta sen yhtälö muodossa $y = ax + b$.

c) Ratkaise yhtälö $2^x = 1024$.

S2009/T7

7. Vuonna 1990 Helsingissä oli 492 400 asukasta. Vuonna 2000 asukkaita oli 555 474. Kuinka monta prosenttia väkiluku oli noussut keskimäärin vuodessa? Mikä on Helsingin väkiluku vuonna 2015, jos oletetaan, että väestönkasvu jatkuu vuodesta toiseen prosentuaalisesti samansuuruisena?

S2010/T5

5. Tuotteen hintaa korotetaan ensin 45 prosenttia ja sen jälkeen 62 prosenttia. Näytä, että tulos on sama, jos tuotteen hintaa korotetaan ensin 62 prosenttia ja sitten 45 prosenttia. Kuinka monen prosentin nousua tuotteen hinnassa korotukset yhteensä merkitsevät? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

S2016/A-osa T2

2. a) Sievennä lauseke $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$.
 b) Ratkaise yhtälö $5^{2x+4} = 5^{-x}$.
 c) Ratkaise yhtälö $4^{x+1} = 8^{x-1}$.

K2016/B1-osa T8

8. Alla on ote Wikipedian CRP:tä koskevasta tiedosta. Vastaa sen perusteella seuraaviin kysymyksiin.
 a) Potilaan CRP-pitoisuus oli 40 klo 12:00. Kuinka suuri pitoisuus voi enintään olla klo 18:00? (2 p.)
 b) Potilaan CRP-pitoisuus oli 100 maanantaina klo 12:00. Milloin se voi aikaisintaan laskea arvoon 10? (4 p.)

CRP:n pitoisuus veressä nousee bakteeri-infektioiden, muiden tulehdustilojen ja kudосvaurion yhteydessä nopeasti, jo muutaman tunnin kuluessa, ja pitoisuus voi kaksinkertaistua kahdeksan tunnin välein jopa 1000-kertaiseksi viitealueeseen verrattuna. Maksimitaso saavutetaan tyypillisesti noin 50 tunnissa. CRP nousee yleensä enemmän bakteerin aiheuttamissa tulehduksissa kuin virustulehduksissa, mutta kohonnut CRP ei ole minkään tietyn tulehdustilan merkki. Lievät tulehdukset ja virusinfektiot nostavat CRP:n tyypillisesti noin tasolle 10–50 mg/l, aktiiviset tulehdukset ja bakteeri-infektiot pitoisuuksiin 50–200 mg/l ja vakavat infektiot tai traumat tasolle >200 mg/l. CRP:n biologinen puoliintumisaika on 19 tuntia, joten tulehduksen rauhoituttua CRP-taso laskee nopeasti. CRP on siis herkkä, mutta epäspesifinen tulehdustilan indeksi.

<fi.wikipedia.org>. Luettu 6.4.2015.

K2016/B2-osa T12

12. Vieraalla planeetalla putoavan kappaleen kulkema matka s on suoraan verrannollinen kuluneen ajan t toiseen potenssiin kaavan $s = 10t^2$ mukaisesti.

a) Kopioi oheinen taulukko vastauspaperiisi ja täydennä tyhjät kohdat. (2 p.)

b) Merkitse koordinaatistoon a-kohdan taulukosta pisteet, joiden koordinaatit ovat $(\lg t, \lg s)$. Mitä havaitset? Selitä. (4 p.)

t	$\lg t$	$\lg s$
1	0	1
2		
4		
10		
100		

4. Matemaattinen analyysi (MAB4)

KESKEISET SISÄLLÖT (s.76-89)

- polynomifunktion derivaatta
- polynomifunktion merkin ja kulun tutkiminen
- polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen
- graafisia ja numeerisia menetelmiä

K2005/T7

7. Määritä ne kohdat, joissa funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 17$ derivaatta saa arvon 2.

K2005/T11

11. Määritä se paraabelin $y = x^2 + 2x - 1$ piste (x, y) , jossa koordinaattien summa on mahdollisimman pieni.

K2006/T7

7. Tutki, milloin funktio $f(x) = x^3 - 27x + 2$ on kasvava ja milloin vähenevä.

K2006/T13

13. Pienien alumiinista valmistettavien suoran ympyräkartion muotoisten valaisinkupujen korkeuden ja pohjaympyrän halkaisijan summa on 18,6 cm. Määritä kartion pohjaympyrän säde siten, että kartion tilavuus on mahdollisimman suuri. Määritä tämä tilavuus.

K2007/T2b

- b) Määritä funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{3}$ derivaatta.

K2007/T8

8. Määritä funktion $f(x) = x(3 - 4x - x^2)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 3]$.

K2008/T7

7. Pallo heitetään hetkellä $t = 0$. Sen lentokorkeus metreinä saadaan lausekkeesta $-0,15t^2 + 2,4t + 1,8$, missä t on aika sekunneissa. Kuinka korkealla pallo käy? Millä aikavälillä sen lentorata on laskeva?

K2009/T2b

- b) Määritä funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ derivaatan nollakohdat.

K2009/T3b

- b) Tutki, millä muuttujan x arvoilla polynomi $2x^2 + 5x - 3$ saa negatiivisia arvoja.

S2007/12

12. Rautalanka, jonka pituus on 120 cm, katkaistaan kahteen osaan. Toinen osa taivutetaan neliöksi, toinen ympyräksi. Miten lanka on katkaistava, jotta ympyrän ja neliön alojen summa olisi mahdollisimman pieni?

S2007/T2b

- b) Derivoi funktio $f(x) = 3x^{2007} - 15x^{12} + 2x - 12345$.

K2011/10

10. Toisen asteen polynomin $y = ax^2 + bx + c$ kuvaaja kulkee pisteiden $(0, 0)$, $(1, 2)$ ja $(4, 3)$ kautta. Määritä kertoimet a , b ja c ja piirrä polynomin kuvaaja. Määritä polynomin derivaatta kohdassa $x = 2$.

K2011/9

9. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}$ välillä $[-1, 4]$. a) Määritä funktion suurin ja pienin arvo annetulla välillä ja piirrä funktion kuvaaja. b) Määritä käyrän $y = f(x)$ tangentin kulmakertoimen suurin ja pienin arvo annetulla välillä.

K2010/T6

6. Määritä funktion $f(x) = (x - 2)(3 - x)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-3, 3]$.

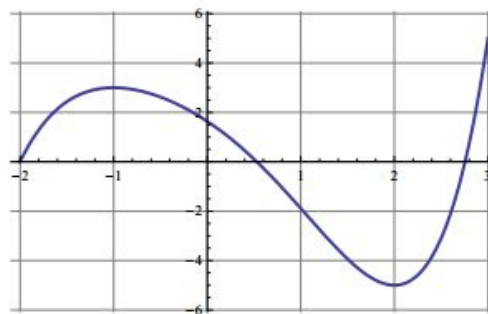
S2011/T6

6. Määritä funktion $f(x) = x^3 - 4x + 1$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 2]$.

K2010/T3

3. Oheisessa kuviossa on erään funktion kuvaaja. Määritä kuvion perusteella

- a) funktion nollakohdat,
- b) funktion derivaatan nollakohdat,
- c) funktion suurin arvo välillä $[-2, 3]$,
- d) funktion pienin arvo välillä $[-2, 3]$,
- e) välit, joilla funktio on kasvava, ja
- f) väli, jolla funktio on vähenevä.



K2011/T5

5. Olkoon $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$. Laske $f'(\frac{\sqrt{3}}{2})$. Millä x :n arvoilla on $f'(x) = 0$?

S2009/T3

3. Olkoon $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4$.

- a) Muodosta funktion f derivaatta.
- b) Missä kohdissa funktion kuvaajan tangentti on x -akselin suuntainen?
- c) Millä välillä funktio on vähenevä?

S2009/T10

10. Ravintolan julkisivu on 8,0 m, ja julkisivua tai sen osaa on tarkoitus käyttää ravintolan suorakulmion muotoisen terassin yhtenä sivuna. Terassin aita, portti mukaan lukien, on käytettävissä 20,0 m. Mikä on terassin suurin mahdollinen pinta-ala? Minkä pituisia ovat terassin sivut?

S2010/T7

7. Määritä polynomin $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x$

- a) nollakohdat,
- b) ääriarvokohdat ja ääriarvot sekä
- c) piirrä polynomin kuvaaja.

K2016/A-osa 1

1. Määritellään funktiot $f(x) = 2x^2 + x$ ja $g(x) = 5x - 2$.
- a) Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$.
 - b) Laske $f'(x)$.

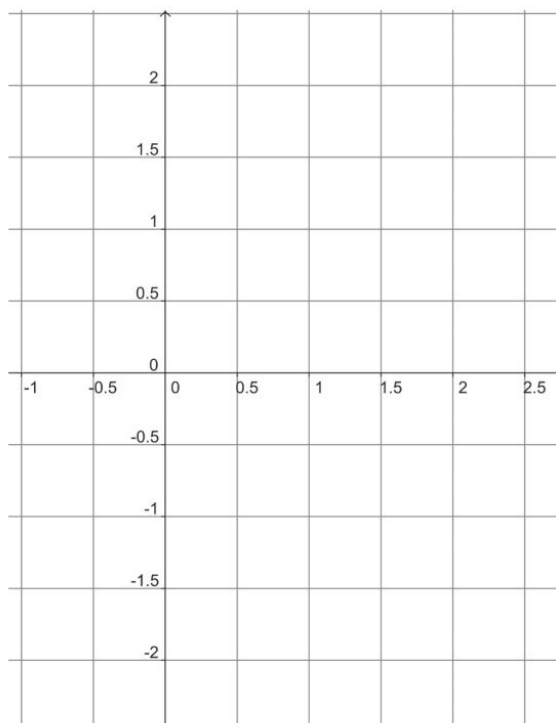
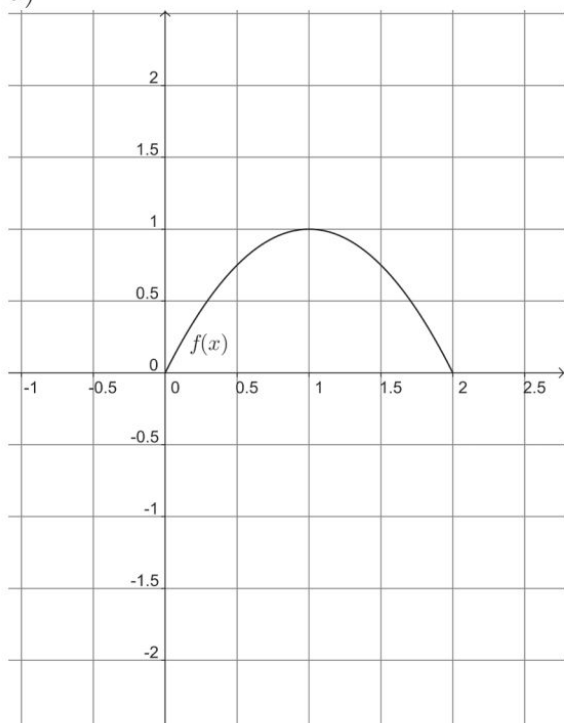
S2016/A-osa 1

1. Määritellään funktio $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 7$.
- a) Laske $f(1)$.
 - b) Laske $f'(2)$.

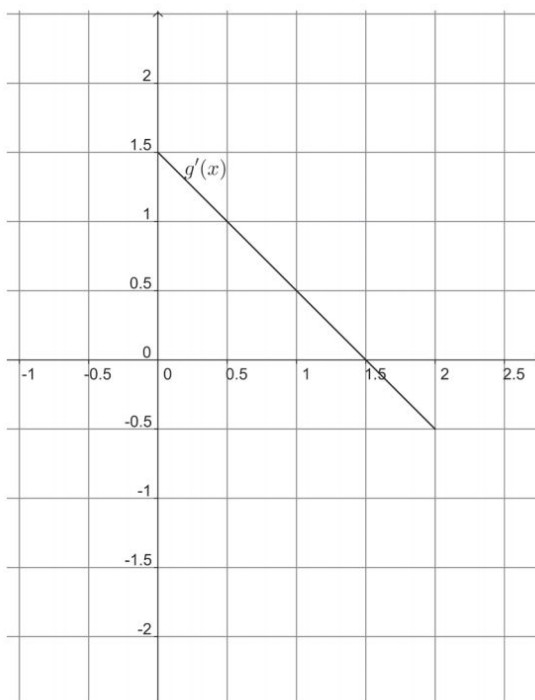
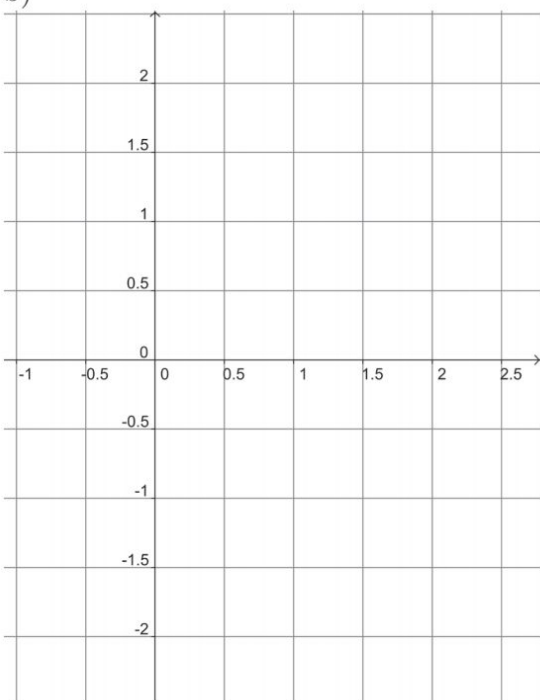
K2016/A-osa 4

4. Kuviossa a) on piiretty funktion $f(x)$ kuvaaja ja kuviossa b) funktion $g'(x)$ kuvaaja välillä $[0, 2]$. Hahmottele tyhjiin koordinaatistoihin a)-kohdassa funktion $f'(x)$ ja b)-kohdassa funktion $g(x)$ kuvaaja, kun lisäksi tiedetään, että $g(0) = 0$.

a)



b)



S2016/B2-osa T12

12. Sanomme, että derivoituva funktio on *konvekksi*, jos sen derivaatta on kasvava funktio.
- Osoita, että $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ ei ole konvekksi.
 - Tutki, millä vakion $a \in \mathbf{R}$ arvoilla funktio $g(x) = x^4 + ax^2 + 2$ on konvekksi.

5. Tilastot ja todennäköisyys (MAB5)

KESKEISET SISÄLLÖT (s.100-113)

- jatkuvien ja diskreettien tilastollisten jakaumien tunnuslukujen määrittäminen
- normaalijakauma ja jakauman normittaminen
- kombinatoriikkaa
- todennäköisyyden käsite
- todennäköisyyden laskulakien ja niitä havainnollistavien mallien käyttöä

K2005/T3

3. Nuoripari pitää kirjaa talousmenoistaan. Joka kuukauden viimeisenä päivänä he laskevat, kuinka paljon kuukauden menot ovat olleet. Eräänä vuonna marraskuun lopussa menot olivat olleet keskimäärin 1 651,20 euroa kuukaudessa. Joulukuussa menot olivat 1 814,88 euroa. Mikä oli talousmenojen kuukausikeskiarvo koko vuoden osalta?

K2005/T10

10. Pelaaja lyö euron vetoa, että rahanheiton tulos on kruuna, mutta häviää. Hän uudistaa vetonsa kaksinkertaistamalla panoksensa ja häviää jälleen. Näin jatkuu edelleen. Hävittyään hän uudistaa aina vetonsa kaksinkertaistamalla panoksensa. **a)** Mikä on todennäköisyys sille, että pelaaja häviää 20 kertaa peräkkäin? **b)** Muodosta lauseke sille rahamäärälle, jonka hän on menettänyt n peräkkäisen häviön jälkeen, ja laske sen avulla, kuinka paljon pelaaja jää voitolle, jos hän 20 häviön jälkeen voittaa 21. kerralla. Voitto on panoksen suuruinen.

K2005/T15

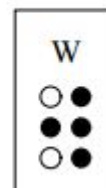
15. Kilon sokeripusseja täytetään koneellisesti. Pussituskone voidaan asettaa täyttämään pusseja, joiden paino noudattaa normaalijakaumaa keskiarvona koneelle asetettu paino ja keskihajontana 8,0 g. Kuinka suureksi sokeripussin paino tulee asettaa koneeseen, jotta 95 % sokeripusseista olisi painoltaan vähintään 1 000 g?

K2006/T9

9. Noppaa heitetään 5 kertaa. Millä todennäköisyydellä tuloksena on **a)** täsmälleen kaksi kuutosta, **b)** vähintään kaksi kuutosta?

K2007/T10

10. Ranskalaisen Louis Brailleen vuonna 1825 kehittämä pistekirjoitus on kohokirjoitusta, jota luetaan sormin. Pistekirjoitusjärjestelmässä kutakin merkkiä kohti on käytettävissä kuusi kiinteää paikkaa, joihin voidaan asettaa yhdestä kuuteen pistettä. (Esimerkkinä kuviossa on kirjain W.) Kuinka monta erilaista merkkiä järjestelmässä voidaan esittää?



K2008/T2b

- b) Määritä lukujen 7, 3, 6, 3, 5, 3, 1 mediaani ja keskiarvo.

K2008/T5

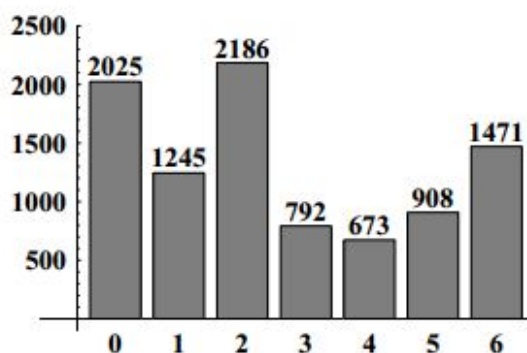
8. Kulhossa on viisi punaista ja kymmenen mustaa palloa. Kulhosta poimitaan umpimähkään viisi palloa palauttamatta yhtäkään. Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi poimituista palloista on punainen? Millä todennäköisyydellä kaikki viisi ovat samanvärisiä?

K2009/T11

11. Vasenkätisiä on erään tiedon mukaan 10 % väestöstä. Kuinka monta henkilöä tulee satunnaisesti kootussa ryhmässä olla, jotta siinä olisi ainakin yksi vasenkätinen todennäköisyydellä 0,8?

K2009/T4

4. Alla oleva pylväsdiagrammi esittää kevään 2007 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen tehtävän 8 pistejakaumaa (vaaka-akselilla pisteet, pylväiden korkeus osoittaa kyseisen pistemäärän saaneiden lukumäärän). Laadi vastaava sektoridiagrammi, josta ilmenee kunkin pistemäärän saaneiden suhteellinen osuus, ja ilmoita osuudet prosentteina.



K2010/T8

8. Tiedonsiirtojärjestelmässä havaittiin yksittäisen bitin saapuvan virheellisenä vastaanottajalle todennäköisyydellä 0,00015. Yksittäisten bittien siirtojen oletetaan olevan toisistaan riippumattomia.
- Millä todennäköisyydellä vastaanottajalle saapuvassa 16 bitin jonossa on ainakin yksi virheellinen bitti?
 - Jos lähetetään 32 kappaletta 16 bitin jonoja, niin millä todennäköisyydellä vastaanottajalle saapuu ainakin yksi virheellinen jono?

K2011/T7

7. Eräässä kokeessa annettiin suoritusten arvosanoiksi 0, 1, 2, 3, 4, 5 tai 6. Näiden prosentiosuudet olivat seuraavat:

arvosana	0	1	2	3	4	5	6
osuus	5,80	10,99	17,54	24,78	19,95	15,48	5,46

Laske kokeen keskiarvo ja keskihajonta.

S2005/T10

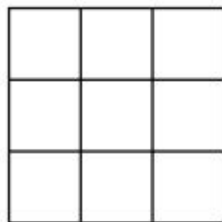
10. Kolikkoa heitetään a) neljä kertaa, b) kaksikymmentä kertaa. Mikä on todennäköisyys, että saadaan yhtä monta kruunaa ja klaavaa? Vastaukset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

K2011/T8

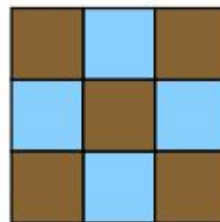
8. Alla olevan kuvion 1 kukin ruutu väritetään satunnaisesti ja toisista riippumatta joko ruskeaksi tai siniseksi.

a) Millä todennäköisyydellä saadaan kuvion 2 shakkilautakuvio?

b) Millä todennäköisyydellä mikään vaakarivi ei ole yksivärinen?



Kuvio 1



Kuvio 2

S2005/T14

14. Eräässä lyhyen matematiikan ylioppilaskokeessa keskiarvo oli 27,36 ja keskihajonta 12,23 pistettä. Jos oletetaan pistemäärän noudattavan normaalijakaumaa, niin a) mikä on alin pistemäärä, jolla saa laudaturin, jos laudatur-arvosanojen osuudeksi halutaan enintään 5 % kaikista kokelaista, b) kuinka monta prosenttia kokelaista hyväksytään, jos alin hyväksytty pistemäärä on 12?

S2006/T4

4. Abiturentilla on kaksi herätyskelloa. Uudempi toimii oikein 98 %:n todennäköisyydellä ja vanhempi 85 %:n todennäköisyydellä. Matematiikan kokeen aattona abiturientti asettaa molemmat kellot soimaan seuraavana aamuna. Millä todennäköisyydellä kelloista soi oikeaan aikaan a) molemmat, b) vain toinen, c) ei kumpikaan?

S2006/T11

11. a) Kuinka monta erilaista istumajärjestystä voidaan muodostaa luokassa, jossa on 30 oppilasta ja 30 pulpettia? b) Kuinka monella tavalla kolme tyhjää pulpettia voidaan valita luokassa, jossa on 27 oppilasta ja 30 pulpettia? Kuinka monta erilaista istumajärjestystä on tässä luokassa? c) Kuinka monta vuotta tietokoneelta kuluisi, jos se kävisi läpi a-kohdan erilaiset istumajärjestykset käsitellen biljoona (10^{12}) istumajärjestystä sekunnissa? Yksi vuosi on keskimäärin 365,25 vuorokautta.

S2006/T15

- 15.** Automaattisessa nopeusseurannassa saatiin vuorokauden aikana tietoja mittauskohdan ohittaneista kaikkiaan 4 190 ajoneuvosta. Nopeuksien otoskeskiarvo oli 97,75 km/h ja otoskeskihajonta 10,70 km/h; nopeudet jakautuivat likimain normaalisti. **a)** Määritä nopeuden keskiarvon (odotusarvon) 95 % luottamusväli. **b)** Arvioi, kuinka moni seuraavista mittauskohdan ohittavista 1 000 ajoneuvosta ylittää nopeuden 90 km/h.

S2008/T3a

- 3.** a) Kuinka moneen järjestykseen kirjaimet A, B, C ja D voidaan asettaa?

S2008/T11

- 11.** Puutarhuri istuttaa siemeniä, joiden itävyys on 60 %.
- a)** Mikä on todennäköisyys, että kolmesta istutetusta siemenestä mikään ei idä? Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi siemen itää?
- b)** Siemeniä istutetaan viiteen ruukkuun kuhunkin kolme. Mikä on todennäköisyys, että jokaisessa ruukussa ainakin yksi siemen itää?

S2010/T8

- 8.** Verkkopankkiin kirjaudutaan niin, että ensin annetaan kuuden numeron pituinen käyttäjätunnus ja neljän numeron pituinen salasana, minkä jälkeen annetaan vielä neljän numeron pituinen kertakäyttötunnus. Jokaisella pankin asiakkaalla on eri käyttäjätunnus, mutta usealla asiakkaalla voi olla sama salasana ja kertakäyttötunnus.
- a)** Jos verkkopankilla on 600 000 asiakasta, niin mikä on todennäköisyys sille, että yhdellä arvauksella löytää jonkun asiakkaan käyttäjätunnuksen?
- b)** Mikä on todennäköisyys sille, että yhdellä yrityksellä pääsee kirjautumaan verkkopankkiin?
-

S2011/T9

9. Värisävy esimerkiksi www-sivulla voidaan ilmoittaa kuusimerkkisellä RGB-koodilla, joka sisältää tiedon sävyn muodostavien perusvärien punainen (Red), vihreä (Green) ja sininen (Blue) määrästä. Kunkin perusvärin määrä ilmoitetaan kahdella peräkkäin kirjoitetulla merkillä, jotka valitaan joukosta

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f.

Laske, kuinka monta erilaista värisävyä RGB-koodilla voidaan ilmaista.



0000ff



f5c97a

S2011/T10

10. Oletetaan, että matematiikan ylioppilaskokeen tulokset (jotka ovat välillä 0,...,60 pistettä) jakautuvat likimain normaalisti keskiarvona 30 ja keskihajontana 10. Määritä tämän perusteella laudaturin pisteraja, kun tavoitteena on antaa laudatureja enintään viidelle prosentille osallistujista.

K2016/B1-osa T7

7. Hajamielinen professori muistaa ystäviensä ovikoodista vain, että se koostuu neljästä erisuuresta parittomasta numerosta.
- Kuinka monta koodia hän joutuu huonoimmassa tapauksessa (enintään) kokeilemaan, jos hän käy systemaattisesti läpi kaikki vaihtoehdot?
 - Parin vuoden käyntien jälkeen professori huomaa koodissa seuraavan ominaisuuden: siinä ei ole numeroa 9 eikä peräkkäin “vierekkäisiä” parittomien numeroiden (1 ja 3, 3 ja 1, 3 ja 5, 5 ja 3, 5 ja 7, 7 ja 5, 7 ja 9 tai 9 ja 7) yhdistelmiä. Kuinka monta koodia pitää huonoimmassa tapauksessa kokeilla, kun otetaan huomioon myös nämä lisätiedot?

K2016/B2-osa T13

13. Uuteen 20-kerroksiseen tornitaloon asennettiin kolme hissiä. Todennäköisyys, että hissi tilataan johonkin kerroksista 2–20, on 0,025 kullekin. Todennäköisyys, että hissi tilataan kerrokseen 1, on 0,4 ja kellarikerroksessa sijaitsevaan parkkihalliin 0,125. Ruuhkattomina aikoina hissit palaavat seuraavanlaisille odotuspaikoilleen: yksi hissi on kerroksessa 1, yksi hissi on kerroksessa 8 ja yksi hissi on kerroksessa 16. Näistä hissiin haluava voi astua siihen suoraan. Jos tilaa hissin muualta, odotteluun kuluu 10 sekuntia ja lisäksi 5 sekuntia jokaista kerrosta kohden, jonka hissi joutuu kulkemaan. Kuinka suurella todennäköisyydellä tilattua hissiä joutuu odottamaan ruuhkattomana aikana yli 22 sekuntia?

S2016/B1-osa T7

7. Kahden riippumattoman tapahtuman A ja B todennäköisyyksille pätee kaava

$$P(A \text{ ja } B) = P(A)P(B).$$

- a) Anna esimerkki kahdesta riippumattomasta tapahtumasta.
b) Anna esimerkki kahdesta tapahtumasta, jotka eivät ole riippumattomia.

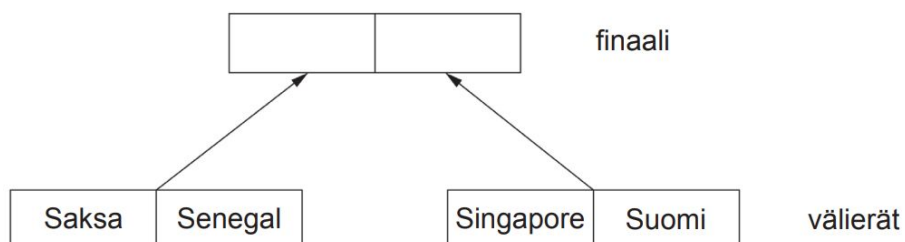
Esimerkkejä voi hakea esimerkiksi nopanheitosta. Myös muunlaiset esimerkit ovat mahdollisia.

S2016/B2-osa T10

10. Jalkapalloturnauksen välieriin ovat selvinneet Suomen lisäksi Saksa, Senegal ja Singapore. Kummastakin välieräottelusta voittaja jatkaa finaaliin. Seuraavaan taulukkoon on listattu voittotodennäköisyyksiä prosenteissa. Tasapelejä ei ole, ja sama todennäköisyys pätee sekä välierässä että finaalissa.

Saksa voittaa Senegalin	65 %
Saksa voittaa Singaporen	55 %
Saksa voittaa Suomen	100 %
Senegal voittaa Singaporen	40 %
Senegal voittaa Suomen	60 %
Singapore voittaa Suomen	50 %

- a) Mikä on todennäköisyys, että Suomi pelaa finaalissa Saksaa vastaan, jos välieräparit ovat Saksa–Senegal ja Singapore–Suomi? (2 p.)



- b) Millä välieräpareilla Suomen todennäköisyys voittaa koko kilpailu on suurin? Mikä on todennäköisyys tässä tapauksessa? (4 p.)

6. Matemaattisia malleja II (MAB6)

KESKEISET SISÄLLÖT (s.19, s.64, s.90-99)

- kahden muuttujan lineaariset yhtälöt
- lineaarisen yhtälöparin ratkaiseminen
- kahden muuttujan epäyhtälön graafinen ratkaiseminen
- lineaarinen optimointi
- lukujono
- aritmeettinen ja geometrinen jono ja summa

K2006/T11

11. Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on $\frac{3}{2}$, toinen on 7 ja viimeinen 117. Laske jonon summa.

K2007/T2c

- c) Määritä geometrisen lukujonon $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \dots$ kolmas termi.

K2009/T1c

- c) Ratkaise yhtälöryhmä $x + y = 1$, $x - y = 2$.

K2009/T10

11. Lukujonon seuraava termi a_{n+1} lasketaan edellisen termin a_n avulla kaavan

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$$

mukaisesti. Laske desimaalilukuina riittävällä tarkkuudella lukujonon termit a_1 , a_2 , a_3 ja a_4 , kun

- a) $a_0 = 3$ ja b) $a_0 = 8$.

Laske molemmissa tapauksissa, kuinka monta prosenttia termi a_4 poikkeaa luvusta $\sqrt{2}$.

S2005/T12

12. Määritä paraabelin $y = x^2 - x$ ja suoran $y = x + 2$ leikkauspisteet ja näiden välinen etäisyys.

K2011/T1c

c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 3y = 1. \end{cases}$$

K2011/T13

13. Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on 10 ja toinen termi 12. Geometrisen jonon ensimmäinen termi on 2 ja suhdeluku $q = \frac{21}{20}$. Monennestako termistä lähtien geometrisen jonon termi on suurempi kuin vastaava aritmeettisen jonon termi? Muodosta tarvittava epäyhtälö ja etsi sille ratkaisu kokeilemalla.

S2007/T8

8. Keltaista ja sinistä väripigmenttiä käytettiin kahden erisävyisen vihreän maalin sekoittamiseen. Maaliin A tarvittiin litraa kohden 80 g keltaista pigmenttiä ja 110 g sinistä pigmenttiä, maaliin B vastaavasti 120 g keltaista ja 90 g sinistä pigmenttiä. Kuinka monta litraa kumpaakin maalia valmistettiin, kun keltaista pigmenttiä käytettiin 3,2 kg ja sinistä 3,5 kg?

S2007/T9

9. Vanhassa tarinassa šakkilaudan 64 ruudulle sijoitetaan vehnänjyviä: ensimmäiselle ruudulle yksi, toiselle kaksi, kolmannelle neljä jne. Seuraavalla ruudulla on aina edellisen ruudun määrä kaksinkertaisena. Kuinka monta ruutua voidaan täyttää Suomen vuotuisella 700 miljoonan kilogramman vehnäsadolla, jos oletetaan, että yksi vehnänjyvä painaa 25 mg?

S2007/T10

10. Ratkaise graafisesti epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} y \geq x - 2, \\ 7x + 2y \geq 14, \\ 5x + 4y \leq 28. \end{cases}$$

Anna vastauksena kuvio, johon on merkitty ratkaisujoukko.

S2008/T10

10. Lukujonon ensimmäinen termi on 2, ja jonon kukin seuraava termi on aina 5 % suurempi kuin edellinen termi. Muodosta jonon n :nnen termin lauseke. Tutki tämän avulla, kuinka moni jonon termi on pienempi kuin 1000 miljoonaa. Laske näiden termien summa kolmen numeron tarkkuudella.

S2009/T11

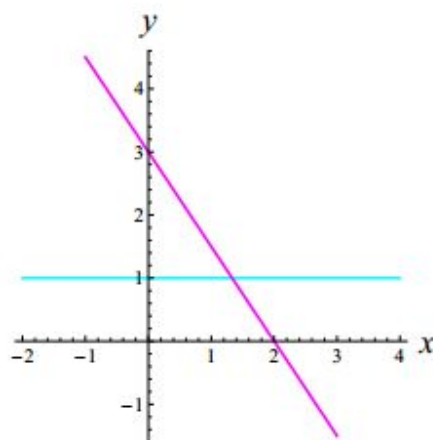
11. Postimyyntiliike pyrkii saamaan lisää asiakkaita lupaamalla lahjan asiakkaalleen, joka hankkii kaksi uutta asiakasta. Liisa haluaa lahjan ja ilmoittaa kaksi ystäväänsä, jotka puolestaan hankkivat kukin kaksi uutta asiakasta jne. Oletetaan, että jokaiseen uusien asiakkaiden hankkimiskierrokseen kuluu aikaa viikko eikä entisiä asiakkaita saa pyytää uudelleen. Kuinka monta uutta asiakasta tällä tavalla olisi saatu kokoon viidessä viikossa? Muodosta lauseke uusien asiakkaiden määrälle n viikon kuluttua. Kuinka monta viikkoa menisi siihen, että näin hankittuja uusia asiakkaita olisi yli 10 000?

S2009/T12

12. Suorat $x + y = 8$, $x + 3y = 18$ ja $y - 3 = 0$ rajoittavat kolmion. Piirrä kuvio ja laske kolmion pinta-ala. Muodosta epäyhtälöryhmä, jonka ratkaisuna on piirtämäsi kolmio sivut mukaan lukien.

S2010/T3

3. Oheisessa kuviossa on kaksi suoraa. Määritä näiden yhtälöt, ja laske niiden leikkauspisteen koordinaatit. Mikä on suorien ja y -akselin rajaaman kolmion pinta-ala?



S2010/T11

11. Ryöstöyrityksen keskeydyttyä Arska pinkaisi poliisia pakoon ja sai 200 metrin etumatkan. Kun poliisi oli juossut tämän 200 metriä, Arskalla oli vielä etumatkaa 180 metriä. Kun poliisi oli juossut tämän, Arskan etumatka oli jälleen kutistunut kymmenesosalla. Takaa-ajo jatkui samalla tavoin. Saiko poliisi Arskan kiinni? Jos sai, niin kuinka pitkän matkan juostuaan poliisi ulottui tarttumaan Arskaan? Poliisin käden pituudeksi oletetaan puoli metriä.

S2011/T4

4. Ludwig van Beethoven, Wolfgang Amadeus Mozart ja Johann Sebastian Bach elivät yhteensä 156 vuotta. Bach eli yhdeksän vuotta vanhemmaksi kuin Beethoven, Mozart kuoli 21 vuotta nuorempana kuin Beethoven. Kuinka vanhoiksi säveltäjät elivät?

K2016/B1-osa T9

9. Suora L_1 kulkee pisteiden $(3, 0)$ ja $(0, 5)$, suora L_2 pisteiden $(6, 0)$ ja $(0, 3)$, ja suora L_3 pisteiden $(2, 0)$ ja $(2, 2)$ kautta. Nämä kolme suoraa ja koordinaattiakselit rajoittavat monikulmion, jonka yksi kärki on $(0, 0)$. Etsi funktion $f(x, y) = 2x - 4y + 10$ suurin ja pienin arvo tässä monikulmiossa.

S2016/B1-osa T8

8. Kun kumipallo putoaa korkeudesta h , se ponnahtaa ylöspäin korkeuteen $0,8 \cdot h$ saakka. Pallo pudotetaan yhden metrin korkeudesta. Mikä on pallon kulkema matka, kun se kymmenennen kerran osuu lattiaan?

7. Talousmatematiikka (MAB7)

KESKEISET SISÄLLÖT (s.114-125)

- indeksi-, kustannus-, rahaliikenne-, laina-, verotus- ja muita laskelmia
- taloudellisiin tilanteisiin soveltuvia matemaattisia malleja lukujonojen ja summien avulla

K2005/T14

14. Postimyyntiyritys tarjoaa mainoslehtisessään nopeaa ja vaivatonta kulutuslainaa. Lainaehdojen mukaan laina maksetaan takaisin yhtä suurin erin kunkin kuukauden lopussa, kuukausikorko on 1,9 % jäljellä olevasta velkasaldosta ja lisäksi kuukausittain peritään lisämaksua, joka on 0,4 % myönnetyn luoton määrästä. a) Määritä kuukausierän suuruus ja lainan kokonaiskustannukset, jos lainasumma on 1 200 euroa ja laina-aika yksi vuosi. b) Osoita, että lainan todellinen vuosikorko on noin 31 %, toisin sanoen yhtä suureen kuukausierään päädytään, jos kuukausittain lyhennettävän tasaerälainan korko on 31 % vuodessa. Anna vastaukset euron tarkkuudella.

K2006/T5

5. Suomen viennin jakauma vuonna 2003 sekä viennin määrässä vuonna 2004 tapahtuneet muutokset käyvät ilmi seuraavasta taulukosta. (Lähde: Kaupan Keskusliitto.)

Vienti toimialoittain	Jakauma vuonna 2003 (%)	Muutos vuodesta 2003 vuoteen 2004 (%)
Puu- ja paperiteollisuus	25,4	+13,6
Kemianteollisuus	8,7	+4,4
Kone- ja metalliteollisuus	25,1	-4,4
Sähkötekhninen teollisuus	24,3	+1,9
Muut	16,5	+14,6

- a) Lisääntykö vai vähenikö kokonaisvientä vuonna 2004? Kuinka monta prosenttia muutos oli? b) Esitä viennin prosentuaalinen jakauma vuonna 2004.

K2006/T14

14. Henkilö ottaa 120 000 euron asuntolainan. Laina sovitaan hoidettavaksi tasaerä- eli annuiteettilainana puolivuositain, ja vuotuiseksi koroksi sovitaan 3,70 %. Harkittavana on laina-ajan pituus. Laske lainan hoitomaksun eli annuiteetin suuruus, jos laina-aika on a) 22 vuotta, b) 60 vuotta. Kuinka paljon lainaa jälkimmäisessä tapauksessa olisi vielä jäljellä silloin, kun laina ensimmäisessä tapauksessa olisi tullut maksetuksi loppuun? Lainasta ei aiheudu muita kuluja.

K2007/T15

15. Piensijoittaja osti yhtiön osakkeita 1 200 eurolla. Ensimmäisenä vuonna osakkeiden kurssi laski 15,6 prosenttia, mutta seuraavana vuonna se nousi 8,1 prosenttia. a) Kuinka monta prosenttia osakkeiden kurssin tulisi nousta kolmantena vuonna, jotta osakkeiden arvo olisi alkuperäisen suuruinen? b) Sijoittaja arvioi, että kurssinousu kolmantena vuonna on normaalisti jakautunut keskiarvona 7,0 prosenttia ja keskihajontana 5,0 prosenttia. Mikä on todennäköisyys, että kolmannen vuoden lopussa osakkeiden arvo on vähintään alkuperäisen suuruinen?

K2008/T11

11. Isoisä avasi vuoden 2006 alussa lapsenlastaan varten tilin, jonka vuotuinen korkoprosentti lähdeveron vähentämisen jälkeen on 1,750, ja talletti tilille 700 euroa. Isoisä jatkaa seuraavina vuosina tallettamalla saman summan. Korko lisätään vuosittain tilin saldoon vuoden viimeisenä päivänä. Kuinka paljon tilillä on rahaa vuoden 2010 lopussa koron lisäyksen jälkeen? Muodosta ja sievennä lauseke, joka antaa tilin saldon vuoden lopussa, kun talletus on tehty n kertaa. Minkä vuoden lopussa rahaa on vähintään 12 000 euroa?

K2008/T14

14. Vuoden 2002 alussa Liisa talletti 1 000 euroa tilille, jonka vuotuinen korko oli 1,5 prosenttia. Kuinka suuri talletus korkoineen oli viisi vuotta myöhemmin? Korkotulon lähdevero oli 1.1.2005 lähtien 28 prosenttia ja sitä ennen 29 prosenttia. Mikä oli talletuksen reaaliarvon muutos prosentteina? Vuoden 2002 alussa elinkustannusindeksi oli 1548 ja viisi vuotta myöhemmin 1632.

K2009/T8

8. Opintorahaa saanut opiskelija saattoi vuonna 2006 tehdä kunnallisverotuksessa ansiotulosta opintorahavähennyksen, jonka suuruus laskettiin seuraavasti: Vähennyksen enimmäismäärä oli 2 200 euroa, ja sitä pienennettiin 50 prosentilla siitä määrästä, jolla puhtaan ansiotulon määrä ylitti vähennyksen enimmäismäärän. Kuitenkin vähennys oli enintään opintorahan suuruinen. Piirrä kuvaaja, joka osoittaa vähennyksen riippuvuuden palkkatulosta, kun opintorahan suuruus on 1 500 euroa. Oletetaan, että puhdas ansiotulo muodostuu palkkatulosta ja opintorahasta. Miten suurilla palkkatuloilla vähennystä ei tässä tapauksessa enää saa?

K2009/T14

14. Talletustilin vuosikorko on 1,50 prosenttia, ja korkotuotosta peritään vuosittain 29 prosentin lähdevero. Tiliä avattaessa talletetaan 1 000 €, eikä muita talletuksia tehdä.
- Kuinka paljon tilillä on rahaa kymmenen vuoden kuluttua, kun korko liitetään pääomaan vuoden välein?
 - Monenko vuoden kuluttua talletus on kaksinkertaistunut?

K2010/T5

5. Tuhat euroa talletetaan viiden prosentin korolla 50 vuodeksi. Korko liitetään pääomaan vuosittain. Laadi pylväsdiagrammi, joka kuvaa talletuksen arvoa viiden vuoden välein. Lähdeveroa ei oteta huomioon.

K2010/T13

- 13.** Lahjavero määräytyy ensimmäisessä veroluokassa seuraavasti:

Verotettavan osuuden arvo, euroa	Veron vakioerä osuuden alarajan kohdalla, euroa	Veroprosentti ylimenevästä osasta
4 000–17 000	100	7
17 000–50 000	1 010	10
50 000–	4 310	13

Lähde: www.vero.fi
(26.5.2009)

- a) Kuinka paljon veroa menee 30 000 euron lahjoituksesta?
- b) Piirrä sen funktion kuvaaja, joka esittää lahjaveron riippuvuutta lahjan arvosta (so. verotettavan osuuden arvosta).

K2011/T14

- 14. a)** Säätiöllä on 1,8 miljoonan euron pääoma, jonka vuosittainen tuotto on 5,4 prosenttia. Eräänä vuonna säätiö on päättänyt siirtää tuotosta 30 prosenttia pääomaan ja jakaa lopusta tuotosta kaksi 21 000 euron suuruisia apurahaa opiskeluun ulkomailla sekä 14 yhtä suurta matka-apurahaa. Kuinka suuria matka-apurahat ovat?
- b)** Kuinka suureksi säätiön 1,8 miljoonan euron pääoma kasvaa viidessä vuodessa, jos tuotto on jokaisena vuotena 5,4 prosenttia pääomasta ja vuosittain pääomaan siirretään 30 prosenttia tuotosta?

K2016/B1-osa 4

5. Oheinen taulukko kuvaa kuluttajahintaindeksin kehitystä 2000-luvulla.

- a) Kuinka monta prosenttia kuluttajahinta on noussut kesäkuusta 2006 kesäkuuhun 2010?
- b) Petteri on vuokrannut asunnon syyskuussa 2011. Vuokrasopimuksen mukaan vuokranantajalla on oikeus korottaa vuokraa kerran vuodessa niin, että korotus vastaa kuluttajahintaindeksin muutosta. Vuokranantaja käyttää korotusoikeuttaan täysimääräisenä niin, että korotus tulee voimaan tammikuun alusta vuosina 2012, 2013 ja 2014. Kesäkuussa 2014 Petterin vuokra on 542 €/kk. Mikä oli vuokra vuokrasopimusta solmittaessa?

	tammi	helmi	maalis	huhti	touko	kesä	heinä	elo	syys	loka	marras	joulu
2014	119,0	119,3	119,6	119,8	119,5	119,5	119,4	119,6	120,2	120,0	119,8	119,6
2013	117,1	117,8	118,3	118,5	118,5	118,5	118,4	118,2	118,7	118,8	118,6	119,1
2012	115,2	115,9	116,3	116,7	116,7	116,8	116,6	116,8	117,3	117,4	117,0	117,2
2011	111,7	112,4	113,0	113,2	113,3	113,6	113,3	113,7	114,2	114,5	114,5	114,5
2010	108,3	108,7	109,2	109,5	109,4	109,7	109,1	109,6	110,0	110,5	110,7	111,3
2009	108,5	108,6	108,6	108,6	108,4	108,7	108,0	108,3	108,5	107,9	108,0	108,1
2008	106,2	106,7	107,6	107,8	108,4	108,8	108,6	109,1	109,6	109,6	109,1	108,7
2007	102,2	102,9	103,6	104,1	104,0	104,2	104,1	104,2	104,7	105,0	105,3	105,1
2006	99,9	100,7	101,0	101,5	101,6	101,7	101,5	101,9	102,0	102,3	102,3	102,4
2005	99,1	99,8	100,1	100,2	99,9	100,0	99,6	100,0	100,5	100,4	100,2	100,2

Lähde: Tilastokeskus

K2016/B2-osa T10

10. a) Annika sai 58 000 € perintönä. Kuinka monta euroa Annika maksaa perinnöstä veroa? Mikä on hänen perintöveroprosenttinsa?
- b) Piirrä kuvaaja, josta käy ilmi perintöveron suuruus prosentteina perinnön arvon funktiona, kun perinnön suuruus on välillä 0 € ja 60 000 €.

Verotettavan osuuden arvo, €	Veron vakioerä osuuden alarajan kohdalla, €	Vero alarajan ylimenevästä osasta, %
20 000–40 000	100	8
40 000–60 000	1 700	11
60 000–200 000	3 900	14
200 000–1 000 000	23 500	17
1 000 000–	159 500	20

(Perintö- ja lahjaverolaki, 378/1940, § 14)

S2016/B2-osa T11

11. Suomessa verotetaan ansiotuloa progressiivisesti oheisen taulukon mukaisin veroastein. Yritysjohtaja Karhu haluaa houkutella maahan rikkaita maahanmuuttajia siirtymällä tasaveroprosenttimalliin, jossa käytetään samaa ansioveroprosenttia tulotasosta riippumatta. Arvioi taulukon ja oheisen lehtileikkeen perusteella, mikä on se tasaveroprosentti, jolla voidaan kerätä yhtä paljon verotuloa kuin nykymallilla. Tee tarvittavat oletukset tulojakaumasta ja kirjaa ne myös näkyviin.

Verotettava ansiotulo, €	Vero alarajan kohdalla, €	Vero alarajan ylit- tävästä tulon osas- ta, %
16 500–24 700	8	6,5
24 700–40 300	541	17,5
40 300–71 400	3 271	21,5
71 400–90 000	9 957,50	29,75
90 000–	15 491	31,75

*Kauimmas kärki on karannut Kauniaisissa, missä hyvätuloisin prosentti ansaitsee vähintään 293 362 euroa vuodessa. Naapurikunnassa Espoossa hui-
pun tulot ovat lähes puolet vähemmän, 155 273 euroa vuodessa.*

*Pienimmillä tuloilla hyvätuloisimman prosentin joukkoon pääsee Rauta-
vaaralla, Sotkamon naapurissa (52 286 e). Eli Kauniaisissa tuloeliittiin pääse-
miseen tarvitaan lähes neljännesmiljoona euroa vuodessa enemmän kuin Rau-
tavaaralla.*

*Myös Suomen vähiten ansaitsevat asuvat Kauniaisissa, missä pienituloisin
kymmenys ihmisistä ansaitsee alle 3 073 euroa vuodessa. Seuraavaksi pieni-
tuloisin 10 prosenttia löytyy Helsingistä (3 698 euroa vuodessa) ja Joensuusta
(4 588 euroa vuodessa).*

Suomen Kuvalehti

<<http://suomenkuvalehti.fi>>

S2016/B2-osa T13

13. Allu haluaa ostaa 1 800 € maksavan maastopyörän. Mummo antaa hänelle 700 €. Allu tallettaa mummolta saamansa rahat 30.12.2014 tilille, jonka vuosittainen korkotuotto on 0,6 %. Lisäksi Allu asettaa itselleen kuukausittaisen säästötavoitteen: hän tallettaa jokaisen kuukauden ensimmäisenä päivänä tietyn summan, alkaen helmikuusta 2015. Paljonko Allun tulee kuukausittain säästää, jotta hän saa vuoden 2015 loppuun mennessä kokoon 1 800 €? Oletetaan, että jokaisessa kuussa on 30 päivää ja että lähdevero on 30 %.

8. Matemaattisia malleja III (MAB8)

KESKEISET SISÄLLÖT (s.126-136)

- trigonometristen funktioiden määrittely yksikköympyrän avulla
- radiaani
- tyyppeä $f(x) = a$ olevien trigonometristen yhtälöiden ratkaiseminen
- muotoa $f(x) = A \sin(bx)$ olevien funktioiden kuvaajat jaksollisten ilmiöiden mallintajina
- vektorin käsite ja vektoreiden peruslaskutoimitusten periaatteet
- koordinaatiston vektoreiden komponenttiesitys ja skalaaritulo
- kaksi- ja kolmiulotteisen koordinaatiston pisteiden ja kulmien tutkiminen vektoreiden avulla

K2005/T9

9. Tasaisella vaakasuoralla puutarhapalstalla peruskallio on lähellä maanpintaa. Puutarhuri etsi kokeilemalla rautakangen avulla kohtaa, jossa peruskallio on lähinnä maanpintaa. Hän mittasi peruskallion syvyyden kolmessa pisteessä, jotka eräässä xy -koordinaatistossa (yksikkönä cm) olivat $A = (132, 247)$, $B = (357, 519)$ ja $C = (471, 125)$. Peruskallio oli syvimmillään pisteessä A . Siten kallio näytti nousevan maanpintaa kohti, kun pisteestä A siirryttiin kohti pisteitä B ja C . Puutarhuri päätti siirtyä pisteestä A ensin janan BC keskipisteeseen ja siitä vielä samaan suuntaan yhtä pitkän matkan pisteeseen D , jossa hän mittasi kallion syvyyden. a) Piirrä kuvio. b) Laske janan BC keskipisteen koordinaatit. c) Laske pisteen D koordinaatit.

K2006/T10

10. Suunnikkaan $ABCD$ kärkipisteet ovat $A = (1, -2)$, $B = (6, -1)$, $C = (7, 2)$ ja $D = (2, 1)$. Laske suunnikkaan pinta-ala sekä kulmien suuruudet asteen kymmenesosan tarkkuudella.

K2009/T9

9. Kolmion kärjet ovat pisteissä $(-6, 1)$, $(0, 0)$ ja $(4, 9)$.
 a) Laske kolmion kulmat asteen kymmenesosan tarkkuudella.
 b) Laske kolmion pinta-ala yhden desimaalin tarkkuudella.

S2009/T14

14. Ratkaise yhtälö $\cos 3\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mitkä ratkaisuihin ovat välillä $[180^\circ, 360^\circ]$?

K2009/T15

15. Olkoon $\vec{a} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

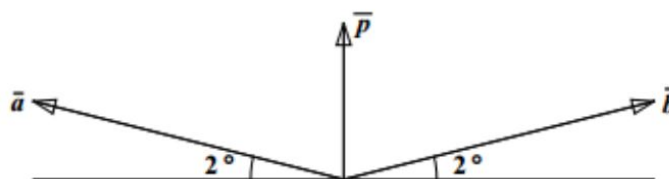
- Laske $\vec{b} - \vec{a}$.
- Piirrä vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{b} - \vec{a}$ koordinaatistoon siten, että niiden alkupiste on origossa.
- Määritä vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma.

K2010/T15

15. Pystysuora vektori $\vec{p} = 5\vec{j}$ esitetään kahden vektorin

$$\vec{a} = -x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{ja} \quad \vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

summana. Miten on x ja y valittava, kun vaatimuksena on, että sekä vektorin $\vec{a}$ että vektorin $\vec{b}$ kulma x -akseliin nähden on 2° ?



S2010/T6

6. Pisteitä $A = (1, 4)$ ja $B = (7, 1)$ katsotaan origosta. Kuinka suuressa kulmassa jana AB tällöin näkyy, ts. mikä on janan päätepisteisiin suuntautuvien tähtäysviivojen välinen kulma? Anna vastaus yhden asteen tarkkuudella.

K2011/T15

15. Laske avaruuden kulman $\angle BAC$ suuruus asteen tarkkuudella, kun $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 5, 6)$ ja $C = (9, 8, 7)$.

K2012/T15B

B) Suunnikkaan $ABCD$ kärki A on pisteessä $(-3, 7)$ ja sen pisteestä A lähtevinä sivuina ovat vektorit $\vec{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{AD} = \vec{i} + 5\vec{j}$. Määritä pisteiden B , C ja D paikkavektorit. Kuinka suuri on lävistäjävektoreiden $\vec{AC}$ ja $\vec{DB}$ välinen kulma? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

S2007/T15B

B) Laske vektoreiden $\vec{a} = 2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$ ja $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ pituudet ja suuntakulmat x -akseliin nähden. Laske myös vektoreiden summa $\vec{a} + \vec{b}$ ja erotus $\vec{a} - \vec{b}$.

K2016/B2-osa T11

11. a) Määritellään funktio $f(x) = \cos(x) + 1$. Määritä funktion suurin ja pienin arvo.
b) Määritellään funktio $g(x) = A \sin(x) + B$, missä $A, B > 0$ ovat vakioita. Mitä kaikkia arvoja tämä funktio voi saada?

S2016/B1-osa T9

9. Kolmion kulman puolittaja jakaa kulman vastaisen sivun kulman viereisten sivujen pituuksien suhteessa. Kolmion kärkipisteet ovat $A(0, 0)$, $B(2, 1)$ ja $C(1, 3)$.
a) Laske $\frac{|AC|}{|AB|}$,
b) Merkitään kirjaimella D sivun BC ja kulman A puolittajan leikkauspistettä. Laske pisteen D koordinaatit.