

# Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

- Yhtälön  $ax^2 + bx + c = 0$ , missä  $a \neq 0$  ratkaisut (eli juuret) saadaan kaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(ks. todistus s. 73)

- Jos juuren sisässä oleva lauseke eli *juurrettava*  $b^2 - 4ac$  on negatiivinen, niin juurta ei voi laskea.
- Tällöin yhtälöllä ei ole ratkaisuja

**Esimerkki 1:**  $1x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -4 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

Muista että neliö ei voi olla koskaan negatiivinen!  
Tässä voisi siis jättää miinuksen ja sulut pois.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 3 \text{ tai } x = 1$$

**Muista tarkistus!!**

SpeedCrunch:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\begin{aligned} f(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Perinteinen sijoitus:

$$1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

- Toisen asteen yhtälön  $ax^2 + bx + c = 0$  ratkaisuille  $x_1$  ja  $x_2$  on seuraavat ominaisuudet:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{ja} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

- Erityisesti, jos  $a = 1$ , niin ratkaisujen tulo on vakiotermin  $c$  ja ratkaisujen summa kertoimen  $b$  vastaluku. Tämä on usein hyvä tarkistuskeino.
  - Vrt. edellinen esimerkki:
  - $x^2 - 4x + 3 = 0$
  - Ratkaisut  $x_1 = 1$  ja  $x_2 = 3$
  - Ratkaisujen tulo:  $x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 1 = 3 = c =$  vakiotermin
  - Ratkaisujen summa:  $x_1 + x_2 = 3 + 1 = 4 = -b = x$ :n kertoimen vastaluku.

**Esimerkki 2:**  $3x^2 + 7x - 6 = 0$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$a = 3$$

$$b = 7$$

$$c = -6$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{-7 \pm 11}{6}$$

$$x = \frac{-7 + 11}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-7 - 11}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tarkistus (ratkaisujen tulon ja summan perusteella):

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3} \cdot (-3) = -2$$

$$\frac{c}{a} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{3} + (-3) = \frac{2}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{7}{3}$$

t. 308, s. 79

$$\text{a)} \quad 18x^2 - 24x + 6 = 0 \quad | :6$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Jos kertoimilla  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on yhteinen tekijä, niin sillä kannattaa jakaa yhtälö puolittain.

Käytetään 2. asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$a = 3 \quad x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$b = -4$$

$$c = 1$$

Miinus voitiin tästä jättää pois.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \Leftrightarrow x = \frac{6}{6} \text{ tai } x = \frac{2}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ tai } x = \frac{1}{3}$$

SpeedCrunch-tarkistus:

$$f(x) = 18x^2 - 24x + 6$$

$$f(1) = 0$$

$$f(1/3) = 0$$

GeoGebran CAS-tilassa:

The screenshot shows the GeoGebra CAS interface. The top toolbar contains various symbols: equals, approximate, checkmark, 15/3.5, parentheses, a square root symbol with a 7, and a circled 'x=' symbol. Below the toolbar, the input field contains the equation  $18x^2 - 24x + 6 = 0$ . The output field shows the solution set:  $\text{Ratkaise: } \left\{ x = \frac{1}{3}, x = 1 \right\}$ .

t. 308, s. 79

$$\text{b)} \quad x(x+2) = \frac{1}{2} \quad | \cdot 2$$

Murtoluvut kannattaa yleensä kertoa pois.

$$2x(x+2) = 1$$

$$2x^2 + 4x = 1$$

$$2x^2 + 4x - 1 = 0$$

Käytetään 2. asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$c = -1$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 8}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot 6}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \text{ tai } x = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \cdot \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} = \frac{4 - 6}{4} = -\frac{1}{2} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{-2 + \sqrt{6}}{2} + \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} = \frac{-2 - 2}{2} = -\frac{4}{2} = -\frac{b}{a}$$



1

$x(x+2) = \frac{1}{2}$

Ratkaise:  $\left\{ x = \frac{-\sqrt{6} - 2}{2}, x = \frac{\sqrt{6} - 2}{2} \right\}$