

Nollakohtien ja tekijöiden yhteys

- Jos toisen asteen yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on kaksi eri suurta juurta (eli ratkaisua) x_1 ja x_2 , niin polynomi $ax^2 + bx + c$ voidaan jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

– todistus: oppikirja s. 102

- Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on vain yksi juuri x_1 (eli ns. *kaksoisjuuri*), niin

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

- Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ ei ole ratkaisuja, niin polynomi $ax^2 + bx + c$ on *jaoton* (eli sillä ei ole ensimmäisen asteen tekijöitä).

t. 368, s. 107

a) Ratkaistaan ensin vastaava yhtälö $2x^2 - 8x - 10 = 0$.

$$2x^2 - 8x - 10 = 0 \quad | :2$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

Tarkistus:

$$5 \cdot (-1) = -5 = c$$

$$5 + (-1) = 4 = -b$$

Tekijöihin jako saadaan kaavalla $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Nyt $a = 2$, $x_1 = 5$ ja $x_2 = -1$. (Ei ole väliä kumpi ratkaisusta on x_1 ja kumpi x_2 .)

Siis $2x^2 - 8x - 10 = 2(x - 5)(x - (-1)) = 2(x - 5)(x + 1)$.

Tuloksen voisi tarkistaa kertomalla sulut auki.

Tarkistus GeoGebralla CAS-tilassa:

The screenshot shows a CAS window with the title 'CAS' and a close button. The main content is 'Tekijät(2x^2-8x-10)'. Below this, the expression is shown as $2(x-5)(x+1)$. Red arrows point from the label 'tekijät' to the factors $(x-5)$ and $(x+1)$. Another set of red arrows points from the label 'tekijöiden potenssit' to the coefficients 2 , 1 , 1 , and 1 in the expression.

b) Ratkaistaan ensin vastaava yhtälö $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = 5$$

Kyseessä on kaksoisjuuri ja tekijöihin jako saadaan kaavalla $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

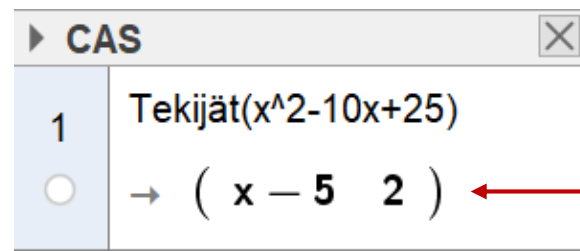
Nyt $a = 1$ ja $x_1 = 5$.

$$\text{Siis } x^2 - 10x + 25 = 1 \cdot (x - 5)^2 = (x - 5)^2$$

Tuloksen voi tarkistaa muistikaavalla $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Tekijöihin jaon voisi keksiä suoraan käyttämällä tätä muistikaavaa toiseen suuntaan:

$$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 = (x - 5)^2$$



Tekijän potenssi on 2
(kaksoisjuuri)