Korkeamman asteen polynomifunktio ja yhtälö

- Polynomifunktio, jonka asteluku on n, voidaan esittää muodossa

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

missä $a_n \neq 0$ ja n on positiivinen kokonaisluku.

- Astetta n olevalla polynomilla on enintään n kpl nollakohtia.
- Paritonta astelukua olevalla polynomifunktiolla on ainakin yksi nollakohta.
- Jos polynomifunktion asteluku on parillinen, niin sillä ei välttämättä ole yhtään nollakohtaa
- Korkeamman asteen yhtälön ratkaisussa voidaan usein käyttää apuna yhteisen tekijän ottamista ja tulon nollasääntöä.

t. 429, s. 130

a) $x^5 - 16x = 0$

Molemmissa termeissä on tekijänä x.

$x(x^4 - 16) = 0$

Käytetään tulon nollasääntöä:

$\Leftrightarrow x = 0$ tai $x^4 - 16 = 0$

$x^4 = 16 \quad \Big| \sqrt[4]{}$

$x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$

Vastaus:
$\underline{x = -2, x = 0 \text{ tai } x = 2.}$

b) $2x^6 - 16x^3 = 0$

Molemmissa termeissä on tekijänä $2x^3$.

$2x^3(x^3 - 8) = 0$

Käytetään tulon nollasääntöä:

Muista potenssien laskusäännöt!
$x^3 \cdot x^3 = x^{3+3} = x^6$

$\Leftrightarrow 2x^3 = 0$ tai $x^3 - 8 = 0$

$x = 0$

$x^3 = 8 \quad \Big| \sqrt[3]{}$

$x = \sqrt[3]{8} = 2$

Vastaus:
$\underline{x = 0 \text{ tai } x = 2.}$

Polynomifunktion tekijät

- Polynomin nollakohtien ja tekijöiden välillä on seuraava yhteys:
- Lauseke $x - a$ on polynomin tekijä jos ja vain jos $x = a$ on polynomin nollakohta.
- Jos polynomifunktion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ kaikki nollakohdat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tiedetään niin polynomifunktio f voidaan kirjoittaa muotoon

$$a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

(Kyseessä on s. 102 lauseen yleistys.)

- Jotkin nollakohdista voivat olla keskenään yhtä suuria. Kyseessä on tällöin *moninkertainen nollakohta*. (Vrt. kaksoisjuuri, kun toisen asteen yhtälön diskriminantti on nolla.)