

Koulumatematiikka III

Geometria

Vuosiluokat 1-2

Ajattelun taidot
Luvut ja laskutoimitukset
Geometria ja mittaaminen
Tietojenkäsittely ja tilastot

Lukion 1. vuosi

MAV1 luvut ja yhtälöt

MAA2 Funktiot ja yhtälöt

MAA3 Geometria

MAA4 Analyttinen geometria
ja vektorit

Vuosiluokat 3-6

Ajattelun taidot
Luvut ja laskutoimitukset
Algebra
Geometria ja mittaaminen
Tietojenkäsittely ja tilastot

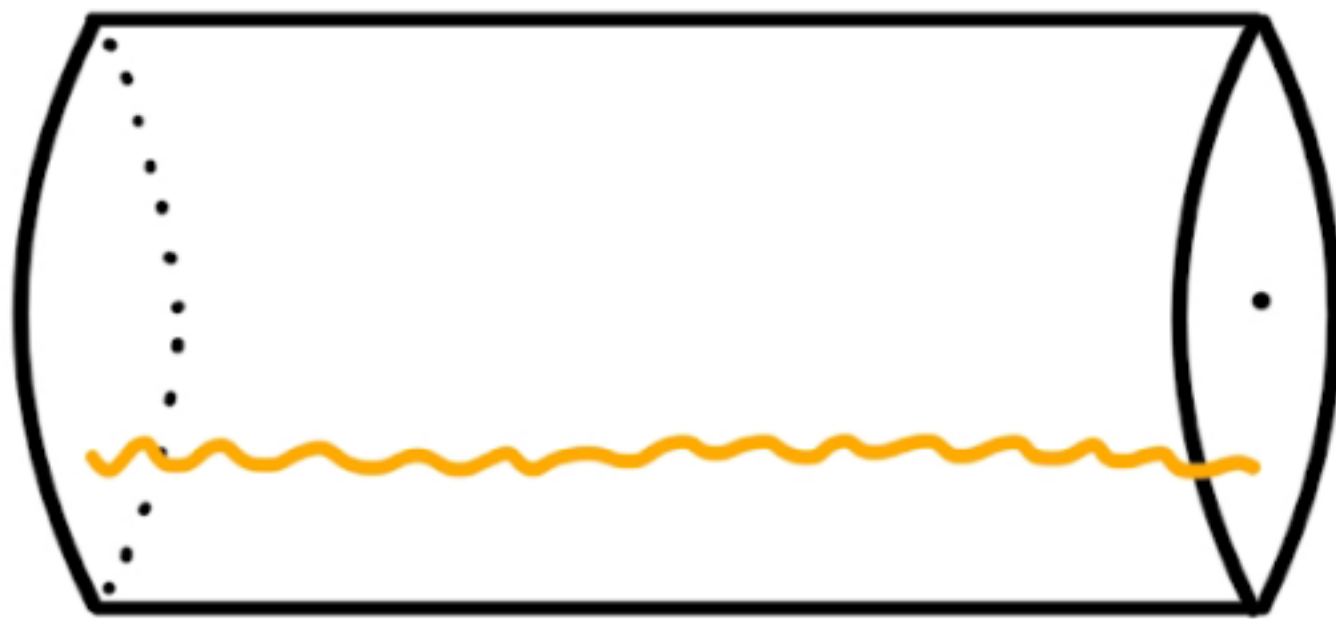
MAB2 lausekkeet ja yhtälöt

MAB3 Geometria

Vuosiluokat 7-9

Ajattelun taidot
Luvut ja laskutoimitukset
Algebra
Funktiot
Geometria
Tilastot ja todennäköisyys

Lappeelleen käännetyin suorin ympyrälieriön muotoisen kanisterin pohjalla on 40 cm rypsiöljyä. Kanisterin pohjan halkaisija on 2,0 metriä. Kuinka monta prosenttia kanisterista on täynnä öljyä?



* kielelliset vaatimukset

↳ suora ympyrälieriö, pohjan halkaisija, prosentti, tilavuus

↳ lappeelleen, kanisteri, pohjalla, täynnä

* proseduraaliset vaatimukset

* konseptuaaliset vaatimukset

* strategiset vaatimukset

↳ Miten ohjata oppilasta kokeilemaan?

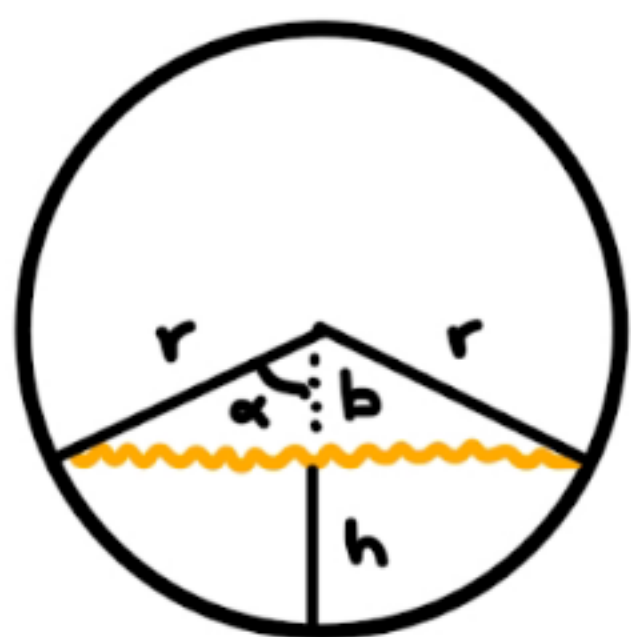
↳ Miten ohjata oppilasta pilkkomaan tehtävää?

* kognitiiviset vaatimukset

↳ Miten ohjata oppilasta säätelämään turhautumistaan?

↳ Miten ohjata oppilasta hahmottamaan käsitteitä?

↳ Miten ohjata oppilasta ylläpitämään minäpystyvyyttään?



$d = 2,0 \text{ m}$

$$A_{\text{öljy}} = A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}}$$

$$r = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \cdot 2,0 \text{ m} = 1,0 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

$$b = r - h = 100 \text{ cm} - 40 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{r} = \frac{60 \text{ cm}}{100 \text{ cm}}$$

$$\Rightarrow \alpha = 53,13 \dots^\circ$$

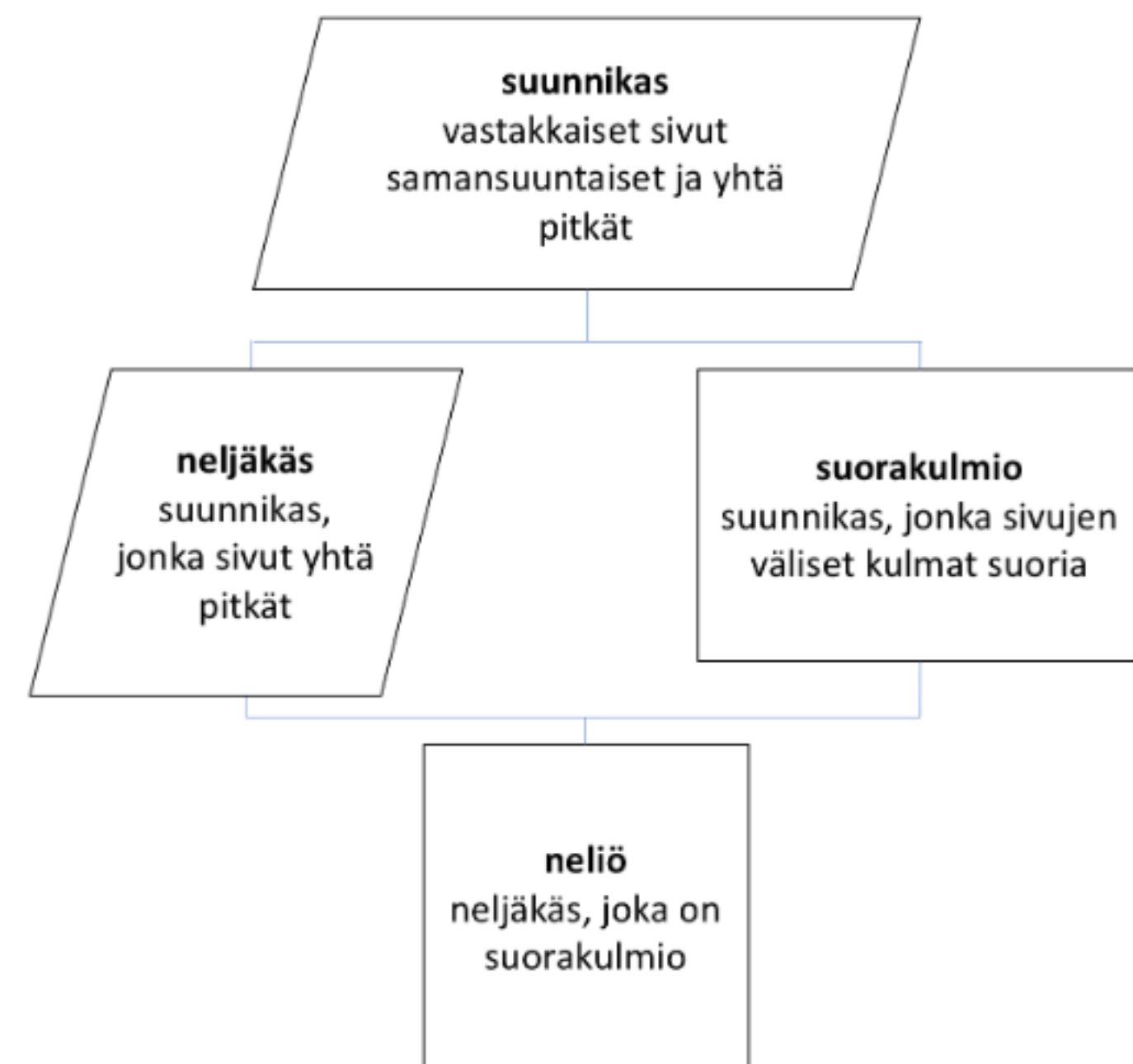
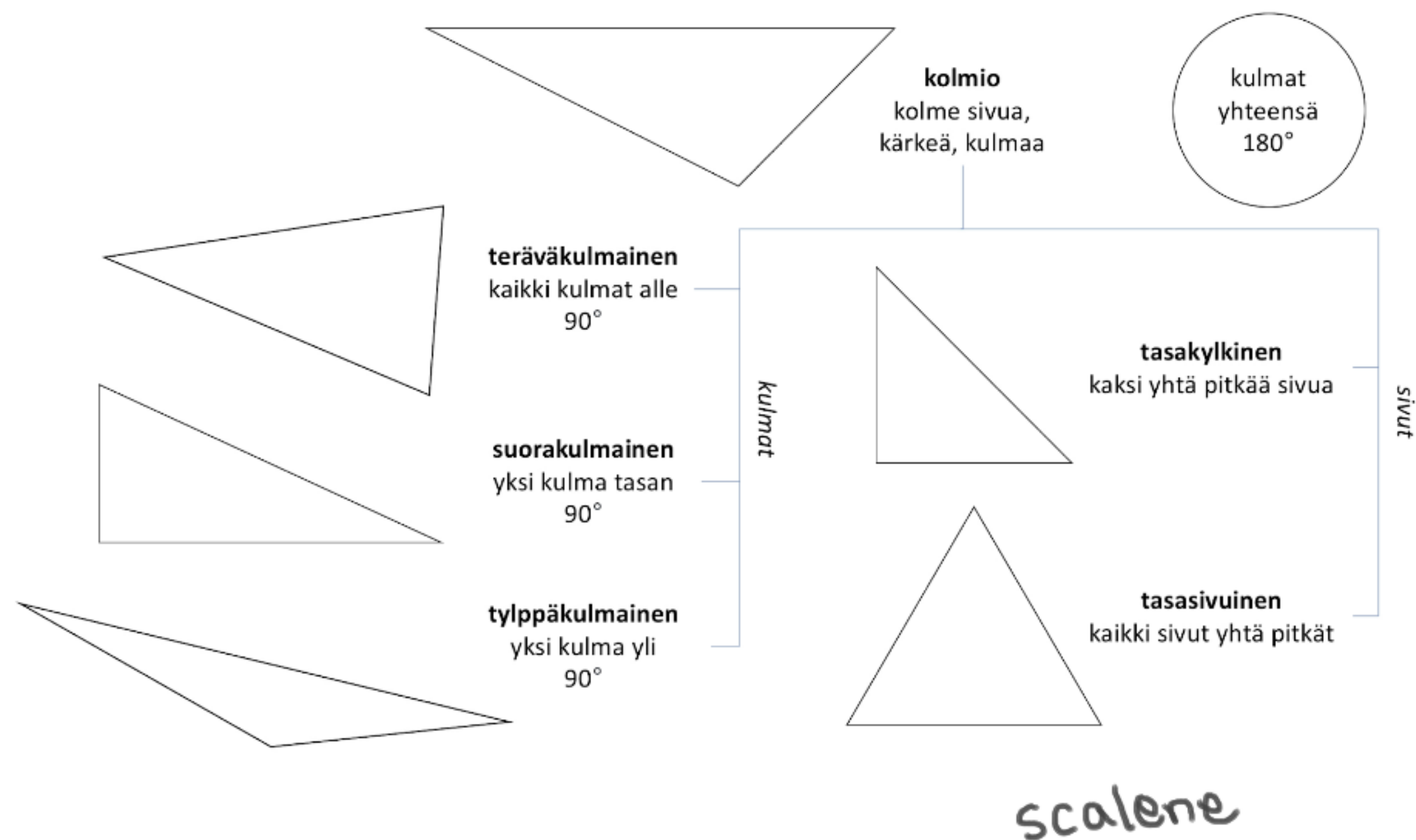
$$A_{\text{kolmio}} = \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \sin(2\alpha)$$

$$A_{\text{sektori}} = \frac{2\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2$$

$$\frac{A_{\text{öljy}}}{A_{\text{pohja}}} = \frac{A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}}}{A_{\text{pohja}}} =$$

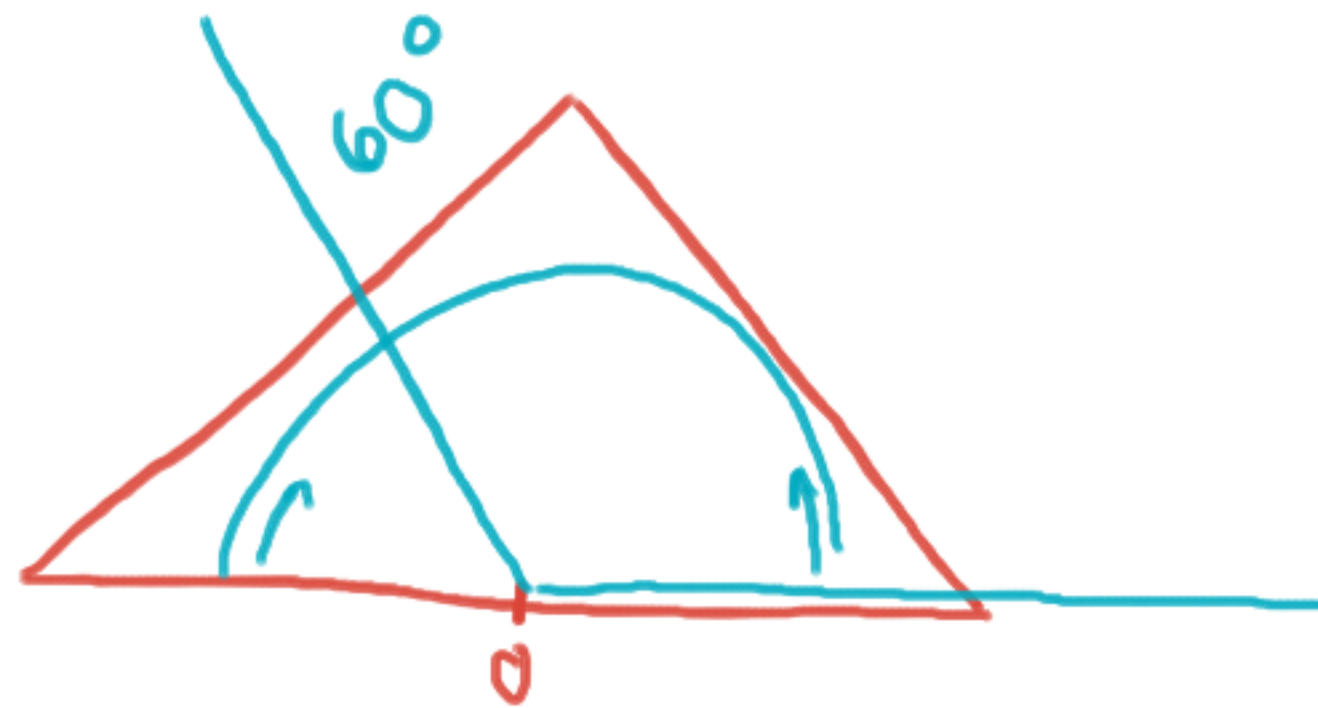
Geometrian kielelliset vaatimukset

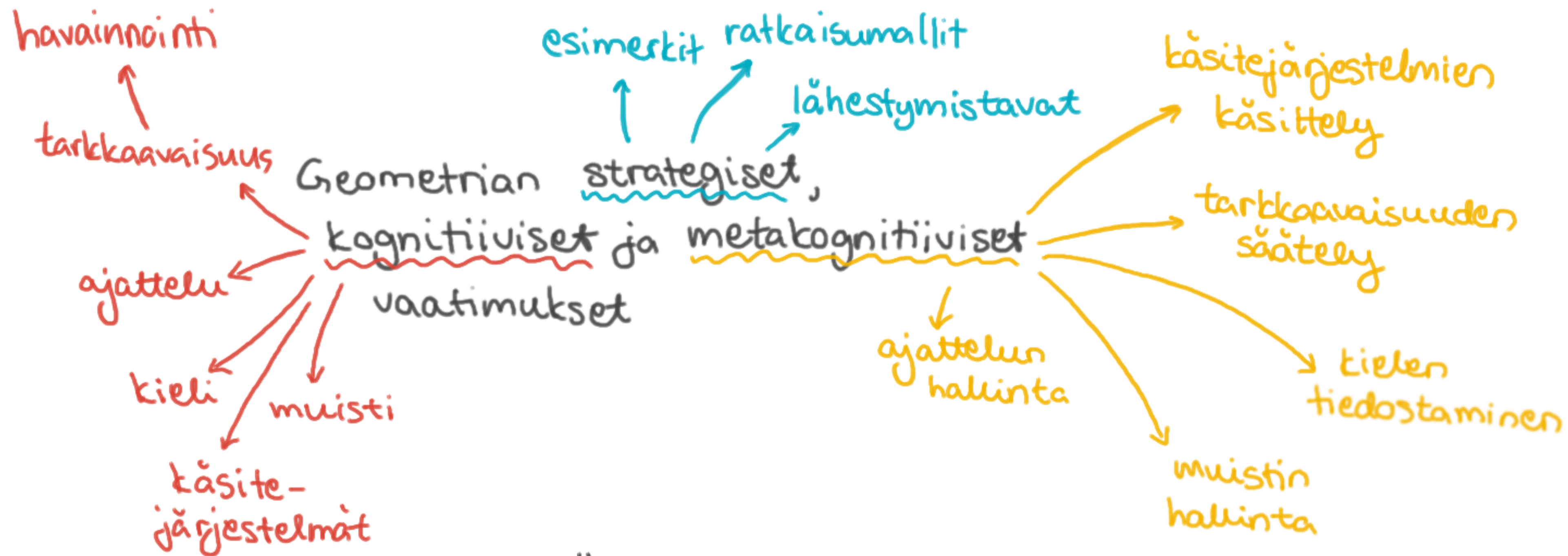


Geometrian proseduraaliset vaatimukset

* P , A , V : laskujärjestys, muuttujat, yhtälöt

* kulmat : kolmioviiivaimen ja harpin käyttö,
karkea- ja hienomotoriikka





"Piirrä ympyrä, jonka säde on 3 cm."

Piirtävälineen hallinta
käsitteen tunnistaminen
lauserakenteen tunnistaminen
käsitteen tunnistaminen
mittayksitön hallinta

□ 1-2

□ 3-6

□ 7-9

□ lukio

"Piirrä ympyrä, jonka säde on 3 cm."

alaspäin
eriyttäminen

"Piirrä harppia käyttäen
ympyrä niin, että mittaat
harpin päiden väliin 3
senttimetriä viivaimellasi."

ylöspäin
eriyttäminen

"Olkoon P tason piste.
Minkä muodon muodostavat
ne pisteet, jotka ovat 3 cm
etäisyydellä pisteestä P?
Perustele piirtämällä."

1-2

T9 tutustuttaa oppilas geometrisiin muotoihin ja ohjata havainnoimaan niiden ominaisuuksia	S3	L1, L4, L5
T10 ohjata oppilasta ymmärtämään mittaamisen periaate	S3	L1, L4

3-6

T11 ohjata oppilasta havainnoimaan ja kuvailemaan kappaleiden ja kuvioiden geometrisia ominaisuuksia sekä tutustuttaa oppilas geometrisiin käsitteisiin	S4	L4, L5
T12 ohjata oppilasta arvioimaan mittaushkohteen suuruutta ja valitsemaan mittaamiseen sopivan välineen ja mittayksikön sekä pohtimaan mittaustuloksen järkevyyttä.	S4	L1, L3, L6

7-9

T16 tukea oppilasta ymmärtämään geometrian käsitteitä ja niiden välisiä yhteyksiä	S5	L1, L4, L5
T17 ohjata oppilasta ymmärtämään ja hyödyntämään suorakulmaiseen kolmioon ja ympyrään liittyviä ominaisuuksia	S5	L1, L4, L5
T18 kannustaa oppilasta kehittämään taitoaan laskea pinta-aloja ja tilavuuksia	S5	L1, L4



opetuksen
tavoite sisältö

oppimisen
tavoite arvioinnin
kohde

5

7

8

9

ohjattuna

T11 ohjata oppilasta havainnoidaan ja kuvailemaan kappaleiden ja kuvioiden geometrisia ominaisuuksia sekä tutustuttaa oppilas geometrisiin käsitteisiin	S4	Oppilas havainnoi ja kuvailee kappaleiden ja kuvioiden geometrisia ominaisuuksia ja tuntee geometrian peruskäsitteet sekä tuntee suoran ja pisteen suhteen symmetriat.	Geometrian käsitteet ja geometristen ominaisuuksien havainnointi	Oppilas tunnistaa ja nimeää yleisimmät geometriset kuviot ja kappaleet sekä niiden osat. Oppilas osaa piirtää yleisimmät geometriset kuviot.	Oppilas havainnoi ja kuvailee pisteen, janan, suoran ja kulman välisiä yhteyksiä. Oppilas tunnistaa suoran suhteen symmetrisiä kuvioita. Oppilas osaa ohjattuna suurentaa tai pienentää kuviota. Oppilas osaa merkitä annetun pisteen koordinaatistoon.	Oppilas havainnoi ja kuvailee kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia. Oppilas piirtää pisteen tai suoran suhteen symmetrisiä kuvioita koordinaatistoa hyödyntäen. Oppilas osaa käyttää annettua mittakaavaa.	Oppilas osaa hyödyntää kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia ongelmanratkaisussa. Oppilas osaa piirtää pienennöksiä ja suurennoksia kuvioista ja määrittää mittakaavan annettujen mittojen pohjalta.
---	----	--	--	---	--	--	--

Geometrian 6. luokan luvu-
vuosiarvioinnin kriteerit

↳ arvosanojen antoon
6. luokan opettajalle

↳ tiedoksi 7. luokan
opettajalle

T12 ohjata oppilasta arvioimaan mittauskohteen suuruutta ja valitsemaan mittaamiseen sopivan välineen ja mittayksikön sekä pohtimaan mittaus tuloksen järkevyyttä	S4	Oppilas arvioi mittauskohteen suuruuden ja valitsee mittaamiseen sopivan välineen ja tuloksen ilmoittamiseen sopivan mittayksikön. Hän arvioi mittaustuloksen järkevyyttä.	Mittaaminen	Oppilas suorittaa mittauksen annettulla mittavälineellä ja ilmoittaa, kuinka monta mittavälineen yksikköä hän sai tulokseksi. Oppilas osaa ohjattuna muuttaa	Oppilas suorittaa mittauksen valitsemallaan mittavälineellä ja osaa ilmoittaa mittaustuloksen pyydettyssä yksikössä.	Oppilas osaa havainnoida mittauskohteen suuruutta ja valitsee mittamiseen sopivan välineen. Oppilas hallitsee yleisimmät mittayksikkömuunnokset ja	Oppilas osaa selittää mittaustuloksen tarkkuuteen vaikuttavia tekijöitä ja valita oikean mittayksikön. Oppilas osaa muuttaa pinta-alojen mittayksiköitä.
---	----	--	-------------	---	--	---	---

119

Opetuksen tavoite	Sisältöalueet	Opetuksen tavoitteista johdetut oppimisen tavoitteet	Arvioinnin kohteet	Osaamisen kuvaus arvosanalle 5	Osaamisen kuvaus arvosanalle 7	Osaamisen kuvaus arvosanalle 8	Osaamisen kuvaus arvosanalle 9
				pituusyksikön toiseksi pituusyksiköksi.	Oppilas osaa muuttaa vetomittojen (l, dl, jne.) yksiköitä.	pohtii mittaustuloksen järkevyyttä.	

Geometriaan liittyvät päättöarvioinnin kriteerit 9. luokan päätteeksi

↳ arvosanojen antoon 9. luokan
opettajalle

↳ tiedoksi 2. asteen
opettajalle

arvosana 5

arvosana 7

Pinta-alojen ja tilavuuksien laskutaito

- ☐ 4 Osaamiseni ja taitoni eivät yllä arvosanan 5 kriteerien tasolle.
- ☐ 5 Oppilas muuntaa yleisimmin käytettyjä pinta-alan ja tilavuuden yksiköitä. Oppilas osaa laskea suorakulmion pinta-alan ja suorakulmaisen särmiön tilavuuden.
- ☐ 6 Osaamiseni ja taitoni ylittävät arvosanan 5 kriteerit, mutten yllä arvosanan 7 kriteerien tasolle.
- ☐ 7 Oppilas muuntaa pinta-alan ja tilavuuden yksiköitä. Oppilas laskee yleisimpien tasokuvioden pinta-alat ja kappaleiden tilavuudet.
- ☐ 8 Oppilas käyttää pinta-ala- ja tilavuusyksiköiden muunnoksia. Oppilas laskee yksittäisen tasokuvion pinta-alan ja kappaleen tilavuuden sekä vaipan pinta-alan. Oppilas laskee keskuskulmaa vastaavan sektorin pinta-alan.
- ☐ 9 Oppilas laskee moniosaisen tasokuvion pinta-alan, kappaleen tilavuuden ja vaipan pinta-alan sekä hyödyntää osaamistaan ongelmanratkaisussa.
- ☐ 10 Osaamiseni ja taitoni ylittävät arvosanan 9 kriteerit.

Suorakulmaisen kolmion ja ympyrän ominaisuuksien hahmottaminen

- ☐ 4 Osaamiseni ja taitoni eivät yllä arvosanan 5 kriteerien tasolle.
- ☐ 5 Oppilas laskee hypotenuusan pituuden käyttämällä Pythagoraan lausetta. Oppilas osaa tutkia kolmion suorakulmaisuutta. Oppilas tunnistaa ympyrään liittyviä käsitteitä ja laskee ohjattuna ympyrän kehän pituuden.
- ☐ 6 Osaamiseni ja taitoni ylittävät arvosanan 5 kriteerit, mutten yllä arvosanan 7 kriteerien tasolle.
- ☐ 7 Oppilas ratkaisee suorakulmaisen kolmion sivun pituuden Pythagoraan lauseella ja löytää kulmalle viereisen ja vastaisen kateetin ja hypotenuusan sekä tietää, miten ne liittyvät trigonometrisiin funktioihin.
- ☐ 8 Oppilas ratkaisee annetusta suorakulmaisesta kolmiosta kulmien suuruudet ja sivujen pituudet. Oppilas ymmärtää kehäkulman ja keskuskulman käsitteet sekä laskee keskuskulmaa vastaavan kaaren pituuden.
- ☐ 9 Oppilas käyttää Pythagoraan lausetta ja sen käänteislausetta sekä trigonometriaa ongelmanratkaisussa.
- ☐ 10 Osaamiseni ja taitoni ylittävät arvosanan 9 kriteerit.

Geometrian käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien hahmottaminen

- ☐ 4 Osaamiseni ja taitoni eivät yllä arvosanan 5 kriteerien tasolle.
- ☐ 5 Oppilas tunnistaa ja nimeää kulmia ja monikulmioita ja laskee ohjattuna niihin liittyviä laskuja. Oppilas osaa piirtää suoran suhteen symmetrisiä kuvioita.
- ☐ 6 Osaamiseni ja taitoni ylittävät arvosanan 5 kriteerit, mutten yllä arvosanan 7 kriteerien tasolle.
- ☐ 7 Oppilas piirtää pisteen suhteen symmetrisiä kuvioita. Oppilas löytää vastinosat yhdenmuotoisista kuvioista, käyttää verrantoa ja osaa määrittää mittakaavan.
- ☐ 8 Oppilas hyödyntää perustellen geometrian peruskäsitteisiin ja yhdenmuotoisuuteen liittyviä ominaisuuksia. Oppilas käyttää verrantoa ja ymmärtää mittakaavan merkityksen.
- ☐ 9 Oppilas käyttää yhdenmuotoisuutta ja verrantoa ongelmanratkaisussa.
- ☐ 10 Osaamiseni ja taitoni ylittävät arvosanan 9 kriteerit.

Euklidisen geometrian aksioomat

Objekteja, joita kutsutaan *pisteiksi*, *janoiksi*, *suoriksi*, *kulmiksi* ja *ympyröiksi*, sitoo seuraavat viisi aksioomaa:

1. Minkä tahansa kahden pisteen kautta voidaan piirtää yksi ja vain yksi suora.
2. Jana on mahdollista jatkaa yhdeksi ja vain yhdeksi suoraksi.
3. Mitkä tahansa piste ja jana määrittävät yhden ja vain yhden ympyrän.
4. Kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuret.
5. Suoran ulkopuolisen pisteen kautta on mahdollista piirtää yksi ja vain yksi suora, joka ei leikkaa alkuperäistä suoraa.

1. Oppilas käyttää viivainta suorien pürtämiseen.

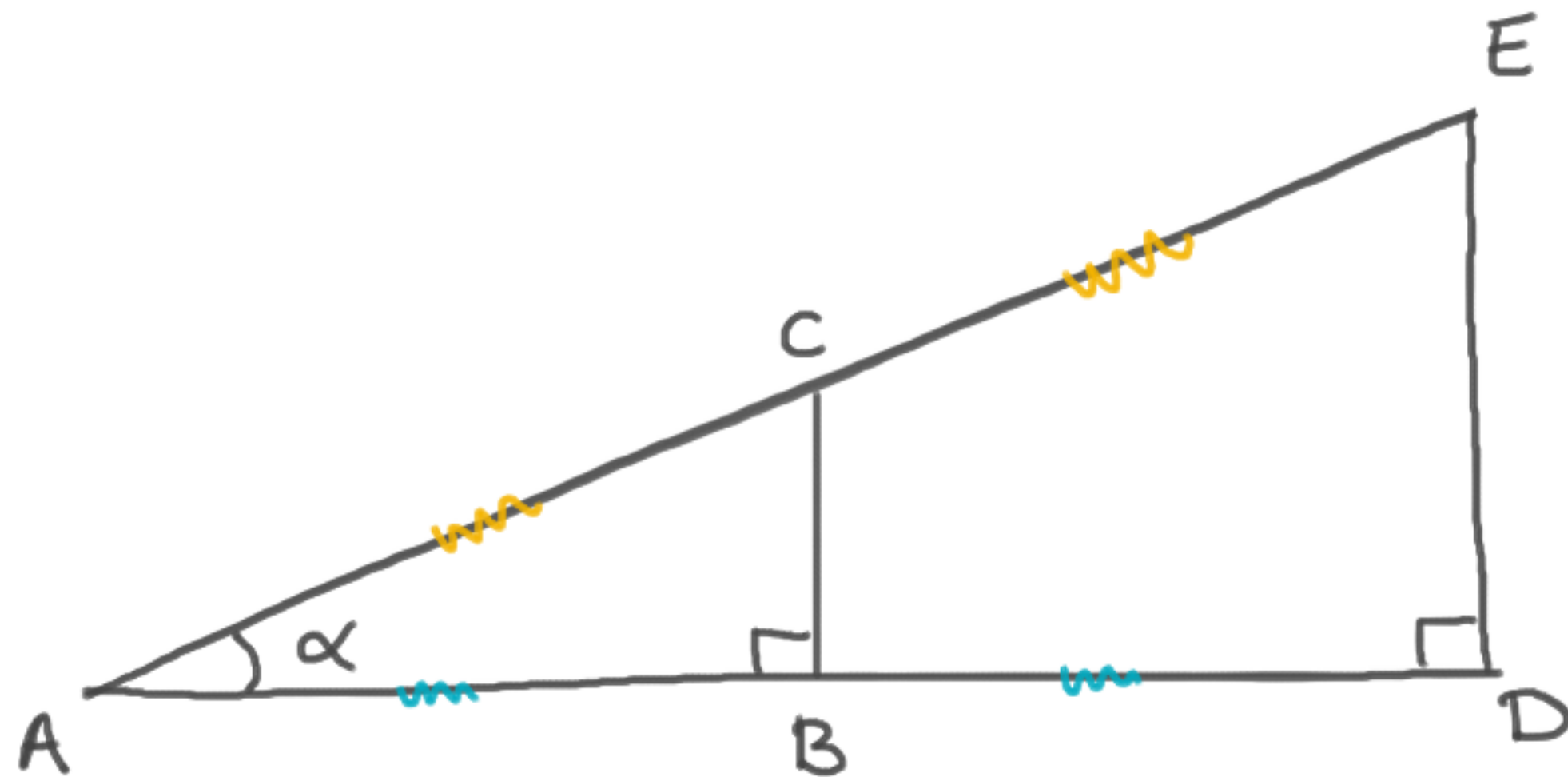
2. Oppilas käyttää viivainta asettamalla sen janan myötäiseksi päälle.

3. Oppilas käyttää harppia.

4. Oppilas käyttää kulma-
viivainta kulmien mittaamiseen.

5. Oppilas käyttää kulma-
viivainta yhdensuuntaisuuden
tarkasteluun.





- * GeoGebra - appletti
 - * piirto - laskintentävä
 - * taulukkoarvojen laskun
 - + narratiivi
-
- | | |
|------------------------|-----------------|
| <u>trigonometriset</u> | <u>funktiot</u> |
| kolmio | toiminto |

$$ABC \cong ADE \text{ (skk)} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \parallel \chi$$

$$AB \cdot AE = AC \cdot AD \parallel : AC : AE$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} =: \cos \alpha$$

proseduraalinen tieto

Oppilas osaa piirtää kaksi sisäkkäistä yhdenmuotoista suorakulmaista kolmiota.

Oppilas osaa ratkoa kolmien kulmia näiden summalla.

Oppilas osaa ratkoa suorakulmaisen kolmion sivuja Pythagoralla.

konseptuaalinen tieto

Suorakulmaisissa kolmioissa, joissa on 60 asteen kulma, suhteet

$$\frac{60 \text{ asteen vier. kat.}}{\text{hypotenuusa}}$$

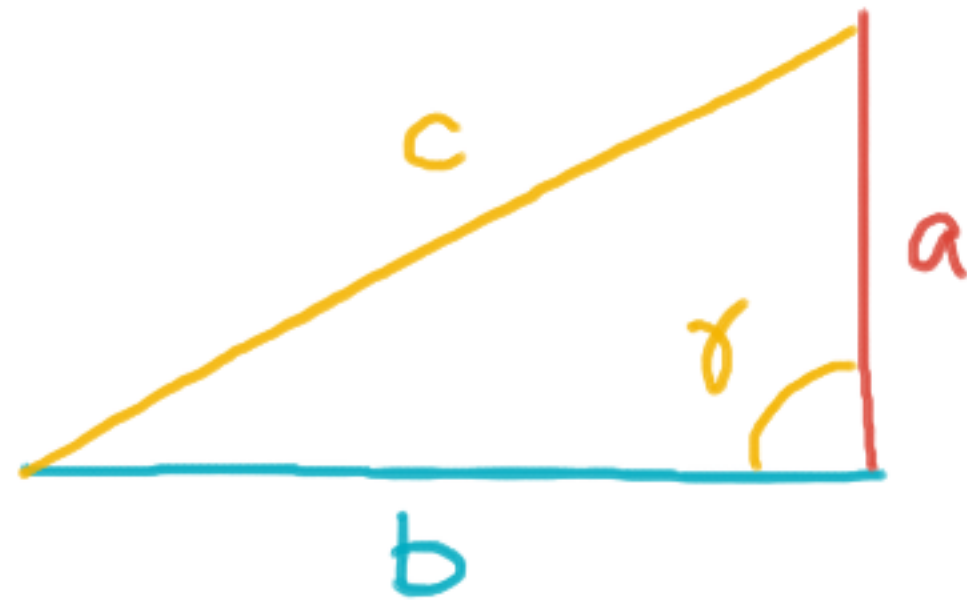
$$\frac{60 \text{ asteen vast. kat.}}{\text{hypotenuusa}}$$

$$\frac{60 \text{ asteen vast. kat.}}{60 \text{ asteen vier. kat.}}$$

ovat kaikissa samat, kolmion koosta huolimatta.

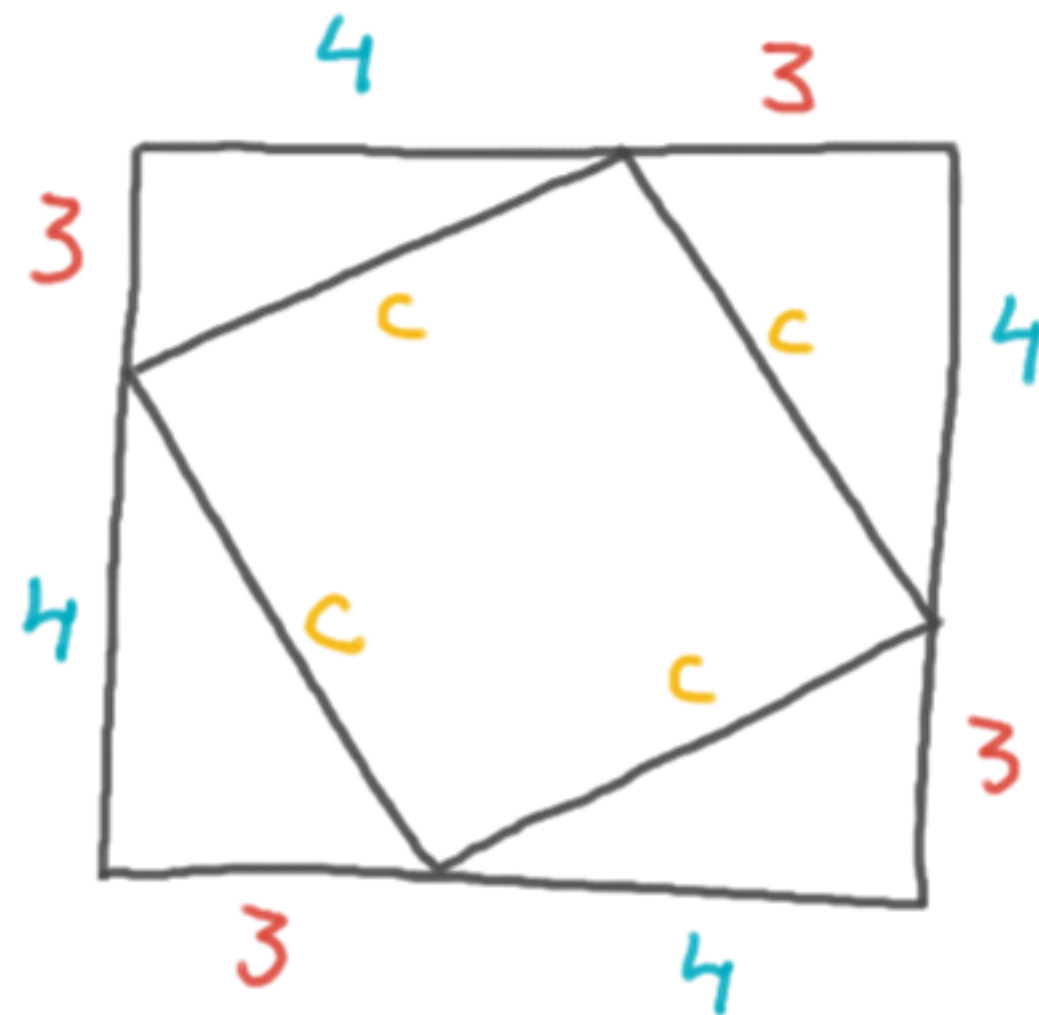
sofistikoitunut proseduraalinen tieto

Oppilas osaa ratkoa suorakulmaisen kolmion sivuista kulmia ja päinvastoin.



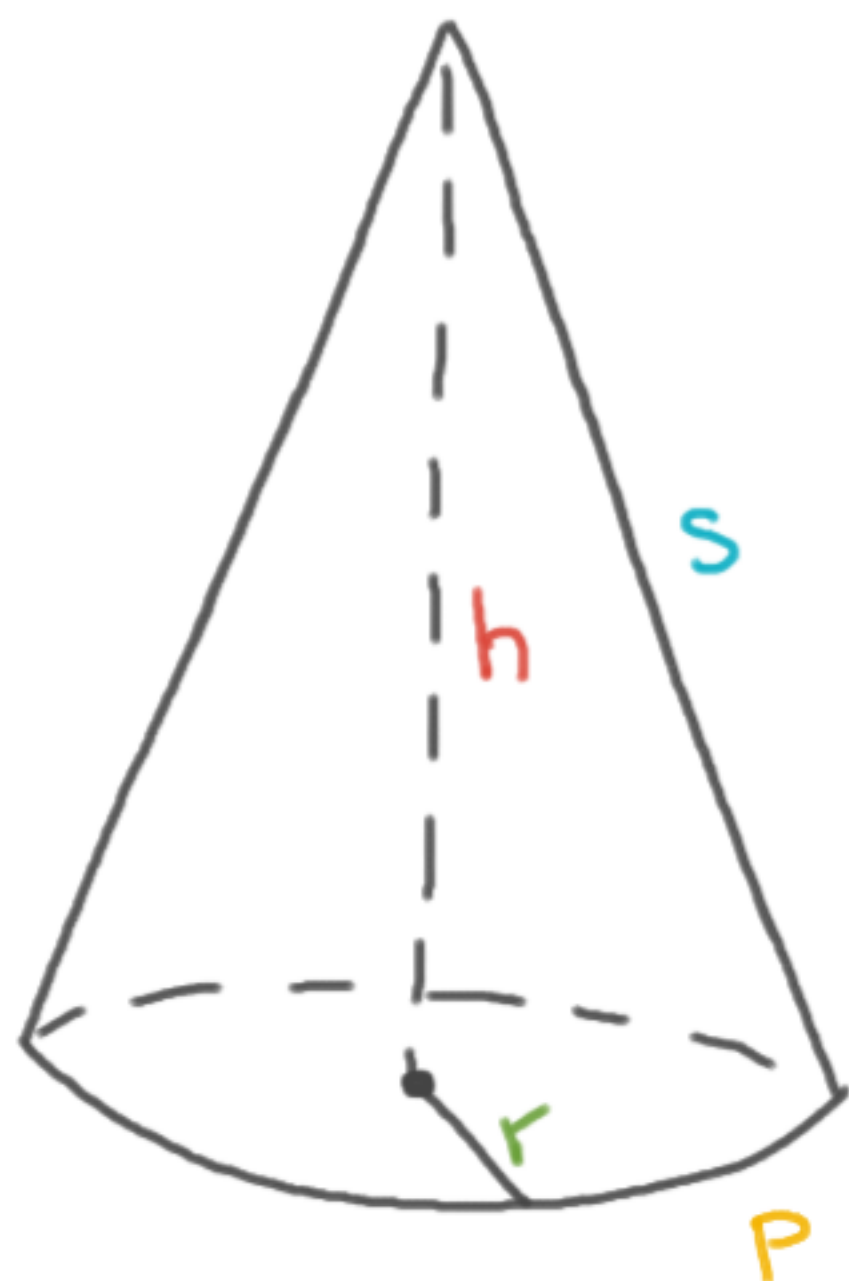
$$\begin{array}{ccc} 5 & 12 & 13 \\ 25 + 144 = 169 \end{array}$$

$$\gamma = 90^\circ, \text{ joss } a^2 + b^2 = c^2$$



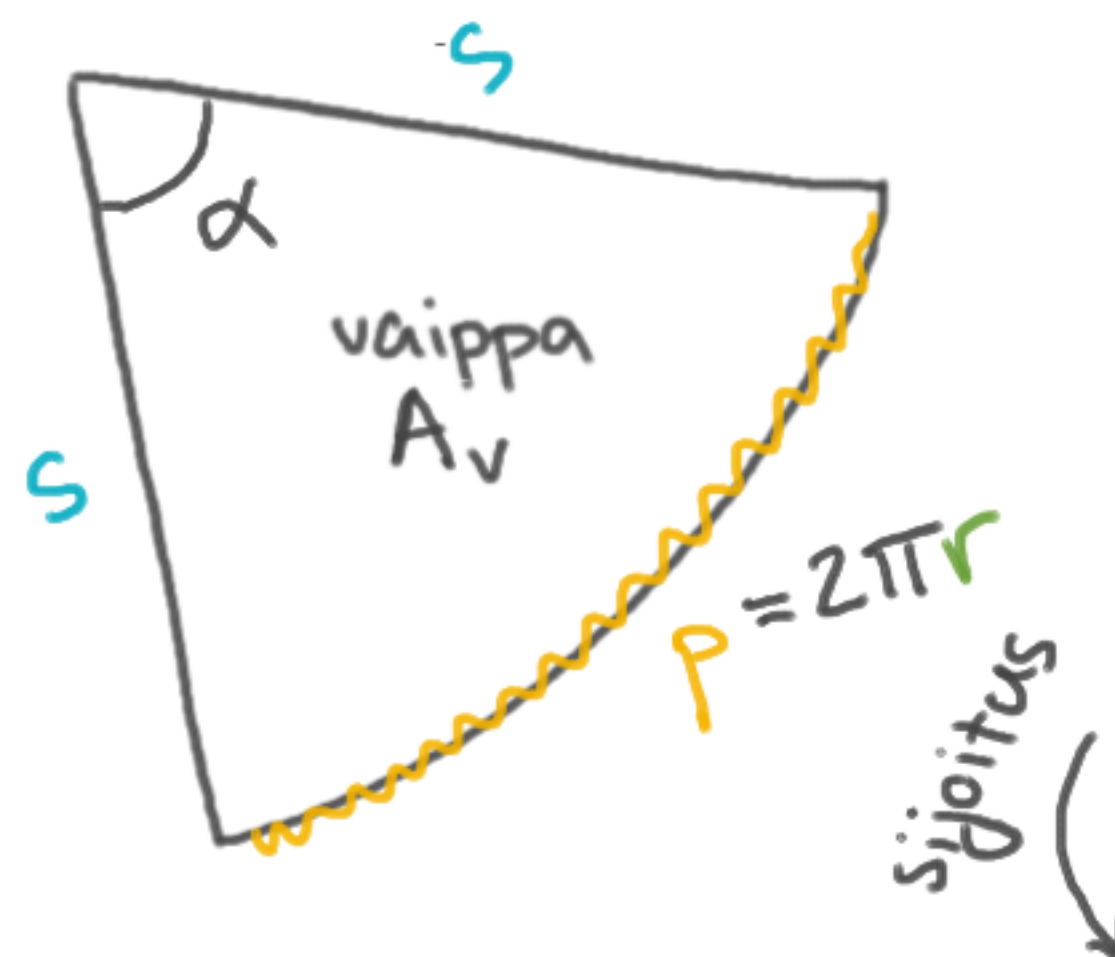
$$\begin{aligned} c^2 &= (3+4)^2 - 4 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \\ &= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4^2 - 4 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \\ &= 3^2 \oplus \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 4} + 4^2 \ominus \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= 3^2 + 4^2 \end{aligned}$$

ja sitten $a = 3$ ja $b = 4$.



Miksi suoran ympyräkartion
vaipan pinta-ala on

$$A_v = \pi r s ?$$



Mitkä pituudet ovat yhtä suuret?

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot s = 2\pi r$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r}{s}$$

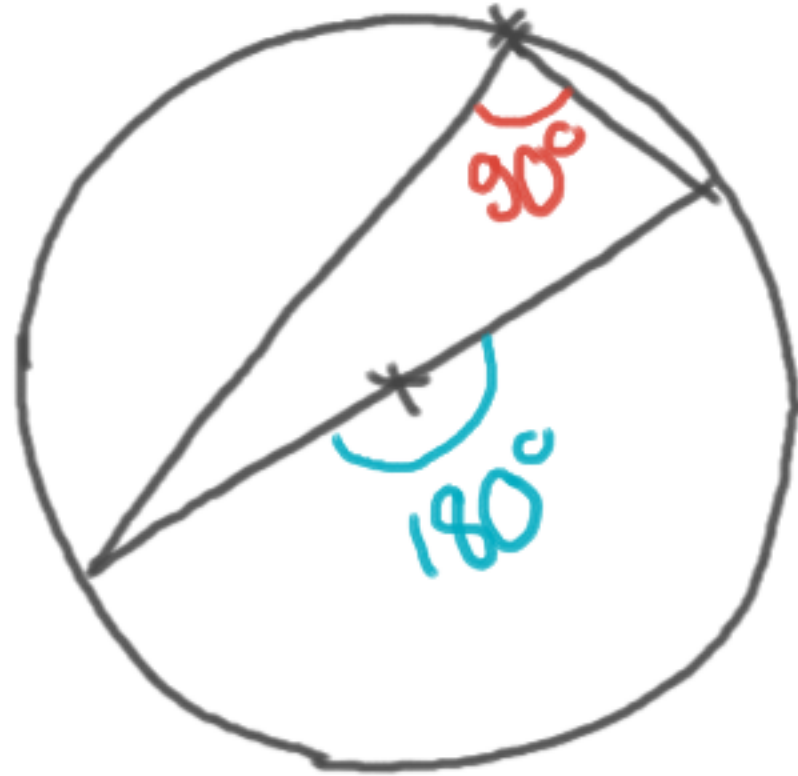
$$A_v = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi s^2 = \frac{r}{s} \cdot \pi s^2$$

$$= \pi r s$$

P perimeter
 r radius
 h height
 s slant height
 vino(hko)

Thaleen lause

Kolmio, jonka kaikki kärjet ovat ympyrän kehällä ja jonka yksi sivu on halkaisija, on suorakulmainen.



S5 Geometria: Laajennetaan pisteen, janan, suoran ja kulman käsitteiden ymmärtämistä ja perehdytään viivan ja puolisuoran käsitteisiin. Tutkitaan suoriin, kulmiin ja monikulmioihin liittyviä ominaisuuksia. Vahvistetaan yhdenmuotoisuuden ja yhtenevyyden käsitteiden ymmärtämistä. Harjoitellaan geometrista konstruointia. Opitaan käyttämään Pythagoraan lausetta, Pythagoraan lauseen käänteislusetta ja trigonometrisia funktioita. Opitaan kehä- ja keskuskulma sekä tutustutaan Thaleen lauseeseen.

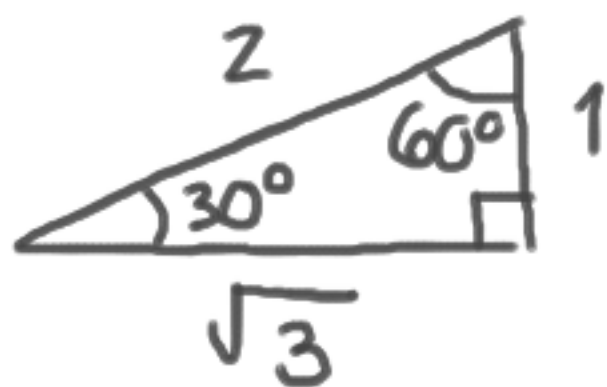
Lasketaan monikulmioiden piirejä ja pinta-aloja.

Harjoitellaan laskemaan ympyrän pinta-ala, kehän ja kaaren pituus sekä sektorin pinta-ala.

Tutkitaan kolmiulotteisia kappaleita. Opitaan laskemaan pallon, lieriön ja kartion pinta-aloja ja tilavuuksia.

Varmennetaan ja laajennetaan mittayksiköiden ja yksikkömuunnosten hallintaa.

Tehtävien laadinnan tueksi



$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

kosini = komplementtikulman sini
 $90^\circ - \alpha$



$$\begin{aligned} 9 + 16 &= 25 &\Rightarrow 3^2 + x^2 &= 5^2 \\ 25 + 144 &= 169 &\Rightarrow x^2 + 12^2 &= 13^2 \\ 36 + 64 &= 100 &\Rightarrow \cdot 2 \left(6^2 + 8^2 &= x^2 \right) \cdot 2 \\ & & & x^2 + 24^2 = 26^2 \end{aligned}$$