

Tuntisuunnitelma

Tunnin teema: Uusi käsite

Oppimistavoitteet:

Teeman tehtävänä on antaa rohkeutta tarttua tehtäviin, jossa ilmenee jokin ennalta tuntematon käsite.

Tunnin aloitus:

Lue tehtävänanto huolellisesti.

Opiskelijoita on hyvä muistuttaa, että ratkaisujen pitää olla hyvin ymmärrettävissä, vaadittavat välivaiheet ja selitykset.

Tehtävissä on suositeltavaa käyttää ohjelmistoja.

Jos tehtävä on ratkaistu ohjelmistoilla, niin perusteluiksi riittää kuvakaappaukset tai selitykset, joista ilmenee mitä on tehty.

B-osion tehtäviä.

Yleisiä havaintoja teeman tehtävistä:

Vaikka tehtävissä nousisi uusi käsite esille ja tehtävä voi sen takia vaikuttaa vaikealta, ei sitä kannata säikähtää.

Oppitunnin sisältö:

Tehtävä 1: Syksy 2023

10. Parilliset ja parittomat funktiot (12 p.)

Funktio $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ on *parillinen*, jos $h(-x) = h(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, ja *pariton*, jos $h(-x) = -h(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Valitse osatehtävissä 10.1–10.4 oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

Kirjoita osatehtävien 10.5 ja 10.6 vastaukset perusteluineen vastauslaatikkoon.

1. Funktio $a(x) = \sin x$ 1p.

2. Funktio $b(x) = \cos x$ 1p.

3. Funktio $c(x) = x \sin x$ 1p.

4. Funktio $d(x) = \sin x + \cos x$ 1p.

5. Oletetaan, että f on pariton. Osoita, että $f(0) = 0$. (4 p.)

6. Oletetaan, että g on parillinen ja derivoituva. Osoita, että g' on pariton. (4 p.)

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Useita eri lähestymistapoja (piirtää kuvaajaa tai kokeilla tietyillä arvoilla, yksikköympyrä)
 - Trigonometristen funktioiden tarkkoja arvoja
 - Kohdassa 6 täytyy muistaa sisäfunktion derivaatan kaava
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
 - Kohdissa 1-4 ei tarvita perusteluja
 - Kohdissa 5 ja 6 tarvitaan perustelut
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - Kohdissa 1-4 erilaisia päättelytapoja
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - GeoGebralla voi piirtää kuvaajat
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - Virheellisiä päätelmiä
 - Ei osaa tulkita kuvaajaa
 - Ei ymmärrä parillisen ja parittoman määritelmää
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - Piirrä kuva
 - Sijota funktioon joku x :n arvo
 - Miettiä annettuja määritelmiä, mitä ne tarkoittavat ja mitä ne kertovat
 - symmetria

Tehtävä 2: Syksy 2024

9. Jaksollisuus (12 p.)

Funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on *jaksollinen*, jos on olemassa sellainen $L > 0$, että sen kuvaaja pysyy samana, kun sitä siirretään L yksikköä vaakasuorassa suunnassa. Tämä ominaisuus voidaan esittää myös ehdolla $f(x + L) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Pienin tällainen luku L on funktion *perusjakso*.

Piirrä jokaisessa osatehtävässä funktion kuvaaja omaan koordinaatistoonsa. Anna vastauksena funktion perusjakso sekä kuvaaja, johon on merkitty perusjakson mittainen osa x -akselia.

1. $f(x) = \sin(2\pi x)$ (4 p.)
2. $g(x) = |\sin(\pi x) + \sin(2\pi x)|$ (4 p.)
3. Anna esimerkki jaksollisesta funktiosta $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jonka perusjakso on 4. (4 p.)

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Funktio määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja sen arvot ovat reaalilukuja
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
 - Selkeät kuvat
 - Kaikista kuvaajista omat kuvat ja niistä täytyy näkyä vähintään kahden perusjakson mittainen osa
 - Kohta 2: kuvaajassa täytyy näkyä itseisarvot
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - Ohjelmistolla
 - Kohta 3: voi olla useita eri funktioita
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - GeoGebralla kuvaajien piirtäminen
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - Käytetty funktiota, jota ei ole määritelty koko reaalilukujoukossa
 - Monta kuvaajaa yhdessä koordinaatistossa
 - Itseisarvon merkit puuttuvat
 - Kuva puuttuu
 - Jaksoa ei ole merkitty
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - Piirrä kuvaajat

Tehtävä 3: Syksy 2024

12. Bézier-käyriä (12 p.)

Aineisto

12.A Teksti ja animaatio: Bézier-käyrän määritelmä

Bézier-käyriä käytetään tietokoneavusteisessa suunnittelussa (CAD), joka on vektorigrafiikan tärkeä sovelluskohde. Bézier-käyrä määritetään niin sanottujen ohjauspisteiden avulla, kuten tekstissä 12.A on kuvattu.

1. Eräs lineaarinen Bézier-käyrä koostuu pisteistä $B(t) = (4t, t + 2)$, $0 \leq t \leq 1$. Määritä tämän käyrän ohjauspisteet. (4 p.)
2. Erään toisen asteen Bézier-käyrän ohjauspisteet ovat $P_0 = (-2, 0)$, $P_1 = (0, 8)$ ja $P_2 = (2, 0)$. Määritä käyrän yhtälö muodossa $y = f(x)$. (8 p.)

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Lukea aineisto
 - Ymmärtää käyrän määritelmä ja osata hyödyntää aineistoa
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
 - Jos ratkaisussa käytetty ohjelmistoa, tulee kertoa erikseen pisteet, ei riitä, että ne ovat näkyvillä
 - Sijoitukset näkyviin
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - Kohta 1: laskemalla ja ohjelmiston avulla
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - CAS-ohjelma
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - Ei osaa hyödyntää aineistoa
 - Määrittää käyrän yhtälön väärin
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - Oikean kaavan valitseminen

Tehtävä 4: Kevät 2022

9. Ympyrä ja numeeriset menetelmät 12 p.

Tarkastellaan yksikköympyrän ensimmäisessä neljänneksessä sijaitsevaa osaa, eli ehtojen $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ määrittämää aluetta B . Arvioidaan alueen B pinta-alaa puolisuunnikassäännöllä ja keskipistesäännöllä. Keskipistesääntö tarkoittaa suorakaidesääntöä, jossa suorakaiteen korkeus määräytyy osavälin keskipisteen mukaan.

Valitse kolme seuraavista väitteistä, ja selvitä, ovatko ne tosia vai epätosia:

- Väite 1. Keskipistesäännöllä voidaan saada arvio, joka on suurempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.
- Väite 2. Keskipistesäännöllä voidaan saada arvio, joka on pienempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.
- Väite 3. Puolisuunnikassäännöllä voidaan saada arvio, joka on suurempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.
- Väite 4. Puolisuunnikassäännöllä voidaan saada arvio, joka on pienempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.

Muista myös perustella vastauksesi.

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Kannattaa tutkia väitteistä, mikä hankalin perustella ja jättää se pois
 - Voi myös piirtää kuvaajan, jota hyödyntää perusteluissa
 - Neljännesympyrän todellinen pinta-ala johon verrataan
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
 - Huolelliset perustelut
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - Voi valita itse, mitkä väitteet perustelee
 - Kokeilemalla (sanalliset perustelut johtopäätöksistä), piirtämällä
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - GeoGebralla voi piirtää havainnollistavia kuvia
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - GeoGebralla tehdyssä ratkaisussa ei näy $\sqrt{1-x^2}$ (-1p)
 - Ei osaa verrata neljännesympyrän todelliseen pinta-alaan
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - Mallinna kuva
 - Mieti, mitä puolisuunnikassääntö ja keskipistesääntö tarkoittaa