7.8

Lasketaan tangentin haluttu kulmakerroin suuntakulman avulla.

$k = \tan\alpha = \tan 45^\circ = 1$

Toisaalta tangentin kulmakerroin kohdassa x on käyrän $y = x^2 - 2x - 3$ derivaatan arvo kohdassa x.

$k = y'(x) = 2x - 2$

Ratkaistaan, missä kohdassa x tangentin kulmakerroin saa arvon 1.

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= 1 \quad \big| +2 \\ 2x &= 3 \quad \big| : 2 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Tangentin kulmakerroin on 1, kun $x = \frac{3}{2}$. Lasketaan paraabelilla olevan pisteen y-koordinaatti.

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = -\frac{15}{4}$$

Paraabelin tangentin suuntakulma on +45° pisteessä $(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4})$.

Vastaus

$(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4})$

7.16

Määritetään käyrien $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ ja $y = 2x^2 + 1$. leikkauspisteiden x-koordinaatit.

$$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} = 2x^2 + 1 \quad \big| \cdot 4$$
$$-x^2 + 6x + 3 = 8x^2 + 4 \quad \big| -8x^2 - 4$$
$$-9x^2 + 6x - 1 = 0 \qquad a = -9,\ b = 6,\ c = -1$$
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-9)} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-6 \pm 0}{-18} = \frac{6}{18}^{(6} = \frac{1}{3}$$

Koska yhtälöllä on vain täsmälleen yksi ratkaisu, on käyrillä täsmälleen yksi leikkauspiste. Lasketaan leikkauspisteen y-koordinaatti.

$$y = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 \qquad y\text{-koordinaatin voi laskea kummasta tahansa käyrästä.}$$
$$= \frac{2}{9} + 1 = \frac{11}{9}$$

Käyrien ainoa leikkauspiste on $(\frac{1}{3},\ \frac{11}{9})$.

Määritetään käyrien derivaattafunktiot ja tangenttien kulmakertoimet leikkauskohdassa $x = \frac{1}{3}$.

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \qquad y_2(x) = 2x^2 + 1$$
$$y_1'(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \qquad y_2'(x) = 4x$$
$$k_1 = y_1'(\tfrac{1}{3}) = \frac{4}{3} \qquad k_2 = y_2'(\tfrac{1}{3}) = \frac{4}{3}$$

Koska leikkauspisteeseen $(\frac{1}{3},\ \frac{11}{9})$ piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat yhtä suuret, niin tangentit yhtyvät ja käyrillä on yhteinen tangentti.

On siis osoitettu, että käyrät sivuavat toisiaan pisteessä $(\frac{1}{3},\ \frac{11}{9})$. □