6.7

Pitää laskea stipendien nykyarvot. Myönnettyjen stipendien yhteenlasketun nykyarvon tulee olla yhtä suuri kuin lahjoitettu rahamäärä 4000 euroa.

Merkitään yhden stipendin suuruutta kirjaimella x.

Ensimmäisen, vuoden kuluttua jaettavan stipendin, nykyarvo on $x \cdot 1{,}045^{-1}$.

Kahden vuoden kuluttua jaettavan stipendin nykyarvo on $x \cdot 1{,}045^{-2}$.
Viimeisen, 20 vuoden kuluttua jaettavan stipendin, nykyarvo on $x \cdot 1{,}045^{-20}$.

Kaikkien stipendien nykyarvojen summa on
$x \cdot 1{,}045^{-1} + x \cdot 1{,}045^{-2} + ... + x \cdot 1{,}045^{-20}$.

Summa on geometrinen summa, jossa yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 20$, ensimmäisen yhteenlaskettava $a_1 = x \cdot 1{,}045^{-1}$ ja suhdeluku $q = 1{,}045^{-1}$.
Summan arvo on

$$S_{20} = \frac{x \cdot 1{,}045^{-1} \cdot (1 - (1{,}045^{-1})^{20})}{1 - 1{,}045^{-1}} \qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$= \frac{x \cdot 1{,}045^{-1} \cdot (1 - 1{,}045^{-20})}{1 - 1{,}045^{-1}}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan stipendin suuruus x.

$$\frac{x \cdot 1{,}045^{-1} \cdot (1 - 1{,}045^{-20})}{1 - 1{,}045^{-1}} = 4000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 307{,}50 \text{ (€)}$$

Stipendin suuruus voi olla 300 euroa.
Vastaus
300 €

6.11

a) Monna tallettaa tilille rahaa yhteensä $12 \cdot 175\ € = 2100\ €$.

Lasketaan tilin nettokorkokanta.

$0,70 \cdot 1,15\,\% = 0,805\,\%$ Lähdevero 30 %.
$100\,\% - 30\,\% = 70\,\% = 0,70$

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 12 kuukautta, toinen talletus 11 kuukautta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 1 kuukauden.

Lasketaan, kuinka paljon korkoa kertyy yhteensä.

$$175 \cdot 0,00805 \cdot \frac{12}{12} + 175 \cdot 0,00805 \cdot \frac{11}{12} + ... + 175 \cdot 0,00805 \cdot \frac{1}{12}$$
$$= 175 \cdot 0,00805 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + ... + 1)$$

Sulkeissa on aritmeettinen summa, jossa yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 12$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 12$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_{12} = 1$. Lasketaan summan arvo.

$$S_{12} = 12 \cdot \frac{12+1}{2} = 78 \qquad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Lasketaan kertyvän koron määrä.

$$175 \cdot 0,00805 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + ... + 1) = 175 \cdot 0,00805 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78 \approx 9,16\ \ (€)$$

Vuoden lopussa koron maksamisen jälkeen tilin pääoma on

$2100\ € + 9,16\ € = 2109,16\ €$

b) Merkitään kuukausittaisen talletuksen suuruutta kirjaimella x.

a-kohdan perusteella tilillä on rahaa vuoden lopussa

$$12x + x \cdot 0{,}00805 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78 \text{ (€)}.$$

Ratkaistaan, kuinka suurella kuukausittaisella talletuksella x tilillä on vuoden lopussa rahaa 2000 €.

$$12x + x \cdot 0{,}00805 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78 = 2000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 166 \text{ (€)}$$

Kuukausittaisen talletuksen tulisi olla 166 euroa.

Vastaus

a) 2109,16 €
b) 166 €

6.12

a) Vakuutuksen nettokorkokanta on 4,0 %. Pääoma kasvaa vuosittain 1,04-kertaiseksi.

Ensimmäinen sijoitus kasvaa korkoa 2035 – 2019 = 16 vuotta, toinen sijoitus 15 vuotta ja niin edelleen. Viimeinen sijoitus kasvaa korkoa 1 vuoden.

Lasketaan, kuinka paljon tilillä on rahaa vuoden 2035 lopussa.

$$700 \cdot 1,04^{16} + 700 \cdot 1,04^{15} + ... + 700 \cdot 1,04^{2} + 700 \cdot 1,04^{1}$$
$$= 700 \cdot 1,04^{1} + 700 \cdot 1,04^{2} + ... + 700 \cdot 1,04^{15} + 700 \cdot 1,04^{16}$$

Kyseessä on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 700 \cdot 1,04^{1}$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 16$ ja suhdeluku $q = 1,04$. Lasketaan summan arvo.

$$S_{16} = \frac{700 \cdot 1,04 \cdot (1 - 1,04^{16})}{1 - 1,04} \qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$
$$\approx 15\,888 \text{ (€)}$$

Pääoma vuoden 2035 lopussa on 15 888 euroa.

b) Merkitään vuotuisen sijoituksen suuruutta kirjaimella x.

a-kohdan perusteella Samulin sijoituksen pääoma vuoden 2035 lopussa on

$$\frac{x \cdot 1,04 \cdot (1 - 1,04^{16})}{1 - 1,04}.$$

Ratkaistaan, kuinka suurella vuotuisella sijoituksella x pääoma vuoden 2035 lopussa on 20 000 €.

$$\frac{x \cdot 1,04 \cdot (1 - 1,04^{16})}{1 - 1,04} = 20\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 881,15 \text{ (€)}$$

Pääoma on 20 000 €, jos vuotuinen sijoitus on 882 €.

Vastaus

a) 15 888 € **b)** 882 €

6.15

a) Sekajätteen määrä vähenee joka vuosi 2,5 %, joten jätemäärä on aina 100 % – 2,5 % = 97,5 % edellisen vuoden määrästä. Jätemäärä tulee siis joka vuosi 0,975-kertaiseksi.

Lasketaan seuraavan kymmenen vuoden aikana kertynyt jätemäärä.

$$42 \cdot 0{,}975 + 42 \cdot 0{,}975^2 + 42 \cdot 0{,}975^3 + ... + 42 \cdot 0{,}975^{10}$$

Summa on geometrinen summa, jonka ensimmäisen yhteenlaskettava $a_1 = 42 \cdot 0{,}975$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 10$ ja suhdeluku $q = 0{,}975$. Lasketaan summan arvo.

$$S_{10} = \frac{42 \cdot 0{,}975 \cdot (1 - 0{,}975^{10})}{1 - 0{,}975} \approx 366{,}37 \text{ (t)}$$

Jätettä kertyy yhteensä 370 tonnia.

b) Lasketaan, kuinka paljon sekajätettä kertyisi, jos määrä kasvaisi joka vuosi 1,8 %. Tällöin määrä tulisi joka vuosi 1,018-kertaiseksi.

Seuraavan kymmenen vuoden aikana kertynyt jätemäärä olisi

$$42 \cdot 1{,}018 + 42 \cdot 1{,}018^2 + 42 \cdot 1{,}018^3 + ... + 42 \cdot 1{,}018^{10}$$

Summa on geometrinen summa, jonka ensimmäisen yhteenlaskettava $a_1 = 42 \cdot 1{,}018$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 10$ ja suhdeluku $q = 1{,}018$. Lasketaan summan arvo.

$$S_{10} = \frac{42 \cdot 1{,}018 \cdot (1 - 1{,}018^{10})}{1 - 1{,}018} \approx 463{,}91 \text{ (t)}$$

Jätettä kertyisi 463,91 – 366,37 = 97,54 ≈ 98 tonnia enemmän.

Vastaus

a) 370 tonnia
b) 98 tonnia