

Pitkän matematiikan preliminäärikoe TIMONEN

Koe koostuu 13 tehtävästä, joihin vastataan seuraavasti: neljään tehtävään A-osassa, kolmeen tehtävään B1-osassa ja kolmeen tehtävään B2-osassa. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0-12. Kokeen maksimipistemäärä on 120. Voit vastata kaikkiin tehtäviin kokeen alusta lähtien, mutta CAS-laskinohjelmat tulevat käyttöösi vasta, kun palautat A-osan tehtävät ja palautuksen jälkeinen harkinta-aika on päättynyt.

A-osa: Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1-4. Apuvälineenä saa käyttää taulukkokirjaa. Laskinohjelmistojen (CAS) ja fyysisen laskimen käyttö ei ole sallittu sinä aikana, kun A-osan tehtävät ovat palauttamatta. Koejärjestelmän KCalc-laskinohjelma on käytössä myös kokeen A-osassa.

B-osa: Kokeen B-osassa ovat käytössä kaikki koejärjestelmään sisältyvät ohjelmat. B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5-9. B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10-13. Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi. Tarkista lopuksi, että vastasit oikeaan määrään tehtävistä.

Aineistot

Aineistot avautuvat "Näytä aineistot"-linkistä toiselle välilehdelle selaimessa. Voit liikkua aineistojen ja vastausosion välillä yläreunan välilehtien kautta.

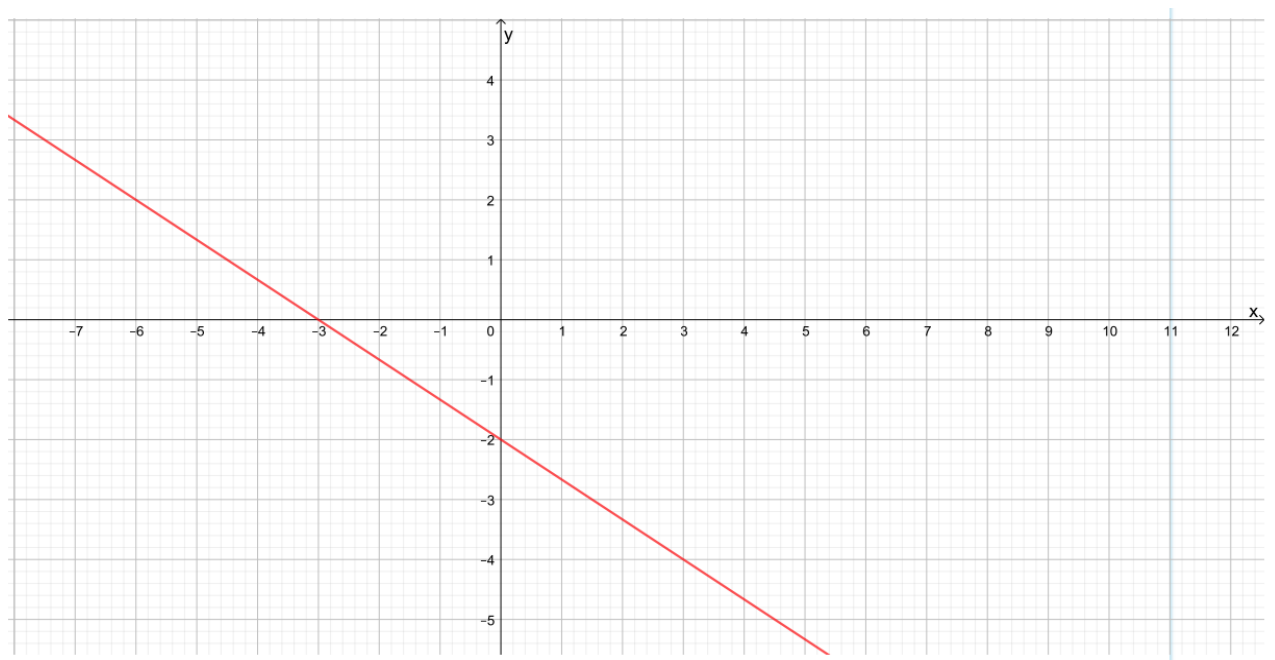
[Näytä aineistot](#)

A-osa / Del A

1. Valitse oikea vastaus.

(12 p)

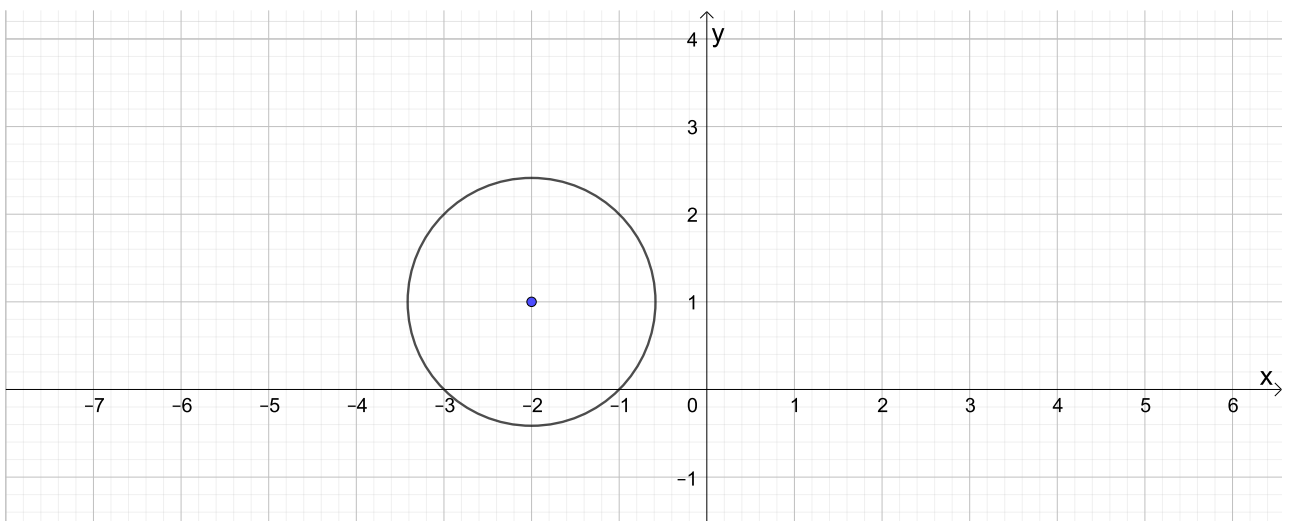
1.1.



Kuvassa olevan suoran yhtälö on

- ☐ $2x + 3y - 6 = 0$
- ☐ $3x + 2y - 6 = 0$
- ☐ $2x + 3y + 6 = 0$
- ☐ $3x + 2y + 6 = 0$
- ☐ $y = -\frac{2}{3}x + 2$
- ☐ $y = -3x - 2$
- ☐ $y = -\frac{2}{3}x$

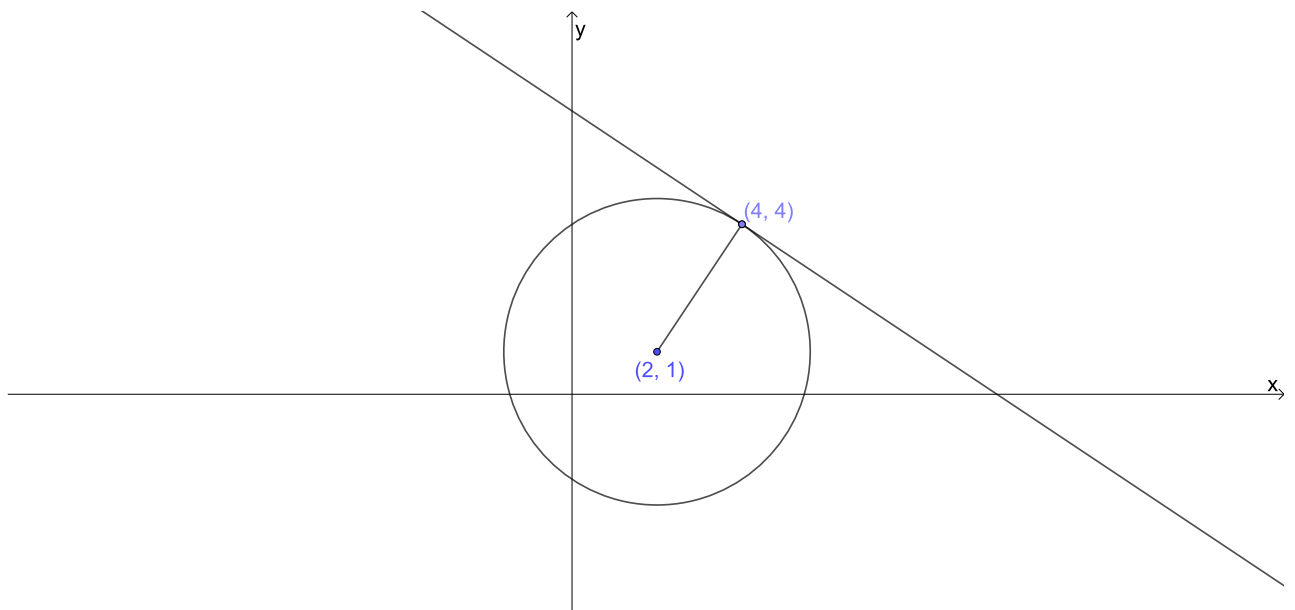
1.2.



Kuvassa olevan ympyrän yhtälö on

- ☐ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$
- ☐ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$
- ☐ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$
- ☐ $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 2$
- ☐ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2$
- ☐ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$
- ☐ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$
- ☐ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$

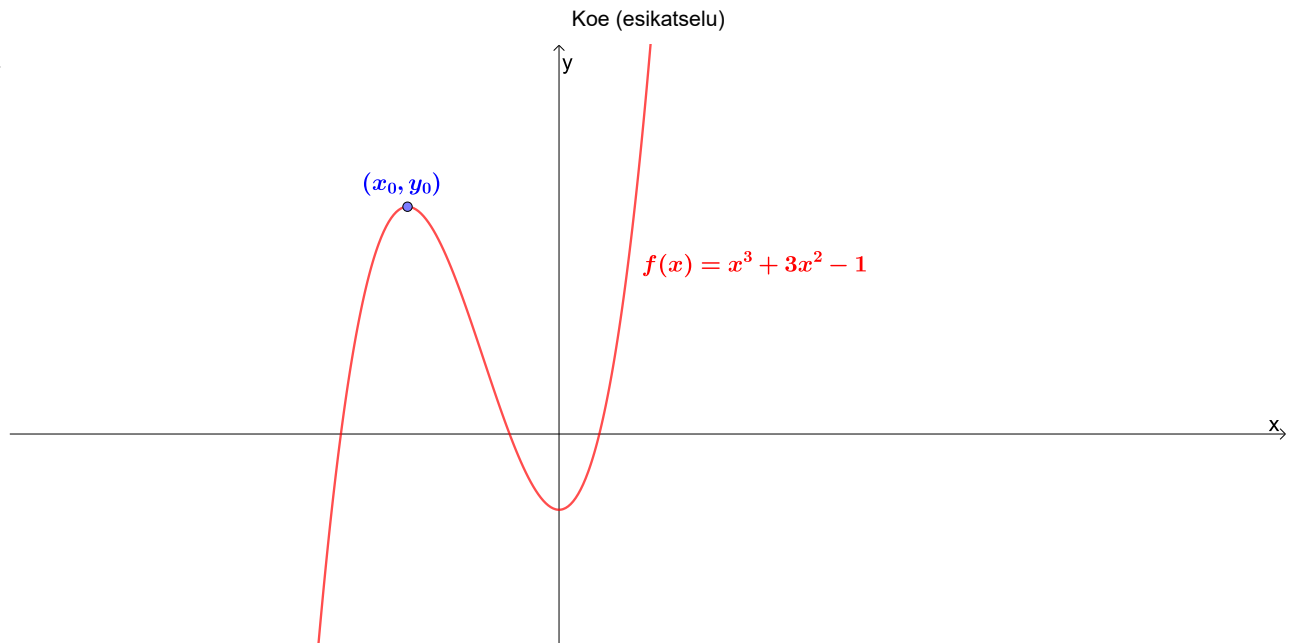
1.3.



Ympyrälle piirretyn tangentin yhtälö on

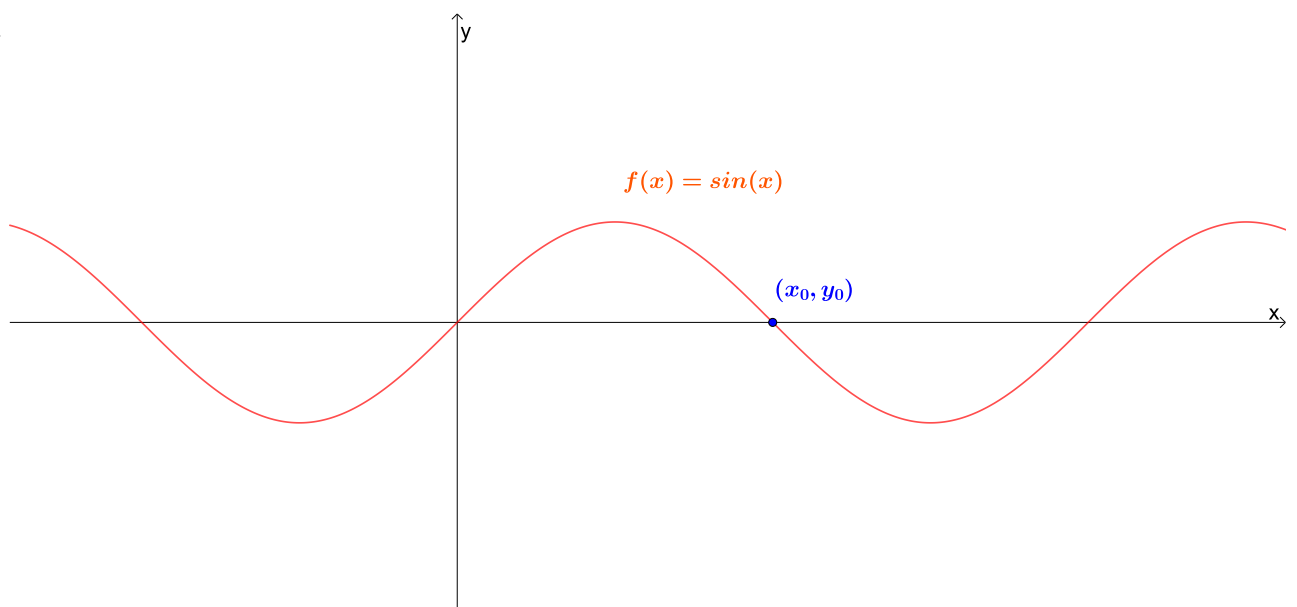
- ☐ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{20}{3}$
- ☐ $y = \frac{3}{2}x + 2$
- ☐ $y = \frac{3}{2}x - 2$
- ☐ $y = \frac{3}{2}x + \frac{20}{3}$
- ☐ $y = -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$
- ☐ $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

1.4.

Määritä pisteen (x_0, y_0) koordinaatit

- ☐ $(3, -1)$
- ☐ $(-3, 2)$
- ☐ $(-1, 1)$
- ☐ $(-2, 2)$
- ☐ $(-2, 3)$
- ☐ $(0, -1)$

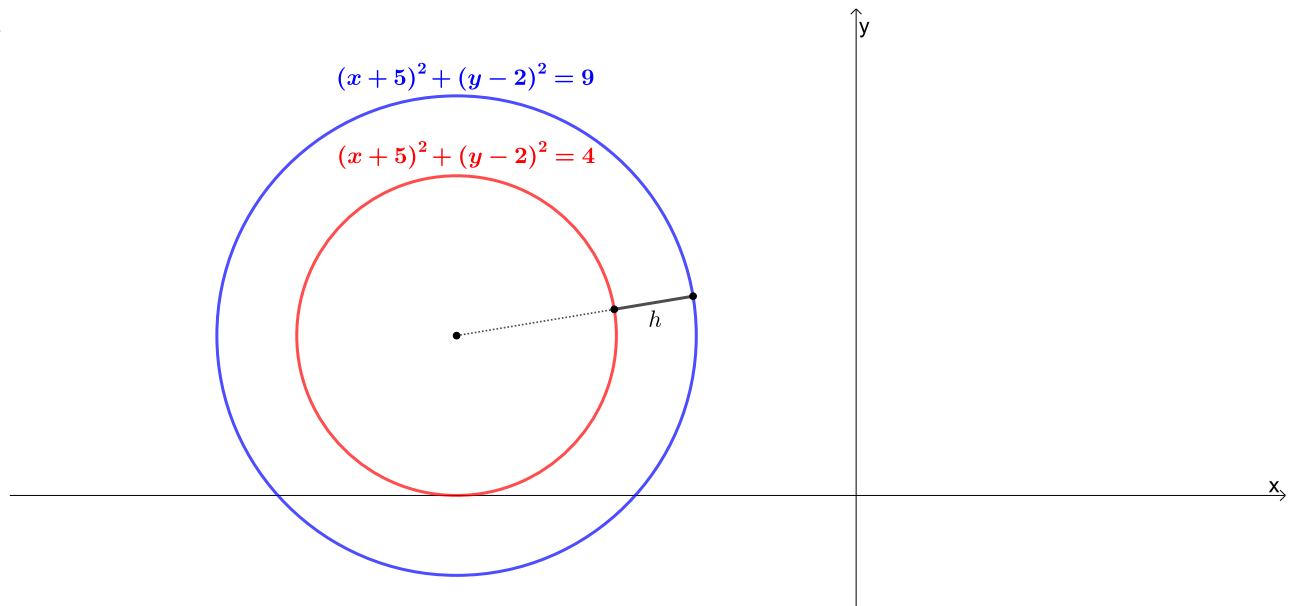
1.5.

Määritä pisteen (x_0, y_0) koordinaatit radiaaneina.

- ☐ $(\pi, 0)$
- ☐ $(\frac{\pi}{2}, 0)$
- ☐ $(\frac{3\pi}{2}, 0)$
- ☐ $(3\pi, 0)$

- ☐ $(\frac{2\pi}{3}, 0)$
- ☐ $(\frac{\pi}{3}, 0)$
- ☐ $(2\pi, 0)$

1.6.



Määritä yhtenäisellä viivalla piirretyn janan h pituus.

- ☐ $h = 5$
- ☐ $h = 1$
- ☐ $h = 3$
- ☐ $h = 2$
- ☐ $h = 4$
- ☐ $h = 16$

2.

a) Sievennä lauseke $\frac{x^6 x^{10}}{(x^3)^4}$.

b) Ratkaise yhtälö $15x^2 - 3x = 0$.

c) Ratkaise yhtälö $2^{1-x} = \frac{1}{64}$.

d) Olkoon $f(x) = e^{4x}$. Määritä käyrälle $y = f(x)$ kohtaan $x = 0$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

(12 p)

Ohje kuvien ja kaavojen liittämiseen

3.

Olkoot vektorit $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$.

a) Laske vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ pituudet.

b) Laske pistetulo $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

c) Laske vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma asteen sadasosan tarkkuudella.

(12 p)

Ohje kuvien ja kaavojen liittämiseen

4. Määritä funktion $f(x) = x^3(x+4)$ pienin arvo. (12 p)

Ohje kuvien ja kaavojen liittämiseen

Palauta A-osa

Saat CAS-laskinohjelmat käyttöön palautettuasi A-osan.

B-osa / Del B

5. **B1**

Liitteenä olevassa jakauma.ods -tiedostossa on Mäntylän lukion matematiikan kurssikokeen pistejakauma.

[Lataa pistejakauma](#)

Halutessasi voit ladata pistejakauman myös tiedostomuotona .ggb, .tns tai .vcp.

- a)** Montako opiskelijaa osallistui kokeeseen? (1 p)
- b)** Havainnollista jakaumaa pylväskuviolla. (2 p)
- c)** Laske arvosanojen suhteelliset frekvenssit f %. (3 p).
- d)** Määritä arvosanojen keskiarvo ja keskihajonta. (6 p)

(12 p)

[Ohje kuvien ja kaavojen liittämiseen](#)

6. **B1**

Tarkastellaan yhtälöä $(a + 1)x^2 + 2(a - 1)x - 2 = 0$.

- a)** Osoita, että yhtälöllä on ratkaisuja kaikilla parametrin a arvoilla.
- b)** Millä parametrin a arvoilla ratkaisut ovat erimerkkiset?

(12 p)

[Ohje kuvien ja kaavojen liittämiseen](#)

7. **B1**

Liitteenä olevassa dynaamisessa kuviossa [kuvio.ggb](#)

1) pisteiden A ja B paikat ovat kiinteät ja niiden etäisyys on 6,

2) pisteet C ja D ovat janan AB keskinormaalilla ja

3) janan CD pituus on 4.

[Lataa kuvio.ggb](#)

Pistettä C voidaan liikutella pitkin janan AB keskinormaalialia, siten että janan CD pituus on koko ajan 4.

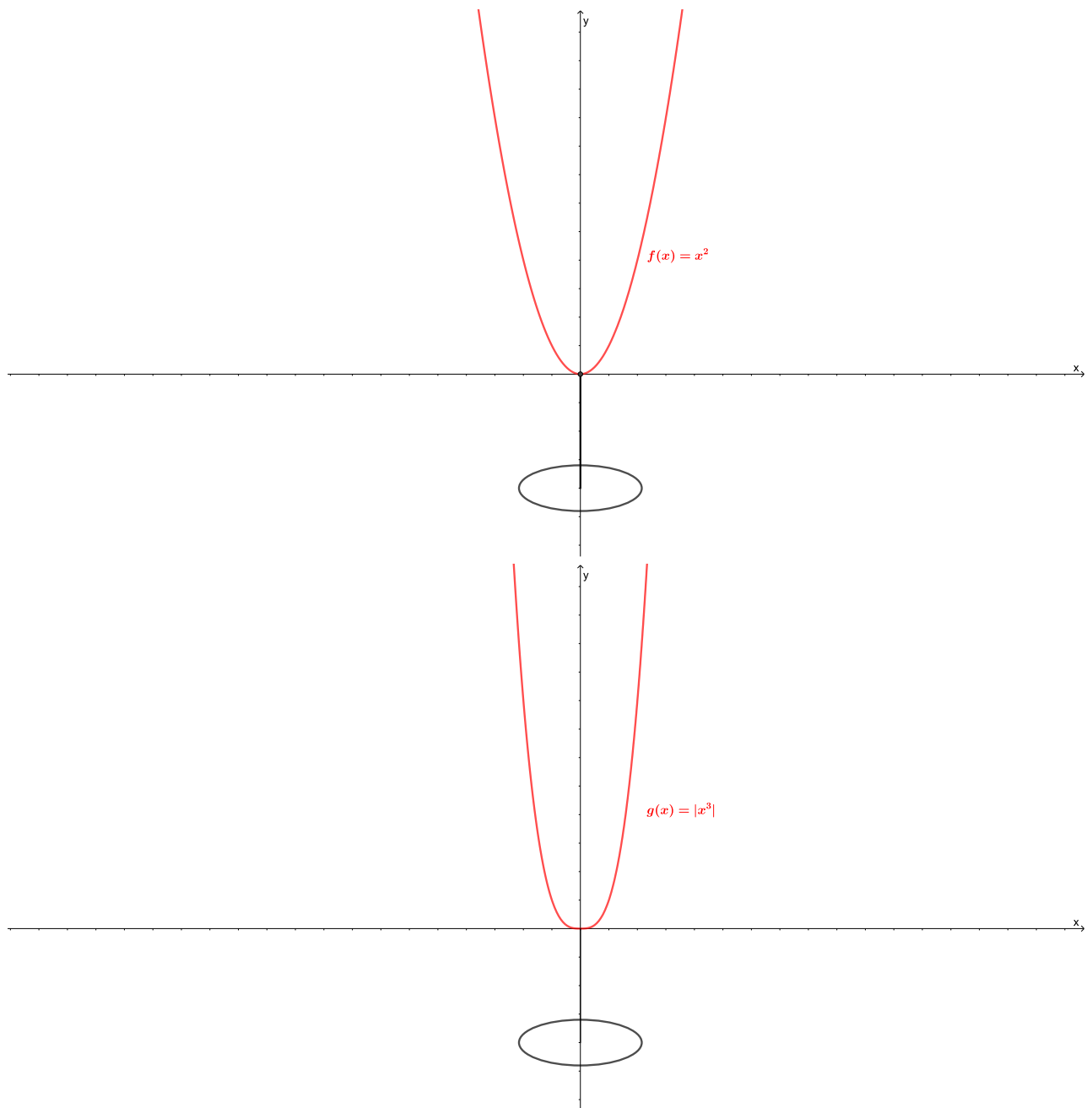
a) Laske alkuperäisen kuvion eli nelikulmion ADBC ala. (4 p)

b) Liikuttele pistettä C. Miten pisteen C paikan vaihtaminen vaikuttaa kuvion alaan? (2p)

c) Todista b-kohdan väitteesi huomioiden eri vaihtoehdot. (6p).

(12 p)

[Ohje kuvien ja kaavojen liittämiseen](#)

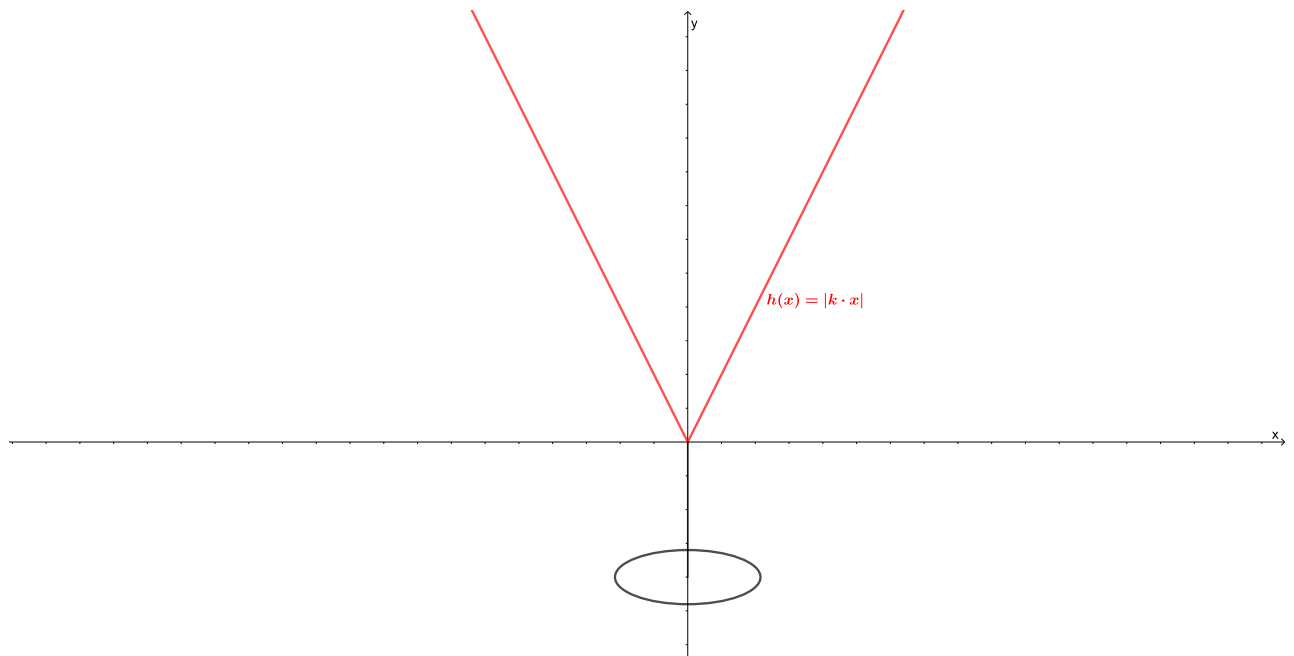
8. **B1**

Kahden eri pokaalin maljaosat syntyvät, kun käyrät $f(x) = x^2$ ja $g(x) = |x^3|$ pyörähtävät y -akselin ympäri. Maljoihin kaadetaan yhtä paljon nestettä siten, että myös maljojen nestepinnat ovat yhtä korkealla.

Koordinaatiston pituusyksikkönä on 1 dm.

A) Määritä pokaaliin kaadetun nestemäärän tilavuus.

B) Kolmannen pokaalin maljaosa syntyy, kun käyrä $h(x) = |k \cdot x|$ pyörähtää y -akselin ympäri. Pokaaliin kaadetaan sama määrä nestettä kuin aiempiin pokaleihin. Määritä reaaliluku k siten, että myös kolmannen pokaalin maljaosan nestepinnan korkeus on sama kuin kahden aiemman.



(12 p)

Ohje kuvien ja kaavojen liittämiseen

9. **B1**

Jos valitset tämän tehtävän, ratkaise joko 9.1 TAI 9.2.

9.1

Fibonaccin lukujono **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...** määritellään rekursiivisesti siten, että lukujonon seuraava jäsen on kahden edellisen summa. Lisäksi $F_1 = F_2 = 1$.

a) Määrittele Fibonaccin lukujonon rekursiokaava. (3p)

b) Tutki (valitsemallasi menetelmällä), mikä on Fibonaccin lukujonon suurin kuusinumeroinen luku. Kuinka mones lukujonon jäsen se on? (3p)

c) Kultainen leikkaus saadaan, kun jana jaetaan kahteen osaan niin, että lyhyemmän osan suhde pidempään osaan on sama kuin pidemmän osan suhde koko janaan. Tämä kultainen suhde on arvoltaan $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Fibonaccin peräkkäisten jäsenten suhde lähetty kultaisen leikkauksen suhdetta. Tutki, milloin jonon jäsenten suhde on kolmen desimaalin tarkkuudella sama kuin kultaisen leikkauksen suhde. (6p)

9.2.

Isaac Newton (1643-1727) kehitti nimeään kantavan menetelmän ratkaista yhtälö. Menetelmässä yhtälö kirjoitetaan muotoon $f(x) = 0$ ja tutkitaan funktion $f(x)$ nollakohtia. Newtonin menetelmän iterointikaava on

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

missä $f'(x)$ on funktion $f(x)$ derivaattafunktio.

Toisinaan derivaattafunktion $f'(x)$ muodostaminen voi olla työlästä, jolloin Newtonin menetelmää ei voi käyttää. Tietokoneohjelmien avulla yhtälön ratkaisut voidaan selvittää numeerisesti ns. *sekanttimenetelmällä*. Menetelmän erikoistapauksessa eli **regula falsi -menetelmässä** oletetaan, että funktio $f(x)$ saa annetun välin päätepisteissä erimerkkiset arvot. Sekanttimenetelmä saadaan Newtonin menetelmän palautuskaavasta korvaamalla derivaattafunktio $f'(x)$ käyrälle piirretyn sekantin kulmakertoimella

$$k = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Sekanttimenetelmän iterointikaavaksi saadaan näin ollen

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^{2x} - e^x$.

a) Osoita, että funktiolla $f(x)$ on nollakohta välillä **[1, 2]**. (3p)

b) Ratkaise funktion $f(x)$ välillä **[1, 2]** oleva nollakohta sekanttimenetelmän avulla. Ilmoita vastauksesi kolmen desimaalin tarkkuudella. (9p)

(12 p)

Ohje kuvien ja kaavojen liittämiseen

10. **B2**

Tehdas valmistaa hehkulamppuja ja energiansäästölamppuja. Hehkulamppujen kestoajan jakaumalla on tiheysfunktio f :

$$f(t) = \begin{cases} -6t^2 + 24t - 22,5 & , \text{ kun } 1,5 \leq t \leq 2,5, \\ 0 & , \text{ muualla,} \end{cases}$$

missä muuttuja t ilmaisee ajan tuhansina tunteina.

Energiansäästölamppujen kesto aika noudattaa normaalijakaumaa keskiarvona 24000 tuntia ja keskihajonta 8200 tuntia. Asiakas ostaa 5 hehkulamppua ja 5 energiansäästölamppua.

Millä todennäköisyydellä

a) kaikki viisi hehkulamppua kestävät vähintään 2200 tuntia (4 p)

b) kaikki viisi energiansäästölamppua kestävät vähintään 2200 tuntia? (4 p)

c) vähintään kolme hehkulamppua ja vähintään kolme energiansäästölamppua kestää yli 2200 tuntia

(4 p) (12 p)

Ohje kuvien ja kaavojen liittämiseen

11. **B2**

Tarkastele aineistoista löytyvää videota [trigonometria](#) ja vastaa sen perusteella kaikkiin kohtiin.

a) Videolla on funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajat. Funktioiden lausekkeet ovat muotoa $A \cdot \sin(Bx)$ tai $C \cdot \cos(Dx)$, missä $A, B, C, D \in \mathbb{N}$. Määritä funktioiden lausekkeet. (2p)

b) Videolla piirretään kohtaan x funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajille tangentit, jotka muodostavat yhdessä y -akselin kanssa kolmion. Perustele, miksi kolmiota ei voida määrittää, kun $x = \frac{\pi}{2}$. (2p)

c) Määritä videolla esiintyneen kolmion suurin mahdollinen pinta-ala, kun $x \in \left[\frac{7\pi}{12}, \pi \right]$. (8p).

(12 p)

Ohje kuvien ja kaavojen liittämiseen

12. **B2**

Osoita (esimerkiksi matemaattisella induktiolla), että luku $n^3 + 5n$ on jaollinen luvulla 6, kun n on luonnollinen luku.

(12 p)

Ohje kuvien ja kaavojen liittämiseen

13. **B2**

Nelisivuisen pyramidin sivutahkot ovat tasasivuisia kolmioita ja pyramidin pohja on neliö, jonka sivun pituus on a . Pyramidin sisään asetetaan kuutio siten, että kuution neljä kärkipistettä ovat pyramidin sivusärmillä ja kuution pohja on pyramidin pohjalla. Määritä kuution särmän pituus. Piirrä kuva.

(12 p)

Ohje kuvien ja kaavojen liittämiseen