

KERTAUS

KERTAUSTEHTÄVIÄ

- K1. a)** Luku jono on aritmeettinen, joten seuraava jäsen saadaan edellisestä lisäämällä erotusluku d . Erotusluku on $d = 16 - 13 = -3$.

$$a_4 = 13 - 3 = 10$$

$$a_5 = 10 - 3 = 7$$

$$a_6 = 7 - 3 = 4$$

Vastaus: 10, 7, 4

- b)** Yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

$$a_n = 19 + (n - 1)(-3)$$

$$a_n = 19 - 3n + 3$$

$$a_n = 22 - 3n$$

Vastaus: $a_n = 22 - 3n$

- c)** Aritmeettinen summa on $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Yhteenlaskettavia on 25, joten summassa $n = 25$.

$$a_{25} = 22 - 3 \cdot 25 = -53$$

$$S_{25} = \frac{25 \cdot (19 - 53)}{2} = -425$$

Vastaus: -425

- K2.** a) Luku jono on geometrinen, joten seuraava jäsen saadaan edellisestä kertomalla suhdeluvulla q . Suhdeluku on $q = \frac{12}{3} = 4$.

$$a_4 = 48 \cdot 4 = 192$$

$$a_5 = 192 \cdot 4 = 768$$

$$a_6 = 768 \cdot 4 = 3072$$

Vastaus: 192, 768, 3072

- b) Yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$$a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$

Vastaus: $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$

- c) Geometrinen summa on $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

Yhteenlaskettavia on 25, joten summassa $n = 25$.

$$S_{25} = \frac{3 \cdot (1 - 4^{25})}{1 - 4} = 1,1258 \dots \cdot 10^{15} \approx 1,12 \cdot 10^{15}$$

Vastaus: $1,12 \cdot 10^{15}$

K3. Myydyt kirjat kuukausittain muodostava lukujonon, joten $a_1 = 3531$ ja $a_5 = 4667$.

- a) Luku jono on aritmeettinen, joten 5. jäsen saadaan lisäämällä ensimmäiseen erotusluku d neljä kertaa.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä erotusluku d .

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + 4 \cdot d \\ 4667 &= 3531 + 4d \\ 4d &= 1136 \quad ||:4 \\ d &= 284 \end{aligned}$$

Myytyjen kirjojen muodostaman lukujonon yleinen jäsen on
 $a_n = 3531 + (n - 1) \cdot 284 = 3247 + 284n$

Vuoden aikana myytyjen kirjojen summa on $S_{12} = \frac{12(a_1 + a_{12})}{2}$.

$$\begin{aligned} a_{12} &= 3247 + 284 \cdot 12 = 6655 \\ S_{12} &= \frac{12(3531 + 6655)}{2} = 61116 \end{aligned}$$

Kirjoja myydään vuoden aikana 61116 kappaletta.

Vastaus: 61116

- b) Luku jono on geometrinen, joten 5. jäsen saadaan kertomalla ensimmäinen jäsen suhdeluvulla q neljä kertaa.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suhdeluku q .

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 \cdot q^4 \\ 4667 &= 3531 \cdot q^4 \quad ||:3531 \\ q^4 &= 1,3217... \\ q &= \pm\sqrt[4]{1,3217...} \\ q &\approx \pm 1,0722.... \end{aligned}$$

Muutoskerroin ei voi tässä olla negatiivinen, joten $q = 1,0722...$

Vuoden aikana myytyjen kirjojen summa on $S_{12} = \frac{a_1(1-q^{12})}{1-q}$.

$$S_{12} = \frac{3531(1-1,0722\ldots^{12})}{1-1,0722\ldots} = 63996,585\ldots \approx 63997$$

Kirjoja myydään vuoden aikana 63997 kappaletta.

Vastaus: 63997

- K4.** a) $100\% + 0,0094\% = 100,0094\%$, joten korkokerroin on $q = 1,0094$.
Talletus kasvaa 10 vuodessa
 $4000\text{ €} \cdot 1,0094^{10} = 4392,310\ldots\text{ €} \approx 4392,31\text{ €}$:n suuruiseksi.

Vastaus: 4392,31 €

- b) Nettokorkokanta on 0,94 %.
Korkokerroin on $q = 1,0094$, korko maksetaan kolme kertaa, joten $n = 3$, ja kasvanut pääoma $K = 1500\text{ €}$. Merkitään alkuperäistä pääomaa kirjaimella k . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä alkuperäinen pääoma k .

$$\begin{aligned} k \cdot 1,0094^3 &= 1500 & \parallel : 1,0094^3 \\ k &= 1458,482\ldots \end{aligned}$$

1458,48 euron talletus ei riitä, joten tilille on talletettava vähintään 1458,49 euroa.

Vastaus: 1458,49 €

- K5.** Korkokanta on 2,6 % ja tällöin nettokorkokanta on $0,7 \cdot 2,6 \% = 1,82 \%$.
Korkokerroin on $q = 1,0182$, alkuperäinen pääoma $k = 1000$ € ja kasvanut pääoma $K = 1500$ €. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä maksettujen korkojen lukumäärä n .

$$1500 = 1000 \cdot 1,0182^n \quad || :1000$$

$$1,5 = 1,0182^n$$

$$n = \log_{1,0182} 1,5$$

$$n = 22,480..$$

Maksettujen korkojen lukumäärä on 22,480..., joten 22 ei aivan riitä talletuksen on oltava tilillä 23 korkokautta eli 23 vuotta.

Vastaus: 23 vuoden kuluttua

- K6.** Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa kolme vuotta, toinen kaksi vuotta ja kolmas vuoden.

1,54 % korkoa vastaava korkokerroin on 1,0154.

Pääomaa on tilillä neljännen vuoden alussa

$$450 \text{ €} \cdot 1,0154^3 + 450 \text{ €} \cdot 1,0154^2 + 450 \text{ €} \cdot 1,0154 \\ = 1392,008... \text{ €} \approx 1392,01 \text{ €}.$$

Vastaus: 1392,01 €

- K7.** Vuoden ensimmäinen talletus ehtii olla tilillä kokonaisen vuoden, joten se kasvaa korkoa $\frac{12}{12}$ korkokannasta. Vuoden toinen talletus ehtii olla tilillä 11 kuukautta, joten se kasvaa korkoa $\frac{11}{12}$ korkokannasta. Vastaavasti seuraavien kuukausitalletusten korot muuttuvat vuoden aikana.

Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskennan avulla.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Vuoden aikana kasvava korko				Korkokanta	0,85 %		
2	Kuukausi	Talletus	Aika tilillä	Korko				
3	1	55 €	12	0,47 €	=B1*\$F\$1*C1/12		kopioidaan alas	
4	2	55 €	11	0,43 €				
5	3	55 €	10	0,39 €				
6	4	55 €	9	0,35 €				
7	5	55 €	8	0,31 €				
8	6	55 €	7	0,27 €				
9	7	55 €	6	0,23 €				
10	8	55 €	5	0,19 €				
11	9	55 €	4	0,16 €				
12	10	55 €	3	0,12 €				
13	11	55 €	2	0,08 €				
14	12	55 €	1	0,04 €				
15			Summa	3,04 €	=summa(D3:D14)			
16			Vuoden aikana tilille kertyy					
17			663,04 €					

Vuosittain tilille talletetaan 663,04 €. Tämä summa kasvaa korkoa korolle periaatteella aina niin monta vuotta, kuin kyseinen talletus on tilillä.

Ensimmäisen vuoden talletukset ehtivät kasvaa korkoa 4 kokonaista vuotta, toisen 3 vuotta jne.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Vuoden aikana kasvava korko				Korkokanta	0,85 %		
2	Kuukausi	Talletus	Aika tilillä	Korko				
3	1	55 €	12	0,47 €	=B1*\$F\$1*C1/12		kopioidaan alas	
4	2	55 €	11	0,43 €				
5	3	55 €	10	0,39 €				
6	4	55 €	9	0,35 €				
7	5	55 €	8	0,31 €				
8	6	55 €	7	0,27 €				
9	7	55 €	6	0,23 €				
10	8	55 €	5	0,19 €				
11	9	55 €	4	0,16 €				
12	10	55 €	3	0,12 €				
13	11	55 €	2	0,08 €				
14	12	55 €	1	0,04 €				
15			Summa	3,04 €	=summa(D3:D14)			
16			Vuoden aikana tilille kertyy					
17			663,04 €					
18								
19	Talletus		Vuosia tilillä	korko korolle	Korkokanta	0,85 %		
20	1. vuosi	663,04 €	4	685,87 €	=B20*(1+\$F\$19)^C20		kopioidaan alas	
21	2. vuosi	663,04 €	3	680,09 €				
22	3. vuosi	663,04 €	2	674,36 €				
23	4. vuosi	663,04 €	1	668,67 €				
24	5. vuosi	663,04 €	0	663,04 €				
25			Tilillä on yhteensä					
26				3 372,03 €	=Summa(D20:D24)			
27								

Viiden vuoden tallettamisen jälkeen tilille on kertynyt 3372,03 €.

Vastaus: 3372,03 €

- K8.** Ensimmäinen talletus ehtii kasvaa korkoa korolle periaatteella 6 vuotta. Toinen talletus ehtii kasvaa korkoa korolle periaatteella 4 vuotta ja kolmas talletus 2 vuotta. Korkokerroin on $q = 1,025$. Merkitään talletettua pääomaa kirjaimella k . Muodostetaan talletussumman avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä talletuspääoma k .

$$k \cdot 1,025^6 + k \cdot 1,025^4 + k \cdot 1,025^2 = 70500$$

$$1 \quad \text{Ratkaise } (k \cdot 1,025^6 + k \cdot 1,025^4 + k \cdot 1,025^2 = 70500)$$



$$\approx \{k = 21272.5428\}$$

Kerralla tehtävä talletus on 21 272,54 €.

Kymmenen vuoden päästä 1. talletus on kasvanut 10 vuotta korkoa, 2. talletus 8 vuotta ja 3. talletus 6 vuotta.

Lasketaan talletuspääoma korkoa korolle periaatteella.

$$21272,54 \text{ €} \cdot 1,025^{10} + 21272,54 \text{ €} \cdot 1,025^8 + 21272,54 \text{ €} \cdot 1,025^6$$

$$= 77818,798 \dots \text{€}$$

$$\approx 77\,818,80 \text{ €}$$

Vastaus: 21 272,54 €, 77 818, 80 €

- K9.** a) Joannan lainan ensimmäisen maksuerän koron suuruus on $0,039 \cdot 860 \text{ €} = 33,54 \text{ €}$.

Vastaus: 33,54 €

- b) Joannan tasalyhennyslainan yhden lyhennyksen suuruus on

$$\frac{860 \text{ €}}{5} = 172 \text{ €}.$$

Lainan ensimmäisen maksuerän suuruus on

$$172 \text{ €} + 33,54 \text{ €} = 205,54 \text{ €}.$$

Vastaus: 205,54 €

- K10.** Koska Viikkien lainan korkokanta on 3,6 %, korkokerroin on $q = 1,036$. Maksuerien määrä on 10.

Lasketaan Viikkien maksuerän suuruus.

$$\begin{aligned} A &= K \cdot q^n \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n} \\ &= 45\,000 \cdot 1,036^{10} \cdot \frac{1 - 1,036}{1 - 1,036^{10}} \\ &= 5438,168... \\ &\approx 5438,17 \end{aligned}$$

Annuiteetin suuruus on 5438,17 €.

Viikit maksavat pankille takaisin $10 \cdot 5438,17 \text{ €} = 54\,381,70 \text{ €}$, joten he maksavat korkoa yhteensä $54\,381,70 \text{ €} - 45\,000 \text{ €} = 9381,70 \text{ €}$

Vastaus: 5438,17 €; 9381,70 €

- K11. a)** Anna-Marian lainan lyhennysten lukumäärä on $2 \cdot 12 = 24$, joten jokaisen lyhennyksen suuruus on $\frac{2400 \text{ €}}{24} = 100 \text{ €}$.

Koron suuruus ensimmäisessä maksuerässä on

$$\begin{aligned} r &= kit \\ &= 2400 \text{ €} \cdot 0,076 \cdot \frac{1}{12} \\ &= 15,20 \text{ €}. \end{aligned}$$

Vastaus: lyhennys 100 €, korko 15,20 €

- b)** Lainapääoman suuruus ensimmäisen lyhennyksen jälkeen on $2400 \text{ €} - 100 \text{ €} = 2300 \text{ €}$.

Vastaus: 2300 €

- c) Toisen lyhennyksen yhteydessä maksettavan koron suuruus on
 $r = kit$

$$\begin{aligned} &= 2300 \text{ €} \cdot 0,076 \cdot \frac{1}{12} \\ &= 14,566... \text{ €} \\ &\approx 14,57 \text{ €}. \end{aligned}$$

Anna-Maria maksaa 14,57 € korkoa toisen lainan lyhennyksen yhteydessä.

Vastaus: 14,57 €

- K12.** Antun lainapääoma oli aluksi $K = 24\,000 \text{ €}$, lyhennysten määrä
 $n = 2 \cdot 10 = 20$.

Koska lainaa lyhennetään kahdesti vuodessa, jaetaan korkokanta kahdella
 $\frac{2,34\%}{2} = 1,17\%$, joten korkokerroin $q = 1,0117$.

Lasketaan Antun maksuerän suuruus ennen muutosta.

$$\begin{aligned} A &= K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \\ &= 24\,000 \cdot 1,0117^{20} \cdot \frac{1-1,0117}{1-1,0117^{20}} \\ &= 1352,845.. \\ &\approx 1352,85 \end{aligned}$$

Lasketaan jäljellä oleva lainapääoma, kun lainaa on maksettu kahden vuoden ajan eli $2 \cdot 2 = 4$ maksuerää.

$$\begin{aligned} V &= K \cdot q^k - A \cdot \frac{1-q^k}{1-q} \\ &= 24\,000 \cdot 1,0117^4 - 1352,85 \cdot \frac{1-1,0117^4}{1-1,0117} \\ &= 19\,635,953... \\ &\approx 19\,635,95 \end{aligned}$$

Jäljellä oleva lainapääoma on 19 635,95 euroa. Lasketaan uusi annuiteetti. Lainapääoma on $K = 19\,635,95$ €, lyhennysten määrä $n = 20 - 4 = 16$.

Koska $\frac{3,45\%}{2} = 1,725\%$ korkokerroin on 1,01725.

$$\begin{aligned} A &= K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \\ &= 19\,635,95 \cdot 1,01725^{16} \cdot \frac{1-1,01725}{1-1,01725^{16}} \\ &= 1414,876... \\ &\approx 1414,88 \end{aligned}$$

Antun uusi maksuerä on 1414,88 €.

Vastaus: 1414,88 €

- K13. a)** Vesan Veneveistämön liikevaihto kesänaikana on $5 \cdot 7500 \text{ €} = 37\,500 \text{ €}$.

Vastaus: 37 500 €

- b)** Veistämön vuokra on yhteensä $3 \cdot 500 \text{ €} = 1500 \text{ €}$.
Raaka-ainekustannukset ovat yhteensä $5 \cdot 800 \text{ €} = 4000 \text{ €}$.
Arvonlisäverottomat kulut ovat yhteensä $1500 \text{ €} + 4000 \text{ €} = 5500 \text{ €}$.

Veneveistämön tulos saadaan vähentämällä liikevaihdosta kulut.

Vesan Veneveistämön tulos on siis $37\,500 \text{ €} - 5500 \text{ €} = 32\,000 \text{ €}$.

Vastaus: 32 000 €

- K14.** Taulukoidaan yrityksen liikevaihto, kulut ja tulos ennen muutoksia sekä muutoksien jälkeen.

Tulos lasketaan vähentämällä liikevaihdosta kulut.

	Liikevaihto	Kulut	Tulos
Ennen	16 000 €	12 000 €	$16\,000\text{ €} - 12\,000\text{ €} = 4\,000\text{ €}$
Jälkeen	$16\,000\text{ €} \cdot 1,25$ $= 20\,000\text{ €}$	$12\,000\text{ €} \cdot 1,30$ $= 15\,600\text{ €}$	$20\,000\text{ €} - 15\,600\text{ €} = 4\,400\text{ €}$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia uusi tulos on alkuperäisestä tuloksesta.

$$\frac{4400\text{ €}}{4000\text{ €}} = 1,1 = 110\%$$

Uusi tulos on 110 % vanhasta tuloksesta, joten uusi tulos on $110\% - 100\% = 10\%$ suurempi kuin vanha tulos.

Tulos kasvaa 10 %.

Vastaus: kasvaa 10 %

- K15.** Annikan yrityksen arvonlisäverottomat kulut ovat kuukaudessa yhteensä $3000\text{ €} + 1000\text{ €} + 1100\text{ €} + 100\text{ €} + 150\text{ €} = 5350\text{ €}$.

Jos kaikki Annikan kurssit täyttyvät oppilaista, yritys saa $5 \cdot 20 = 100$ osallistumismaksua.

Yhden osallistumismaksun verottoman hinnan on siis oltava vähintään

$$\frac{5350\text{ €}}{100} = 53,50\text{ €}.$$

Verollinen hinta on tällöin vähintään $1,14 \cdot 53,50\text{ €} = 60,99\text{ €}$.

Vastaus: 60,99 €

- K16.** Merkitään maahantuojan asettamaa verotonta hintaa kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä maahantuojan pesukoneelle asettama veroton hinta x .

$$\begin{aligned} 1,255x &= 370 && \parallel :1,255 \\ x &= 294,820... \\ x &\approx 294,82 \end{aligned}$$

Arvonlisäveron määrä on kodinkoneliikkeen pesukoneita ostaessa yhtä konetta kohti $370 \text{ €} - 294,82 \text{ €} = 75,18 \text{ €}$ ja yhteensä kymmenestä pesukoneesta $10 \cdot 75,18 \text{ €} = 751,80 \text{ €}$.

Ratkaistaan vastaavalla tavalla kodinkoneliikkeen pesukoneelle asettama veroton hinta y .

$$\begin{aligned} 1,255x &= 590 && \parallel :1,255 \\ x &= 470,119... \\ x &\approx 470,12 \end{aligned}$$

Arvonlisäveron määrä on kodinkoneliikkeen myydessä pesukoneita yhtä konetta kohti $590 \text{ €} - 470,12 \text{ €} = 119,88 \text{ €}$ ja yhteensä kymmenestä koneesta $10 \cdot 119,88 \text{ €} = 1198,80 \text{ €}$.

Kodinkoneliike tilittää arvonlisäveroa $1198,80 \text{ €} - 751,80 \text{ €} = 447 \text{ €}$.

Vastaus: 447 €