AVOIN SARJA

Tehtäviä

(1) Luku a arvotaan satunnaisesti väliltä $[2, 4]$. Muodostetaan kolmio, jonka sivut ovat koordinaattiakselit sekä suora $y = 2x + a$. Millä todennäköisyydellä kolmion ala on vähintään 2?
  (a) 0
  (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
  (c) $2 - \sqrt{2}$
  (d) 1

(2) Tavallisen 8×8-shakkilaudan jokaisessa ruudussa on nappula. Kutakin nappulaa liikutetaan yhtä aikaa joko yksi askel vasemmalle tai yksi askel alaoikealle, jos liikuttaminen on mahdollista poistamatta nappulaa laudalta. Mitkä seuraavista ovat mahdollisia tyhjien ruutujen lukumääriä sen jälkeen, kun kutakin nappulaa on liikutettu tasan kerran?
  (a) 0
  (b) 4
  (c) 29
  (d) 33

(3) Luvut x ja y ovat reaalilukuja. Määritä lausekkeen

$$2x^2 + y^2 - 2xy - 2023$$

pienin arvo.

(4) Laatikossa on alle 100 palloa, jotka ovat joko sinisiä, punaisia tai valkoisia. Punaisia palloja on parillinen määrä. Valkoisia ja sinisiä on yhteensä nelinkertaisesti punaisten pallojen määrä. Punaisia ja sinisiä palloja on yhteensä kuusinkertaisesti valkoisten pallojen määrä. Kuinka monta palloa laatikossa on?

(5) Piste O sijaitsee suunnikkaan $ABCD$ sisällä siten, että $\angle AOB + \angle COD = 180°$. Osoita, että $\angle OBC = \angle ODC$.

(6) Kuinka monta sellaista kolmiota on olemassa, joiden sivut ovat positiivisia kokonaislukuja, joiden sivujen pituuksien summa on 100, jotka eivät ole redusoituneita (eli pelkkiä janoja) ja jotka ovat keskenään erilaisia? (Tässä erilaisuus tarkoittaa sitä, niitä ei saada toisistaan kääntämällä tai kiertämällä. Esimerkiksi kolmio, joiden sivujen pituudet ovat 10, 49 ja 51 ajatellaan samaksi kuin kolmio, jonka sivujen pituudet ovat 10, 51 ja 49.)

(1) Luku a arvotaan satunnaisesti väliltä $[2, 4]$. Muodostetaan kolmio, jonka sivut ovat koordinaattiakselit sekä suora $y = 2x + a$. Millä todennäköisyydellä kolmion ala on vähintään 2?
(a) 0
(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(c) $2 - \sqrt{2}$
(d) 1

Ratkaisu: Suora $y = 2x + a$ leikkaa y-akselin pisteessä $y = a$ ja x-akselin pisteessä $x = -\frac{a}{2}$. Kolmion ala on siis $\frac{a^2}{4}$. Ehto $\frac{a^2}{4} \geq 2$ toteutuu, kun $a^2 \geq 8$, eli $s \geq 2\sqrt{2}$ (sillä vain positiivinen arvo kelpaa). Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$.

(2) Tavallisen 8×8-shakkilaudan jokaisessa ruudussa on nappula. Kutakin nappulaa liikutetaan yhtä aikaa joko yksi askel vasemmalle tai yksi askel alaoikealle, jos liikuttaminen on mahdollista poistamatta nappulaa laudalta. Mitkä seuraavista ovat mahdollisia tyhjien ruutujen lukumääriä sen jälkeen, kun kutakin nappulaa on liikutettu tasan kerran?
(a) 0
(b) 4
(c) 29
(d) 33

Ratkaisu: Nolla tyhjää ruutua ei ole mahdollinen, sillä oikeasta yläkulmasta täytyy siirtää nappula vasemmalle, eikä siihen ruutuun voi tulla korvaavaa nappulaa.

Neljä tyhjää ruutua on mahdollinen: ajatellaan shakkilauta neljänä kahden sarakkeen rykelmänä. Kunkin rykelmän sisällä siirretään muissa tapauksissa oikeasta sarakkeesta vasempaan ja vasemmasta oikeaan, paitsi alimmalla rivillä, jolla kukin nappula siirretään vasemmalle, paitsi laudan vasemman alanurkan nappula, jota ei voi siirtää mihinkään.

29 tyhjää ruutua on mahdollinen: Siiretään alarivissä kutakin nappulaa vasemmalle, paitsi vasemman alakulman nappulaa, jota ei voi siirtää. Muut rivit käsitellään seuraavasti: Ensimmäisen, toisen, viidennen ja kuudennen sarakkeen nappulat siirretään alaoikealle, kolmannen, neljännen, seitsemännen ja kahdeksannen taas vasemmalle. Tällöin ensimmäiseen, neljänteen ja viidenteen sarakkeeseen jää 7 tyhjää ruutua kuhunkin ja kahdeksanteen jää kahdeksan.

33 tyhjää ruutua ei ole mahdollinen: kuhunkin ruutuun voi tulla korkeintaan kaksi nappulaa siirtojen kautta. Ruudun oma nappula poistuu paitsi vasemmassa alakulmassa. Siihen ei kuitenkaan voi tulla nappulaa paitsi sen oikealta puolelta vasemmalle tehdyn siirron kautta. Missään ruudukon ruudussa ei siis voi olla yli kahta nappulaa siirtojen jälkeen. Siispä nappulat eivät voi olla 31 ruudussa, eli ei voi olla 33 tyhjää ruutua.

(3) Luvut x ja y ovat reaalilukuja. Määritä lausekkeen

$$2x^2 + y^2 - 2xy - 2023$$

pienin arvo.

Ratkaisu: Täydennetään lauseke neliöiksi:

$$2x^2 + y^2 - 2xy - 2023 = (x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) - 2024 = (x + 1)^2 + (x - y)^2 - 2024.$$

Neliöt ovat aina epänegatiivisia, joten lausekkeen arvo on vähintään -2024. Toisaalta tämä arvo saavutetaan, kun $x = -1$ ja $x = y$, eli myös $y = -1$.

(4) Laatikossa on ainakin yksi pallo. Lisäksi tiedetään, että palloja on alle 100. Pallot ovat joko sinisiä, punaisia tai valkoisia. Punaisia palloja on parillinen määrä. Valkoisia ja sinisiä on yhteensä nelinkertaisesti punaisten pallojen määrä. Punaisia ja sinisiä palloja on yhteensä kuusinkertaisesti valkoisten pallojen määrä. Kuinka monta palloa laatikossa on?

Ratkaisu: Merkitään sinisten pallojen määrää kirjaimella s, punaisten pallojen määrää kirjaimella p ja valkoisten pallojen määrää kirjaimella v. Tiedetään, että p on parillinen luku. Lisäksi

$$\begin{cases} v + s = 4p \\ p + s = 6v. \end{cases}$$

Vähennetään yhtälöt toisistaan, jolloin saadaan

$$v - p = 4p - 6v,$$

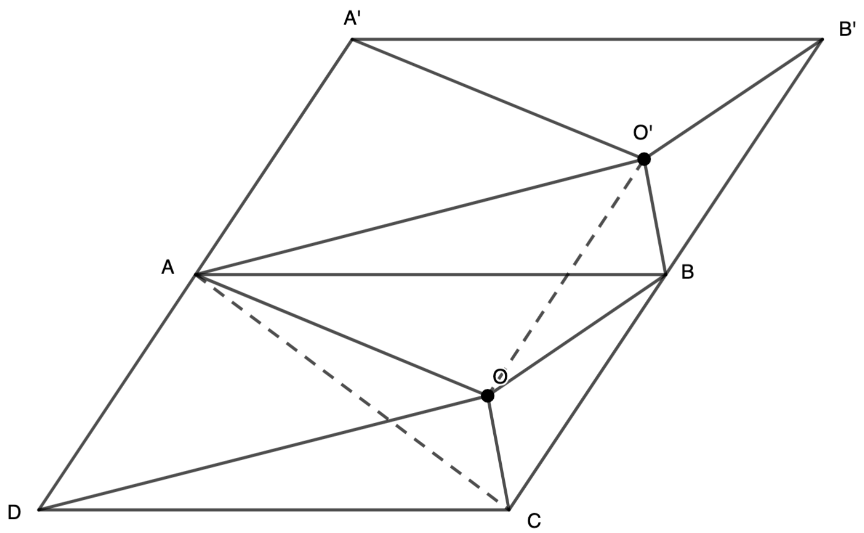
eli $7v = 5p$. Luvun p on siis oltava jaollinen luvulla 7. Koska se on myös parillinen, on sen oltava jokin luvuista $0, 14, 28, \ldots$. Jos olisi $p = 0$, olisi myös $v = 0$, jolloin olisi myös $s = 0$. Tällöin pallojen kokonaismäärä olisi nolla, mikä ei ole mahdollista.

Jos on $p = 14$, niin $v = 10$. Tällöin $s = 4p - v = 56 - 10 = 46$. Lisäksi ehto $p + s = 6v$ toteutuu, sillä $14 + 46 = 6 \cdot 10$. Tällöin pallojen kokonaismäärä on $14 + 10 + 46 = 70$.

Jos $p = 28$, niin $v = 20$. Tällöin $s = 4p - v = 112 - 20 = 92$, eli palloja on yhteensä yli sata. Tämä ei ole mahdollista. Vastaavasti käy, jos $p > 28$. Siispä ainoa ratkaisu on yllämainittu, jossa $p = 14$ ja pallojen kokonaismäärä 70.

(5) Piste O sijaitsee suunnikkaan $ABCD$ sisällä siten, että $\angle AOB + \angle COD = 180°$. Osoita, että $\angle OBC = \angle ODC$.

Ratkaisu: Piirretään aluksi tilanteesta kuva. Lisäksi tehdään kopio alkuperäisestä suunnikkaasta ns. yhdensuuntaissiirtymän avulla, eli piirretään toinen samanlainen suunnikas, jonka vinot sivut ovat alkuperäisen suunnikkaan sivujen jatkeita. Piiretään samaan kuvaan myös valmiiksi kaksi apujanaa, jotka on merkitty katkoviivoin:



Koska $\angle COD = \angle BO'A$, on oltava $\angle AOB + \angle BO'A = 180°$, eli $AO'BO$ on jännenelikulmio. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle ODC = \angle O'AB = \angle O'OB$. Toisaalta, koska OO' ja CB' ovat yhdensuuntaisia, on myös oltava $\angle O'OB = \angle OBC$. Väite on todistettu.

(6) Kuinka monta sellaista kolmiota on olemassa, joiden sivut ovat positiivisia kokonaislukuja, joiden sivujen pituuksien summa on 100, jotka eivät ole redusoituneita (eli pelkkiä janoja) ja jotka ovat keskenään erilaisia? (Tässä erilaisuus tarkoittaa sitä, niitä ei saada toisistaan kääntämällä tai kiertämällä. Esimerkiksi kolmio, joiden sivujen pituudet ovat 10, 49 ja 51 ajatellaan samaksi kuin kolmio, jonka sivujen pituudet ovat 10, 51 ja 49.)

Ratkaisu: Etsitään kolmiot kiinnittämällä kolmion lyhin sivu.

Jos kolmion lyhin sivu on 1, ei kolmiota ole olemassa, sillä tällöin kahden muun sivun pitäisi olla yhtä pitkiä, ja $\frac{99}{2}$ ei ole kokonaisluku.

Jos kolmion lyhin sivu on 2, on ainoa mahdollisuus $(2, 49, 49)$.

Kun lyhin sivu on 3, on ainoa mahdollisuus $(3, 48, 49)$, sillä $(3, 47, 50)$ olisi jo redusoitunut janaksi.

Huomataan, että kun lyhin sivu on parillinen, saadaan yksi tapaus enemmän kuin edellisessä vaiheessa, kunnes näin edeten kävisi niin, että toiseksi lyhimmästä sivusta tulisi lyhyempi kuin lyhimmästä. Jos nimittäin lyhin sivu on esimerkiksi 33, on ainoa mahdollisuus $(33, 33, 34)$, sillä kahden muun sivun summan on oltava 67, ja näistä lyhyemmän on oltava vähintään 33.

Olkoon $2a$ parillinen luku ja olkoon se lyhimmän sivun pituus. Nyt kahden muun sivun summa on $100 - 2a$, eli kahden muun sivun keskimääräinen pituus on $50 - a$. Kahden muun sivun erotus on alle $2a$, joten se on korkeintaan $2a - 2$. Siispä toiseksi lyhimmän sivun pituus on vähintään $50 - 2a + 1$. Nyt $50 - 2a + 1 \geq 2a$, kun $4a \leq 51$, eli $a \leq 12{,}75$. Jos siis sivun pituus on parillinen, niin ehdot toteutuvat, kun $2a \leq 24$.

Tarkistetaan erikseen tapaus, jossa lyhimmän sivun pituus on 25. Tällöin kahden muun sivun summa on 75. Mahdolliset kolmiot ovat siis $(25, 26, 49), (25, 27, 48), \ldots, (25, 37, 3$
Mahdollisia kolmioita on siis 12 kappaletta.

Tähän asti saadaan siis yhteensä

$$2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) = 156$$

kappaletta.

Kun lyhimmän sivun pituus on 26, on vaihtoehdot $(26, 26, 48), \ldots, (26, 37, 37)$, eli 12 kappaletta. Vastaavasti lyhimmällä sivulla 27 on vaihtoehdot $(27, 27, 46), \ldots, (27, 36, 37)$, eli 10 kappaletta. Näin voidaan jatkaa.

Saadaan yhteensä

$$12 + 10 + 9 + 7 + 6 + 4 + 3 + 1 = 52$$

kolmiota.

Yhteensä kolmioita on siis 208.