

2 DISKREETTEJÄ TODENNÄKÖISYYSJAKAUMIA

POHDITTAVAA

1. Vuosi 2016 oli karkausvuosi, joten siinä oli $366 \cdot 24 = 8784$ tuntia.
Puheluita tuli tunnissa keskimäärin $\frac{2\,633\,000}{8784} = 299,749\dots \approx 300$.

Vastaus: 300 puhelua

2. Puheluita tuli yhteensä 2 633 000, joista 581 000 oli hätäkeskukselle kuulumattomia. Todennäköisyys sille, että yksittäinen hätäkeskukseen tullut puhelu ei kuulunut hätäkeskukselle, on
 $\frac{581\,000}{2\,633\,000} = 0,2206\dots \approx 0,221$.

Hätäkeskukselle kuulumattomien puheluiden käsittelyyn kului aikaa yhteensä $581\,000 \cdot 18 \text{ s} = 10\,458\,000 \text{ s} = \frac{10\,458\,000}{60 \cdot 60} \text{ h} = 2905 \text{ h}$. Tämä vastaa $\frac{2905}{8} = 363,125 \approx 363$ henkilötyöpäivää.

Vastaus: 0,221; 363 henkilötyöpäivää

2.1 Toistokoe

ALOITA PERUSTEISTA

201. a) $\binom{5}{3} = 10$

Vastaus: 10

b) $\binom{12}{4} \cdot 0,73^4 \cdot 0,27^8 = 0,00397... \approx 0,0040$

Vastaus: 0,0040

c) Sijoitetaan $n = 21$, $k = 8$ ja $p = 0,63$ kaavaan $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$$\begin{aligned} \binom{21}{8} \cdot 0,63^8 \cdot (1-0,63)^{21-8} &= \binom{21}{8} \cdot 0,63^8 \cdot 0,37^{13} \\ &= 0,0122... \approx 0,012 \end{aligned}$$

Vastaus: 0,012

202. a) Kun heitetään arpakuutiota viisi kertaa ja tutkitaan tapahtumaa $A = \text{"saadaan täsmälleen kaksi kertaa silmäluku 1"}$, toistojen määrä on $n = 5$ ja tapahtumakertojen lukumäärä $k = 2$.

Vastaus: $n = 5, k = 2$

- b) Yksittäisellä heitolla saadaan silmäluku 1 todennäköisyydellä $p = \frac{1}{6}$.

Vastaus: $p = \frac{1}{6}$

- c) Sijoitetaan binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 5$, tapahtumakertojen lukumäärä $k = 2$ ja yksittäisen ykkösen todennäköisyys $p = \frac{1}{6}$.

$$P(A) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-2} = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,160\dots \approx 0,16$$

Viidellä heitolla saadaan täsmälleen 2 kertaa silmäluku 1 todennäköisyydellä 0,16.

Vastaus: 0,16

- 203. A** Heitetty nasta jää kärki ylöspäin todennäköisyydellä $p = 0,6 = \frac{3}{5}$. Kun heitetään nastaa $n = 10$ kertaa ja halutaan laskea todennäköisyys sille, että nasta jää $k = 5$ kertaa ylöspäin, on kysytty todennäköisyys

$$\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{10-5} = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5.$$

Tilanne A ja todennäköisyys III kuuluvat siis yhteen.

- B** Jos laatikossa on 7 valkoista ja 3 mustaa palloa, pallojen kokonaismäärä on $7 + 3 = 10$. Todennäköisyys sille, että satunnainen laatikosta otettu pallo on valkoinen, on $p = \frac{7}{10}$. Todennäköisyys sille, että viidestä nostetusta pallosta täsmälleen kolme on valkoisia, on

$$\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right)^{5-3} = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2,$$

kun nostettu pallo palautetaan laatikkoon ennen seuraavan pallon nostamista. Tilanne B ja todennäköisyys I kuuluvat siis yhteen.

- C** Korttipakan korteista neljäsosa on herttoja, joten todennäköisyys sille, että pakasta nostettu kortti on hertta, on $p = \frac{1}{4}$. Todennäköisyys sille, että kymmenestä nostetusta kortista täsmälleen viisi on herttoja, on

$$\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-5} = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5,$$

kun nostettu kortti palautetaan laatikkoon ennen seuraavan kortin nostamista. Tilanne C ja todennäköisyys II kuuluvat siis yhteen.

Vastaus: A: III, B: I, C: II

204. a) Koska yksittäisen heiton tulos ei vaikuta muiden heittojen tuloksiin, kolikonheiton tulokset ovat toisistaan riippumattomia.

Vastaus: Ovat.

- b) Merkitään tapahtuma A : ”saadaan täsmälleen kolme kruunaa”.

Kruunan todennäköisyys yksittäisessä heitossa on $p = \frac{1}{2}$. Sijoitetaan

binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 4$,
tapahtumakertojen lukumäärä $k = 3$ ja yksittäisen kruunan

todennäköisyys $p = \frac{1}{2}$.

$$P(A) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-3} = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0,25$$

Vastaus: 0,25

205. a) Yksittäisen henkilön punavihersokeus ei vaikuta muiden henkilöiden punavihersokeuteen, joten kyseessä on toistokoe. Merkitään tapahtuma A : ”ryhmässä on täsmälleen 1 punavihersokea”. Sijoitetaan binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 15$, tapahtumakertojen lukumäärä $k = 1$ ja yksittäisen henkilön punavihersokeuden todennäköisyys $p = 0,04$.

$$P(A) = \binom{15}{1} \cdot 0,04^1 \cdot (1 - 0,04)^{15-1} = \binom{15}{1} \cdot 0,04 \cdot 0,96^{14} = 0,338\dots$$

15 henkilön ryhmässä on täsmälleen yksi punavihersokea todennäköisyydellä $0,338\dots \approx 0,34$.

Vastaus: 0,34

- b) Merkitään tapahtuma B : ”ryhmässä on täsmälleen 2 punavihersokeaa”. Sijoitetaan binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 15$, tapahtumakertojen lukumäärä $k = 2$ ja yksittäisen henkilön punavihersokeuden todennäköisyys $p = 0,04$.

$$P(B) = \binom{15}{2} \cdot 0,04^2 \cdot (1 - 0,04)^{15-2} = \binom{15}{2} \cdot 0,04^2 \cdot 0,96^{13} = 0,0988\dots$$

15 henkilön ryhmässä on täsmälleen kaksi punavihersokeaa todennäköisyydellä $0,0988\dots \approx 0,099$.

Vastaus: 0,099

206. Koska sipulit itävät toisistaan riippumatta, on kyseessä toistokoe.

- a) Merkitään tapahtuma A : ”täsmälleen 5 sipulia itää”. Sijoitetaan binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 6$, tapahtumakertojen lukumäärä $k = 5$ ja yksittäisen sipulin itämisen todennäköisyys $p = 0,75$.

$$P(A) = \binom{6}{5} \cdot 0,75^5 \cdot (1 - 0,75)^{6-5} = \binom{6}{5} \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^1 = 0,355\dots$$

Todennäköisyys, että täsmälleen 5 sipulia itää on $0,355\dots \approx 0,36$.

Vastaus: 0,36

- b) Merkitään tapahtuma A : ”täsmälleen 6 sipulia itää”. Sijoitetaan binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 6$, tapahtumakertojen lukumäärä $k = 6$ ja yksittäisen sipulin itämisen todennäköisyys $p = 0,75$.

$$P(A) = \binom{6}{6} \cdot 0,75^6 \cdot (1 - 0,75)^{6-6} = \binom{6}{6} \cdot 0,75^6 \cdot 0,25^0 = 0,177\dots$$

Todennäköisyys, että täsmälleen 6 sipulia itää on $0,177\dots \approx 0,18$.

Vastaus: 0,18

- c) Merkitään tapahtuma A : ”ainakin viisi sipulia itää”. Tapahtuma A tapahtuu, jos 5 tai 6 sipulia itää. Näiden tapahtumien todennäköisyys on laskettu a- ja b-kohdissa.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(5 \text{ sipulia itää}) + P(6 \text{ sipulia itää}) \\ &= 0,3559\dots + 0,1779\dots = 0,533\dots \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että ainakin 5 sipulia itää, on $0,533\dots \approx 0,53$.

Vastaus: 0,53

207. a) Yksittäisen lapsen todennäköisyys periä sairaus ei riipu siitä, perivätkö muut lapset sairauden, joten kyseessä on toistokoe. Sijoitetaan binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 4$, tapahtumakertojen määrä $k = 1$ ja yksittäisen lapsen sairauden perimisen todennäköisyys $p = 0,25$.

$$\begin{aligned} & P(\text{täsmälleen yksi perii sairauden}) \\ &= \binom{4}{1} \cdot 0,25^1 \cdot (1 - 0,25)^{4-1} \\ &= \binom{4}{1} \cdot 0,25 \cdot 0,75^3 \\ &= 0,421\dots \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että täsmälleen yksi lapsi perii sairauden, on $0,421\dots \approx 0,42$.

Vastaus: 0,42

- b) Sijoitetaan binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 4$, tapahtumakertojen määrä $k = 2$ ja yksittäisen lapsen sairauden perimisen todennäköisyys $p = 0,25$.

$$\begin{aligned} & P(\text{täsmälleen kaksi perii sairauden}) \\ &= \binom{4}{2} \cdot 0,25^2 \cdot (1 - 0,25)^{4-2} = \binom{4}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^2 = 0,210\dots \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että täsmälleen kaksi lasta perii sairauden, on $0,210\dots \approx 0,21$.

Vastaus: 0,21

VAHVISTA OSAAMISTA

208. Koska yhden lapsen sukupuoli ei vaikuta muiden lapsen sukupuoliin, kyseessä on toistokoe. Perheessä on 2 poikaa, jos siinä on 1 tyttö. Sijoitetaan binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 3$, tyttöjen määrä $k = 1$ ja tytön todennäköisyys $p = 0,488$.

$$\begin{aligned} P(\text{täsmälleen 1 tyttö}) &= \binom{3}{1} \cdot 0,488^1 \cdot (1 - 0,488)^{3-1} \\ &= \binom{3}{1} \cdot 0,488 \cdot 0,512^2 \\ &= 0,383\dots \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että perheessä on täsmälleen 2 poikaa, on $0,383\dots \approx 0,38$.

Vastaus: 0,38

209. Yksittäisen käyttäjän sivuvaikutukset eivät riipu toisten käyttäjien sivuvaikutuksista, joten kyseessä on toistokoe. Sijoitetaan binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 1000$, sivuvaikutuksia saavien käyttäjien määrä $k = 40$ ja yksittäisen käyttäjän sivuvaikutusten todennäköisyys $p = 0,04$

$$\begin{aligned} P(1000 \text{ käyttäjästä täsmälleen } 40 \text{ saa sivuvaikutuksia}) \\ &= \binom{1000}{40} \cdot 0,04^{40} \cdot (1 - 0,04)^{1000-40} \\ &= \binom{1000}{40} \cdot 0,04^{40} \cdot 0,96^{960} \\ &= 0,0642\dots \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että tuhannesta käyttäjästä täsmälleen 40 saa sivuvaikutuksia, on $0,0642\dots \approx 0,064$.

Vastaus: 0,064

210. a) Arpoja on suuri määrä, joten voidaan olettaa, ettei yksittäisen arvan voitto vaikuta muiden arpojen voittamisen todennäköisyyteen.

TAPA 1:

Todennäköisyys sille, että yksittäinen arpa voittaa, on $p = \frac{1}{7}$.

Sijoitetaan binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 8$, voittoarpojen määrä $k = 0$ ja voittoarvan todennäköisyys $p = \frac{1}{7}$.

$$\begin{aligned} P(\text{yksikään arpa ei voita}) &= \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{7}\right)\right]^{8-0} \\ &= \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^8 \\ &= 0,291\dots \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että yksikään arpa ei voita, on $0,291\dots \approx 0,29$.

TAPA 2:

Todennäköisyys sille, että yksittäinen arpa voittaa, on $p = \frac{1}{7}$. Tällöin

todennäköisyys sille, että yksittäinen arpa ei voita, on

$1 - p = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$. Todennäköisyys sille, ettei kahdeksasta arvasta

yksikään voita, on kertolaskusäännön perusteella $\left(\frac{6}{7}\right)^8 = 0,291\dots$

Vastaus: 0,29

- b) Kahdeksasta arvasta ainakin kaksi voittoa, jos voittoarpoja on 2, 3, 4, 5, 6, 7 tai 8. Vastatapahtuma ”korkeintaan yksi arpa voittaa” tapahtuu, jos voittoarpoja on 0 tai 1. Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned}P(\text{ainakin 2 arpa voittaa}) &= 1 - P(\text{korkeintaan 1 arpa voittaa}) \\&= 1 - [P(\text{yksikään arpa ei voita}) + P(1 \text{ arpa voittaa})] \\&= 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right)^{8-0} + \binom{8}{1} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right)^{8-1} \right] \\&= 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^8 + \binom{8}{1} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^7 \right] \\&= 0,320\dots\end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että ainakin kaksi arvoista voittaa, on $0,320\dots \approx 0,32$.

Vastaus: 0,32

- 211. a)** Kolikon heitossa kruunan todennäköisyys on $p = 0,5 = \frac{1}{2}$. Kun heitetään kolikkoa 10 kertaa, lauseke

$$\binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-3} = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

ilmoittaa todennäköisyyden sille, että saadaan täsmälleen kolme kruunaa.

Vastaus: esim. Millä todennäköisyydellä saadaan täsmälleen 3 kruunaa, kun kolikkoa heitetään 10 kertaa?

- b)** Ajatellaan, että henkilön työmatkalla on viidet liikennevalot, ja kutkin liikennevalot ovat vihreällä todennäköisyydellä $p = 0,7$ muista liikennevaloista riippumatta. Tällöin lauseke

$$\begin{aligned} & \binom{5}{4} \cdot 0,7^4 \cdot (1 - 0,7)^1 + \binom{5}{5} \cdot 0,7^5 \cdot (1 - 0,7)^0 \\ &= \binom{5}{4} \cdot 0,7^4 \cdot 0,3^1 + \binom{5}{5} \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^0 \end{aligned}$$

ilmoittaa todennäköisyyden sille, että valoista neljät tai viidet ovat vihreällä, eli korkeintaan yhden valon punaisella.

Vastaus: esim. Jos viidet liikennevalot ovat toisistaan riippumatta vihreällä todennäköisyydellä 0,7, millä todennäköisyydellä korkeintaan yhden valon punaisella?

- c) Jos korttipakasta nostetaan kortteja yksi kerrallaan palauttaen aina kortti takaisin pakkaan ennen seuraavan kortin nostamista ja sekoittaen pakka ennen nostamista, niin yksittäinen nostettu kortti on hertta todennäköisyydellä $p = \frac{1}{4} = 0,25$. Todennäköisyys sille, että neljästä nostetusta kortista korkeintaan 1 on hertta, on

$$\begin{aligned} & P(\text{ei yhtään herttaa}) + P(\text{täsmälleen 1 hertta}) \\ &= \binom{4}{0} \cdot 0,25^0 \cdot (1 - 0,25)^{4-0} + \binom{4}{1} \cdot 0,25^1 \cdot (1 - 0,25)^{4-1} \\ &= \binom{4}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^4 + \binom{4}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^3. \end{aligned}$$

Tällöin vastatapahtuman ”neljästä nostetusta kortista vähintään 2 on herttoja” todennäköisyys on

$$1 - \left[\binom{4}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^4 + \binom{4}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^3 \right].$$

Vastaus: esim. Jos nostetaan sekoitetusta korttipakasta 4 korttia yksi kerrallaan palauttaen kortti takaisin pakkaan ennen seuraavaa nostoa, millä todennäköisyydellä korteista vähintään 2 on herttoja?

212. Joukkue B on voittanut ottelun vapaaheittojen jälkeen, jos heitoista kaksi tai kolme menee koriin. Yksittäisen heiton onnistuminen ei riipu muiden heittojen onnistumisesta, joten kyseessä on toistokoe. Lasketaan kysytty todennäköisyys erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla.

$$\begin{aligned} & P(2 \text{ tai } 3 \text{ heittoa menee koriin}) \\ &= P(2 \text{ heittoa menee koriin}) + P(3 \text{ heittoa menee koriin}) \\ &= \binom{3}{2} \cdot 0,75^2 \cdot (1 - 0,75)^{3-2} + \binom{3}{3} \cdot 0,75^3 \cdot (1 - 0,75)^{3-3} \\ &= \binom{3}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25^1 + \binom{3}{3} \cdot 0,75^3 \cdot 0,25^0 \\ &= 0,843\dots \end{aligned}$$

Joukkue on voittanut ottelun vapaaheittojen jälkeen todennäköisyydellä $0,843\dots \approx 0,84$.

Vastaus: 0,84

213. Kakkostyyppin diabetesta sairastaa $0,8 \cdot 500\,000 = 400\,000$ suomalaista.

Todennäköisyys sille, että satunnaisesti valittu suomalainen sairastaa

kakkostyyppin diabetesta, on $p = \frac{400\,000}{5\,500\,000} = 0,0727\dots$

Suomalaisia on niin paljon, että 20 henkilön ryhmän valitseminen voidaan ajatella toistokokeeksi.

20 hengen ryhmästä ainakin 2 sairastaa diabetesta, jos ei ole niin, että korkeintaan 1 sairastaa sitä. Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned} &P(\text{ainakin 2 sairastaa}) \\ &= 1 - P(\text{korkeintaan 1 sairastaa}) \\ &= 1 - [P(\text{yksikään ei sairasta}) + P(\text{täsmälleen 1 sairastaa})] \\ &= 1 - \left[\binom{20}{0} \cdot 0,0727\dots^0 \cdot (1 - 0,0727\dots)^{20-0} + \binom{20}{1} \cdot 0,0727\dots^1 \cdot (1 - 0,0727\dots)^{20-1} \right] \\ &= 1 - \left[\binom{20}{0} \cdot 0,0727\dots^0 \cdot 0,927\dots^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,0727\dots^1 \cdot 0,927\dots^{19} \right] \\ &= 0,43265\dots \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että 20 suomalaisen ryhmästä ainakin 2 sairastaa kakkostyyppin diabetesta, on $0,43265\dots \approx 0,43$.

Vastaus: 0,43

214. a) Todennäköisyys sille, että Matias arvaa laatikon oikein yksittäisellä arvauksella, on $p = \frac{1}{2} = 0,5$. Yksittäisen arvauksen tulos ei vaikuta siihen, menevätkö muut arvaukset oikein, joten kyseessä on toistokoe.

Matias saa ainakin 8 euroa, jos hän saa 8, 9 tai 10 euroa. Lasketaan kysytty todennäköisyys erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla.

$$\begin{aligned} & P(\text{saa ainakin 8 euroa}) \\ &= P(\text{saa 8 euroa}) + P(\text{saa 9 euroa}) + P(\text{saa 10 euroa}) \\ &= \binom{10}{8} \cdot 0,5^8 \cdot (1-0,5)^{10-8} + \binom{10}{9} \cdot 0,5^9 \cdot (1-0,5)^{10-9} + \binom{10}{10} \cdot 0,5^{10} \cdot (1-0,5)^{10-10} \\ &= \binom{10}{8} \cdot 0,5^8 \cdot 0,5^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,5^9 \cdot 0,5^1 + \binom{10}{10} \cdot 0,5^{10} \cdot 0,5^0 \\ &= \binom{10}{8} \cdot 0,5^{10} + \binom{10}{9} \cdot 0,5^{10} + \binom{10}{10} \cdot 0,5^{10} \\ &= 0,0546\dots \end{aligned}$$

Matias saa ainakin 8 euroa todennäköisyydellä $0,0546\dots \approx 0,055$.

Vastaus: 0,055

- b) Matias saa ainakin 8 euroa, jos hän saa 8, 9 tai 10 euroa. Lasketaan kysytty todennäköisyys erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla.

$$\begin{aligned} & P(\text{saa ainakin 8 euroa}) \\ &= P(\text{saa 8 euroa}) + P(\text{saa 9 euroa}) + P(\text{saa 10 euroa}) \\ &= \binom{10}{8} \cdot 0,8^8 \cdot (1-0,8)^{10-8} + \binom{10}{9} \cdot 0,8^9 \cdot (1-0,8)^{10-9} + \binom{10}{10} \cdot 0,8^{10} \cdot (1-0,8)^{10-10} \\ &= \binom{10}{8} \cdot 0,8^8 \cdot 0,2^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 + \binom{10}{10} \cdot 0,8^{10} \cdot 0,2^0 \\ &= 0,677\dots \end{aligned}$$

Matias saa ainakin 8 euroa todennäköisyydellä $0,677\dots \approx 0,68$.

Vastaus: 0,68

- 215.** Monisteet riittävät, jos opiskelijoita tulee paikalle 0, 1, 2, ..., 34 tai 35. Vastatapahtuma ”monisteet eivät riitä” tapahtuu, jos opiskelijoita tulee paikalle 36, 37 tai 38. Merkitään saapuvien opiskelijoiden määrää kirjaimella X ja lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned} &P(\text{monisteet riittävät}) \\ &= 1 - P(\text{monisteet eivät riitä}) \\ &= 1 - [P(36 \text{ opiskelijaa tulee}) + P(37 \text{ opiskelijaa tulee}) + P(38 \text{ opiskelijaa tulee})] \\ &= 1 - \left[\binom{38}{36} \cdot 0,94^{36} \cdot (1 - 0,94)^{38-36} + \binom{38}{37} \cdot 0,94^{37} \cdot (1 - 0,94)^{38-37} + 0,94^{38} \right] \\ &= 1 - \left[\binom{38}{36} \cdot 0,94^{36} \cdot 0,06^2 + \binom{38}{37} \cdot 0,94^{37} \cdot 0,06^1 + 0,94^{38} \right] \\ &= 0,400\dots \end{aligned}$$

Monisteet riittävät todennäköisyydellä $0,400\dots \approx 0,40$.

Vastaus: 0,40

- 216.** Peliaddikti olettaa, että pelikoneen tulokset riippuvat edellisten pelikierrosten tuloksista. Pelikoneessa on satunnaislukugeneraattori, joten edellisten pelikertojen tulokset eivät vaikuta seuraaviin pelikertoihin. Pelikertojen tulokset ovat siis toisistaan riippumattomia. Tämän vuoksi voiton todennäköisyys ei muutu sen mukaan, millä hetkellä konetta pelataan, eikä pelaaja voi omalla toiminnallaan, kuten laittamalla kolikko tietyllä tavalla koneeseen, vaikuttaa koneen toimintaan.

Vastaus: Peliaddikti olettaa, että hän voi omalla toiminnallaan, kuten laittamalla kolikon tietyllä tavalla tai hetkellä koneeseen, vaikuttaa voiton todennäköisyyteen.

217. Lukas heittää kolikkoa yli 10 kertaa, jos kymmenellä heitolla tulee vähintään 8 kruunaa tai vähintään 8 klaavaa. Lasketaan kysytty todennäköisyys erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla.

$$\begin{aligned} &P(\text{Lukas heittää yli 10 kertaa}) \\ &= P(\text{vähintään 8 kruunaa}) + P(\text{vähintään 8 klaavaa}) \end{aligned}$$

Koska kruuna ja klaava ovat yhtä todennäköisiä, niin $P(\text{vähintään 8 klaavaa}) = P(\text{vähintään 8 kruunaa})$.

Tämän vuoksi

$$\begin{aligned} &P(\text{vähintään 8 kruunaa}) + P(\text{vähintään 8 klaavaa}) \\ &= 2 \cdot P(\text{vähintään 8 kruunaa}) \\ &= 2 \cdot [P(8 \text{ kruunaa}) + P(9 \text{ kruunaa}) + P(10 \text{ kruunaa})] \\ &= 2 \cdot \left[\binom{10}{8} \cdot 0,5^8 \cdot (1-0,5)^{10-8} + \binom{10}{9} \cdot 0,5^9 \cdot (1-0,5)^{10-9} + 0,5^{10} \right] \\ &= 2 \cdot \left[\binom{10}{8} \cdot 0,5^{10} + \binom{10}{9} \cdot 0,5^{10} + 0,5^{10} \right] \\ &= 0,109\dots \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että Lukaksen pitää heittää kolikkoa yli 10 kertaa, on $0,109\dots \approx 0,11$.

Vastaus: 0,11

218. Merkitään reitillä olevien liikennevalojen lukumäärää kirjaimella n . Jos kahdet valot ovat punaisella, niin vihreällä olevien liikennevalojen lukumäärä on $n - 2$. Todennäköisyys sille, että täsmälleen kahdet valot ovat punaisella, on

$$\begin{aligned} & P(\text{täsmälleen kahdet valot punaisella}) \\ &= P(\text{vihreitä valoja on } n - 2) \\ &= \binom{n}{n-2} \cdot 0,6^{n-2} \cdot (1 - 0,6)^{n-(n-2)} \\ &= \binom{n}{n-2} \cdot 0,6^{n-2} \cdot 0,4^2. \end{aligned}$$

Lasketaan lausekkeen $\binom{n}{n-2} \cdot 0,6^{n-2} \cdot 0,4^2$ arvoja, kunnes löydetään todennäköisyys, joka on noin 35 %.

$$n:=3$$

$$\approx n := 3$$

$$\text{Binomikerroin}(n,n-2) \cdot 0,6^{n-2} \cdot 0,4^2$$

$$\approx \mathbf{0.288}$$

$$n:=4$$

$$\approx n := 4$$

$$\text{Binomikerroin}(n,n-2) \cdot 0,6^{n-2} \cdot 0,4^2$$

$$\approx \mathbf{0.3456}$$

$$n:=5$$

$$\approx n := 5$$

$$\text{Binomikerroin}(n,n-2) \cdot 0,6^{n-2} \cdot 0,4^2$$

$$\approx \mathbf{0.3456}$$

Kun $n = 4$ tai $n = 5$, todennäköisyys sille, että täsmälleen kahdet valot ovat punaisella, on $0,3456 = 34,56 \% \approx 35 \%$. Lasketaan vielä, onko todennäköisyys vielä lähempänä 35:ttä prosenttia, jos $n = 6$.

$n := 6$

$\approx n := 6$

Binomikerroin($n, n-2$) $\cdot 0.6^{n-2} \cdot 0.4^2$

$\approx \mathbf{0.31104}$

Todennäköisyys on $0,31104 = 31,104 \% \approx 31 \%$, kun $n = 6$.

Martan työmatkalla on siis neljät tai viidet liikennevalot.

Vastaus: neljät tai viidet liikennevalot

219. Kaisa ja Mari osuvat tauluun yhteensä 9 tai 10 kertaa, jos molemmat osuvat joka kerta tai toinen heistä ampuu yhden kerran ohi. Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännön ja erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla.

$$\begin{aligned} & P(\text{yhteensä 9 tai 10 osumaa}) \\ &= P(\text{yhteensä 9 osumaa}) + P(\text{yhteensä 10 osumaa}) \\ &= P(\text{Kaisa osuu aina ja Mari ampuu kerran ohi}) \\ &\quad + P(\text{Mari osuu aina ja Kaisa ampuu kerran ohi}) \\ &\quad + P(\text{kaikki laukaukset osuvat}) \\ &= P(\text{Kaisa osuu aina}) \cdot P(\text{Mari ampuu kerran ohi}) \\ &\quad + P(\text{Mari osuu aina}) \cdot P(\text{Kaisa ampuu kerran ohi}) \\ &\quad + P(\text{Kaisa osuu aina}) \cdot P(\text{Mari osuu aina}) \\ &= 0,84^5 \cdot \binom{5}{4} \cdot 0,75^4 \cdot (1 - 0,75)^{5-4} \\ &\quad + 0,75^5 \cdot \binom{5}{4} \cdot 0,84^4 \cdot (1 - 0,84)^{5-4} + 0,84^5 \cdot 0,75^5 \\ &= 0,84^5 \cdot \binom{5}{4} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^1 \\ &\quad + 0,75^5 \cdot \binom{5}{4} \cdot 0,84^4 \cdot 0,16^1 + 0,84^5 \cdot 0,75^5 \\ &= 0,359\dots \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että Kaisa ja Mari osuvat tauluun yhteensä 9 tai 10 kertaa, on $0,359\dots \approx 0,36$.

Vastaus: 0,36

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

220. Työntekijä syöttää tietokantaan 8 merkkiä. Yksittäisen merkin meneminen väärin ei riipu muista merkeistä, joten kyseessä on toistokoe.

- a) Sijoitetaan binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 8$, väärin merkkien määrä $k = 1$ ja yksittäisen merkin väärin menemisen todennäköisyys $p = 0,02$.

$$\begin{aligned} & P(\text{täsmälleen 1 merkki menee väärin}) \\ &= \binom{8}{1} \cdot 0,02^1 \cdot (1 - 0,02)^{8-1} \\ &= \binom{8}{1} \cdot 0,02 \cdot 0,98^7 \\ &= 0,138\dots \end{aligned}$$

Yhdessä syötetyssä syntymääjassa on täsmälleen 1 virhe todennäköisyydellä $0,138\dots \approx 0,14$.

Vastaus: 0,14

- b) Syntymääjassa on ainakin 1 virhe, jos kaikki merkit eivät ole oikein. Yksittäinen merkki menee oikein todennäköisyydellä $1 - 0,02 = 0,98$. Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned} & P(\text{ainakin 1 virhe}) \\ &= 1 - P(\text{kaikki merkit oikein}) \\ &= 1 - 0,98^8 \\ &= 0,149\dots \end{aligned}$$

Yksittäisessä syntymääjassa on ainakin yksi virhe todennäköisyydellä $0,149\dots \approx 0,15$.

Vastaus: 0,15

- c) Kohdan b perusteella yksittäisessä syntymääjassa on ainakin yksi virhe todennäköisyydellä $p = 0,149\dots$. Yksittäisen syntymääjan meneminen väärin ei riipu siitä, menevätkö muut syntymääajat väärin, joten kyseessä on toistokoe.

Kymmenessä syötetyssä syntymääjassa on jokaisessa ainakin 1 virhe todennäköisyydellä $0,149\dots^{10} = 5,479\dots \cdot 10^{-9} \approx 5,5 \cdot 10^{-9}$.

Vastaus: $5,5 \cdot 10^{-9}$

- d) Kohdan b perusteella yksittäinen syntymäaika on virheellinen todennäköisyydellä $p = 0,149\dots$. Yksittäisen syntymääjan meneminen väärin ei riipu siitä, menevätkö muut syntymääajat väärin, joten kyseessä on toistokoe. Sijoitetaan binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 10$, virheellisten syntymäaikojen määrä $k = 1$ ja yksittäisen virheellisen syntymääjan todennäköisyys $p = 0,149\dots$

$$\begin{aligned} & P(10:\text{stä syntymääjasta täsmälleen 1 on väärä}) \\ &= \binom{10}{1} \cdot 0,149\dots^1 \cdot (1 - 0,149\dots)^{10-1} \\ &= \binom{10}{1} \cdot 0,149\dots \cdot 0,850^9 \\ &= 0,348\dots \end{aligned}$$

Kymmenestä syötetystä syntymääjasta täsmälleen 1 on väärä todennäköisyydellä $0,348\dots \approx 0,35$.

Vastaus: 0,35

221. a) Koska arpoja on suuri määrä, voidaan olettaa ettei voitto yhdellä arvalla vaikuta muiden arpojen voiton todennäköisyyteen. Kyseessä on siis toistokoe. Lasketaan kysytty todennäköisyys sijoittamalla binomitodennäköisyyden kaavaan toistojen määrä $n = 5$, voittavien arpojen määrä $n = 3$ ja yksittäisen arvan voiton todennäköisyys

$$p = \frac{1}{4} = 0,25.$$

$$\begin{aligned} &P(\text{täsmälleen 3 arpa voittaa}) \\ &= \binom{5}{3} \cdot 0,25^3 \cdot (1 - 0,25)^{5-3} \\ &= \binom{5}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^2 \\ &= 0,0878\dots \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että täsmälleen kolme arpa voittaa, on $0,0878\dots \approx 0,088$.

Vastaus: 0,088

- b) Jos ensimmäinen arpa voittaa, niin arpoja on ensimmäisen arvan nostamisen jälkeen jäljellä $20 - 1 = 19$ ja voittoarpoja $5 - 1 = 4$, joten toinen arpa voittaa todennäköisyydellä $\frac{4}{19}$. Arpojen voitot eivät ole toisistaan riippumattomia, joten ei voida käyttää binomitodennäköisyyttä.

20 arvan joukosta voidaan valita $\binom{20}{5}$ viiden arvan joukkoa.

Viiden voittoarvan joukosta voidaan valita $\binom{5}{3}$ kolmen voittavan arvan joukkoa.

Niiden 15 arvan joukosta, jotka eivät voita, voidaan valita $\binom{15}{2}$ kahden voittamattoman arvan joukkoa.

Sellaisia viiden arvan joukkoja, joissa on täsmälleen kolme voittoarvaa, on siis $\binom{5}{3} \cdot \binom{15}{2}$.

Todennäköisyys sille, että juuri tällainen viiden arvan joukko tulee

valittua kaikista viiden arvan joukoista, on $\frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{15}{2}}{\binom{20}{5}} = 0,0677\dots$

Todennäköisyys sille, että viidestä arvasta täsmälleen kolme voittaa, on $0,0677\dots \approx 0,068$.

Vastaus: 0,068

222. a) Lauri joutuu satunnaistarkastukseen vähintään kahdesti, jos hän joutuu tarkastukseen 2, 3, 4 tai 5 kertaa. Vastatapahtuma ”Lauri joutuu satunnaistarkastukseen korkeintaan kerran” tapahtuu, jos Lauri joutuu satunnaistarkastukseen 0 tai 1 kertaa. Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned} & P(\text{vähintään 2 tarkastusta}) \\ &= 1 - P(0 \text{ tai } 1 \text{ tarkastusta}) \\ &= 1 - [P(0 \text{ tarkastusta}) + P(1 \text{ tarkastus})] \\ &= 1 - \left[(1 - 0,09)^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,09^1 \cdot (1 - 0,09)^{5-1} \right] \\ &= 0,0673\dots \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että Lauri joutuu vähintään kahdesti satunnaistarkastukseen, on $0,0673\dots \approx 0,067$.

Vastaus: 0,067

- b) Lauri ja Jesper joutuvat tarkastukseen viikon aikana yhteensä vähintään 2 kertaa, jos toinen heistä joutuu tarkastukseen vähintään kahdesti tai molemmat joutuvat tarkastukseen täsmälleen kerran.

Kohdan a perusteella $P(\text{Laurilla vähintään 2 tarkastusta}) = 0,0673\dots$, joten myös $P(\text{Jesperillä vähintään 2 tarkastusta}) = 0,0673\dots$

Lasketaan todennäköisyys sille, että molemmat tarkastetaan täsmälleen kerran.

$$\begin{aligned} & P(\text{molemmat tarkastetaan täsmälleen kerran}) \\ &= P(\text{Lauri täsmälleen kerran}) \cdot P(\text{Jesper täsmälleen kerran}) \\ &= \left[\binom{5}{1} \cdot 0,09^1 \cdot (1-0,09)^{5-1} \right] \cdot \left[\binom{5}{1} \cdot 0,09^1 \cdot (1-0,09)^{5-1} \right] \\ &= \left[\binom{5}{1} \cdot 0,09 \cdot 0,91^4 \right] \cdot \left[\binom{5}{1} \cdot 0,09 \cdot 0,91^4 \right] \\ &= 0,0952\dots \end{aligned}$$

Lasketaan todennäköisyys sille, että molemmat tarkastetaan vähintään kaksi kertaa.

$$\begin{aligned} & P(\text{Laurilla vähintään 2 tarkastusta ja Jesperillä vähintään 2 tarkastusta}) \\ &= P(\text{Laurilla vähintään 2 tarkastusta}) \cdot P(\text{Jesperillä vähintään 2 tarkastusta}) \\ &= 0,0673\dots \cdot 0,0673\dots = 0,00454\dots \end{aligned}$$

Lasketaan kysytty todennäköisyys tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla.

$$\begin{aligned} & P(\text{yhteensä vähintään 2 tarkastusta}) \\ &= P(\text{Laurilla vähintään 2 tarkastusta}) \\ &+ P(\text{Jesperillä vähintään 2 tarkastusta}) \\ &+ P(\text{molemmat tarkastetaan täsmälleen kerran}) \\ &- P(\text{molemmat tarkastetaan vähintään kaksi kertaa}) \\ &= 0,0673\dots + 0,0673\dots + 0,0952\dots - 0,00454\dots \\ &= 0,225\dots \end{aligned}$$

Lauri ja Jesper joutuvat tarkastukseen yhteensä vähintään 2 kertaa todennäköisyydellä $0,225\dots \approx 0,23$.

Vastaus: 0,23

223. Viestissä 10010111 on 3 nollaa ja 5 ykköstä. Viesti välitettiin vastaanottimeen niin, että siinä on korkeintaan yksi virhe, eli virheitä ei ole tai niitä on täsmälleen yksi. Tutkitaan nämä tilanteet yksi kerrallaan.

Viesti välitettiin virheettömänä, jos yksikään merkki ei vaihdu.

Todennäköisyys sille, että nolla ei vaihdu ykköseksi, on $1 - 0,004 = 0,996$.

Todennäköisyys sille, että ykkönen ei vaihdu nollassi, on $1 - 0,007 = 0,993$.

Koko viesti välitettiin virheettömänä todennäköisyydellä $0,996^3 \cdot 0,993^5 = 0,953\dots$

Viesti välitettiin niin, että siinä on täsmälleen yksi virhe, jos yksi nolla vaihtuu ykköseksi mutta yksikään ykkönen ei vaihdu nollassi, tai yksi ykkönen vaihtuu nollassi mutta yksikään nolla ei vaihdu ykköseksi.

Erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön perusteella

$$P(\text{täsmälleen 1 virhe})$$

$$= P(\text{täsmälleen 1 nolla muuttuu ja yksikään ykkönen ei muutu})$$

$$+ P(\text{täsmälleen 1 ykkönen muuttuu ja yksikään nolla ei muutu}).$$

Vaihtuva nolla voidaan valita kolmen nollan joukosta ja vaihtuva ykkönen viiden ykkösen joukosta, joten viestissä on täsmälleen yksi virhe todennäköisyydellä

$$\underbrace{\binom{3}{1} \cdot 0,004^1 \cdot 0,996^2}_{1 \text{ nolla kolmesta vaihtuu}} \cdot \underbrace{0,993^5}_{\text{viisi ykköstä säilyy ykkösinä}} + \underbrace{\binom{5}{1} \cdot 0,007^1 \cdot 0,993^4}_{1 \text{ ykkönen viidestä vaihtuu}} \cdot \underbrace{0,996^3}_{3 \text{ nollaa pysyy nollassa}}$$
$$= 0,0451\dots$$

Viestissä on korkeintaan yksi virhe todennäköisyydellä

$$P(\text{korkeintaan 1 virhe})$$

$$= P(\text{ei virheitä}) + P(\text{täsmälleen 1 virhe})$$

$$= 0,953\dots + 0,0451\dots$$

$$= 0,9990\dots$$

Todennäköisyys sille, että välittyneessä viestissä on korkeintaan yksi virhe, on $0,9990\dots \approx 0,999$.

Vastaus: 0,999

224. Oletetaan, että joukkue A voittaa kunkin joukkueiden A ja B välisen ottelun 53 %:n todennäköisyydellä.

Joukkue A kruunataan mestariksi, jos joukkue A voittaa

- neljä ensimmäistä peliä
- neljästä ensimmäisestä pelistä kolme ja viidennen
- viidestä ensimmäisestä pelistä kolme ja kuudennen
- kuudesta ensimmäisestä pelistä kolme ja seitsemännen.

Tutkitaan nämä toisensa poissulkevat tilanteet yksi kerrallaan.

$$P(\text{A voittaa ensimmäiset 4 ottelua}) = 0,53^4 = 0,0789\dots$$

Peli päättyy joukkueen A voittoon viidennellä ottelulla, jos A voittaa neljästä ensimmäisestä pelistä kolme ja viidennen pelin.

$$\begin{aligned} P(\text{peli päättyy joukkueen A voittoon viidennellä ottelulla}) \\ &= P(\text{joukkue A voittaa neljästä pelistä kolme ja viidennen pelin}) \\ &= \binom{4}{3} \cdot 0,53^3 \cdot (1 - 0,53)^{4-3} \cdot 0,53 \\ &= \binom{4}{3} \cdot 0,53^3 \cdot 0,47^1 \cdot 0,53 \\ &= 0,148\dots \end{aligned}$$

Peli päättyy joukkueen A voittoon kuudennella ottelulla, jos A voittaa viidestä ensimmäisestä pelistä kolme ja kuudennen pelin.

$$\begin{aligned} P(\text{peli päättyy joukkueen A voittoon kuudennella ottelulla}) \\ &= P(\text{joukkue A voittaa viidestä pelistä kolme ja kuudennen pelin}) \\ &= \binom{5}{3} \cdot 0,53^3 \cdot (1 - 0,53)^{5-3} \cdot 0,53 \\ &= \binom{5}{3} \cdot 0,53^3 \cdot 0,47^2 \cdot 0,53 \\ &= 0,174\dots \end{aligned}$$

Peli päättyy joukkueen A voittoon seitsemännellä ottelulla, jos A voittaa kuudesta ensimmäisestä pelistä kolme ja seitsemännen pelin.

$$\begin{aligned} & P(\text{peli päättyy joukkueen A voittoon seitsemännellä ottelulla}) \\ &= P(\text{joukkue A voittaa kuudesta pelistä kolme ja seitsemannen pelin}) \\ &= \binom{6}{3} \cdot 0,53^3 \cdot (1 - 0,53)^{6-3} \cdot 0,53 \\ &= \binom{6}{3} \cdot 0,53^3 \cdot 0,47^3 \cdot 0,53 \\ &= 0,163\dots \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että joukkue A kruunataan mestariksi, on edellisten todennäköisyyksien summa.
 $0,0789\dots + 0,148\dots + 0,174\dots + 0,163\dots = 0,565\dots$

Joukkue A kruunataan mestariksi todennäköisyydellä
 $0,565\dots = 56,5\dots \% \approx 57 \%$.

Vastaus: 57 %

2.2 Binomijakauma ja Poisson-jakauma

ALOITA PERUSTEISTA

225. a) Arpakuution kaikilla kuudella silmäluvulla on sama todennäköisyys $\frac{1}{6}$.

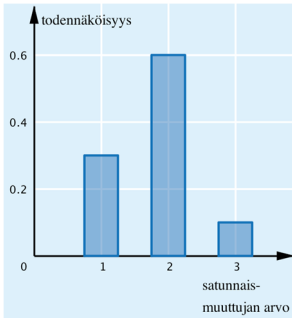
Vastaus: kaikilla silmäluvuilla $\frac{1}{6}$

- b) Silmäluvun odotusarvo lasketaan laskemalla yhteen silmälukujen ja niitä vastaavien todennäköisyyksien tulot.

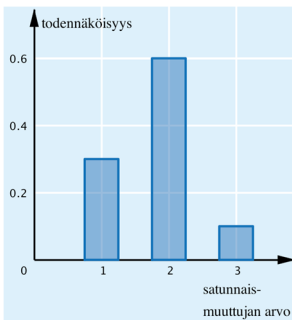
$$\begin{aligned}\mu &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} \\ &= \frac{21}{6} \\ &= 3\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vastaus: $\mu = 3\frac{1}{2}$

226. Piirretään pylväskaavio siten, että pylväiden keskikohdat ovat kohdissa $x = 1$, $x = 2$ ja $x = 3$ ja pylväiden korkeudet ovat vastaavien muuttujan arvojen todennäköisyydet 0,3; 0,6 ja 0,1.



Vastaus:



227. Lasketaan odotusarvo sijoittamalla odotusarvon lausekkeeseen $n = 73$ ja $p = 0,61$.

$$\mu = np = 73 \cdot 0,61 = 44,53$$

Lasketaan keskihajonta sijoittamalla keskihajonnan lausekkeeseen $n = 73$ ja $p = 0,61$.

$$s = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{73 \cdot 0,61 \cdot (1-0,61)} = 4,167... \approx 4,17$$

Vastaus: $\mu = 44,53$ ja $s = 4,17$

228. a) Lasketaan satunnaismuuttujan X arvoja $k = 0, 1, 2$ ja 3 vastaavat todennäköisyydet binomitodennäköisyyksinä $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, kun $n = 3$ ja $p = 0,4$.

$$k = 0: \binom{3}{0} \cdot 0,4^0 \cdot (1-0,4)^{3-0} = 0,216$$

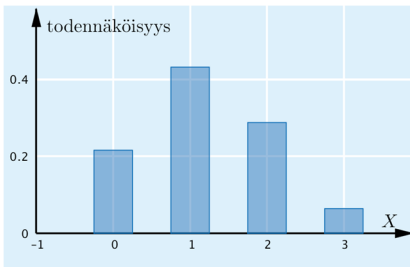
$$k = 1: \binom{3}{1} \cdot 0,4^1 \cdot (1-0,4)^{3-1} = 0,432$$

$$k = 2: \binom{3}{2} \cdot 0,4^2 \cdot (1-0,4)^{3-2} = 0,288$$

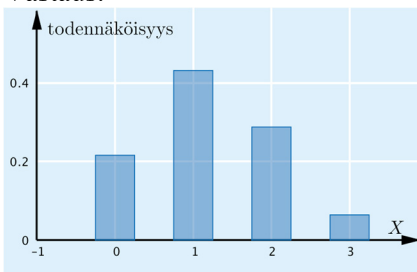
$$k = 3: \binom{3}{3} \cdot 0,4^3 \cdot (1-0,4)^{3-3} = 0,064$$

Vastaus: 0,216; 0,432; 0,288 ja 0,064

- b) Piirretään pylväskaavio siten, että pylväiden keskikohdat ovat kohdissa $x = 0, x = 1, x = 2$ ja $x = 3$ ja pylväiden korkeudet ovat vastaavien muuttujan arvojen todennäköisyydet 0,216; 0,432; 0,288 ja 0,064.



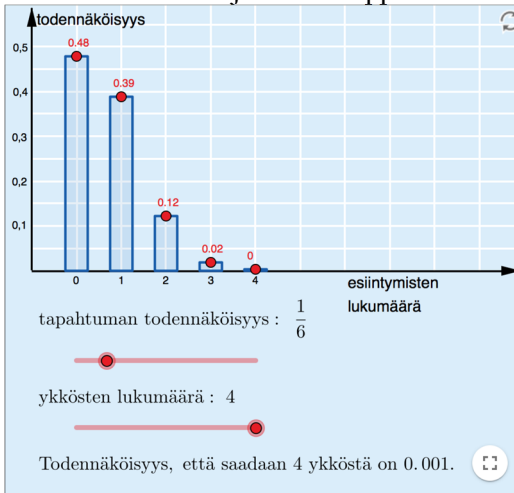
Vastaus:



229. Merkitään satunnaismuuttuja $X =$ ”silmluvun yksi esiintymiskertojen lukumäärä”. Todennäköisyys saada ykkönen on $\frac{1}{6}$. Appletin avulla saadaan todennäköisyydet

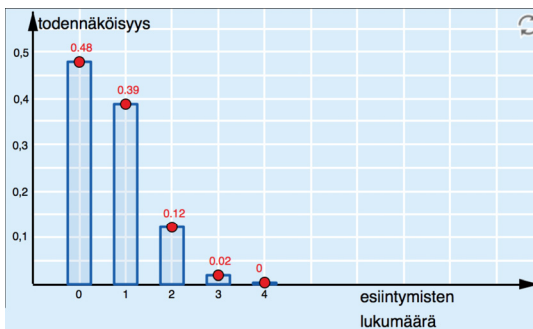
X	0	1	2	3	4
Todennäköisyys	0,482	0,386	0,116	0,015	0,001

Havainnollistetaan jakaumaa appletin avulla.



Vastaus:

X	0	1	2	3	4
Todennäköisyys	0,482	0,386	0,116	0,015	0,001



230. Yhdessä nopan heitossa tapahtuman $A =$ ”silmäluku on 1 tai 2” todennäköisyys on $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Satunnaismuuttuja $X =$ ”tapahtuman A esiintymiskertojen lukumäärä” noudattaa binomijakaumaa, jossa toistojen lukumäärä on $n = 4$ ja todennäköisyys $p = \frac{1}{3}$.

Lasketaan satunnaismuuttujan X arvoja $k = 0, 1, 2, 3$ ja 4 vastaavat todennäköisyydet.

$$P(\text{esiintymiskertojen lukumäärä on } k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} &P(\text{esiintymiskertojen lukumäärä on } 0) \\ &= \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{4-0} = \frac{16}{81} = 0,1975\dots \approx 0,198 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(\text{esiintymiskertojen lukumäärä on } 1) \\ &= \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{4-1} = \frac{32}{81} = 0,3950\dots \approx 0,395 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(\text{esiintymiskertojen lukumäärä on } 2) \\ &= \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{4-2} = \frac{8}{27} = 0,2962\dots \approx 0,296 \end{aligned}$$

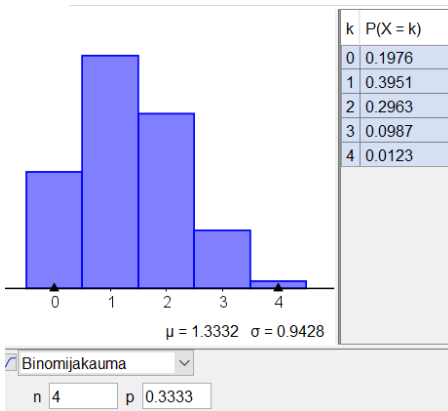
$$\begin{aligned} &P(\text{esiintymiskertojen lukumäärä on } 3) \\ &= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{4-3} = \frac{8}{81} = 0,0987\dots \approx 0,099 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(\text{esiintymiskertojen lukumäärä on } 4) \\ &= \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{4-4} = \frac{1}{81} = 0,0123\dots \approx 0,012 \end{aligned}$$

Esitetään satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauma taulukkona.

X	0	1	2	3	4
Todennäköisyys	0,198	0,395	0,296	0,099	0,012

Tarkistetaan muodostamalla binomitodennäköisyysjakauma sopivalla ohjelmalla.



Vastaus:

X	0	1	2	3	4
Todennäköisyys	0,198	0,395	0,296	0,099	0,012

- 231. A** Kohdan A merkintä tarkoittaa, että satunnaismuuttuja saa arvon yksi tai sitä pienemmän arvon todennäköisyydellä $\frac{3}{4}$. Jakaumasta 2 havaitaan, että kahden ensimmäisen pylvään yhteenlaskettu pinta-ala on $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$, joten merkintä A ja jakauma 2 kuuluvat yhteen.
- B** Odotusarvo saadaan kertomalla satunnaismuuttujan jokainen arvo todennäköisyydellään ja laskemalla tulot yhteen. Jakauman 3 odotusarvo on
- $$\mu = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2},$$
- joten merkintä B ja jakauma 3 kuuluvat yhteen.
- C** Kohdan C merkintä tarkoittaa, että satunnaismuuttuja saa arvon yksi tai sitä pienemmän arvon todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. Jakaumasta 1 havaitaan, että kahden ensimmäisen pylvään yhteenlaskettu pinta-ala on $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, joten merkintä C ja jakauma 1 kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: 2, B: 3 ja C: 1

232. Yhdessä nostossa tapahtuman $A =$ ”nostettu kortti on pata” todennäköisyys on $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. Koska nostettu kortti palautetaan aina takaisin pakkaan, pysyy padan todennäköisyys kaikissa nostoissa samana. Satunnaismuuttuja $X =$ ”tapahtuman A esiintymiskertojen lukumäärä” noudattaa binomijakaumaa, jossa toistokertojen lukumäärä $n = 5$ ja todennäköisyys $p = \frac{1}{4}$.

Lasketaan odotusarvo sijoittamalla odotusarvon lausekkeeseen $n = 5$ ja

$$p = \frac{1}{4}.$$

$$\mu = np = 5 \cdot \frac{1}{4} = 1,25$$

Lasketaan keskihajonta sijoittamalla keskihajonnan lausekkeeseen $n = 5$ ja

$$p = \frac{1}{4}.$$

$$s = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = 0,968\dots \approx 0,97$$

Vastaus: $\mu = 1,25$ ja $s = 0,97$

233. Sovelletaan Poisson-jakaumaa

$$P(\text{tapahtuma } A \text{ tapahtuu täsmälleen } k \text{ kertaa}) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

odotusarvolla $\mu = 5$.

a) Koska perhosia löytyy täsmälleen yksi, on $k = 1$.

$$P(\text{perhosia löytyy täsmälleen } 1) = \frac{5^1}{1!} e^{-5} = 0,0336\dots$$

Keräilijä löytää täsmälleen yhden perhosen $0,0336\dots = 3,36\dots\% \approx 3,4$ prosentin todennäköisyydellä.

Vastaus: 3,4 %

b) ”Ainakin yksi perhonen” on vastatapahtuma tapahtumalle ”ei yhtään perhosta”. Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned} P(\text{Ainakin yksi perhonen}) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{5^0}{0!} e^{-5} \\ &= 1 - 0,00673\dots \\ &= 0,99326\dots \end{aligned}$$

Keräilijä löytää ainakin yhden perhosen $0,99326\dots = 99,326\dots\% \approx 99,3$ prosentin todennäköisyydellä.

Vastaus: 99,3 %

VAHVISTA OSAAMISTA

234. Satunnaismuuttuja X = ”oikeiden vastausten lukumäärä” noudattaa binomijakaumaa. Testin jokaisessa kysymyksessä on kolme vaihtoehtoa, joista yksi on oikein, joten todennäköisyys vastata arvaamalla oikein on $p = \frac{1}{3}$.

- a) Lasketaan odotusarvo sijoittamalla odotusarvon lausekkeeseen $n = 30$ ja $p = \frac{1}{3}$.

$$\mu = np = 30 \cdot \frac{1}{3} = 10$$

Testissä arvaamalla saatujen oikeiden vastausten lukumäärän odotusarvo on 10.

Vastaus: $\mu = 10$

- b) Lasketaan keskihajonta sijoittamalla keskihajonnan lausekkeeseen $n = 30$ ja $p = \frac{1}{3}$.

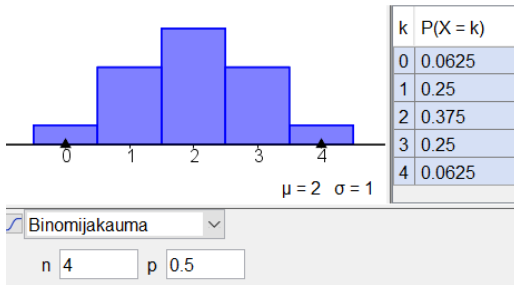
$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)} = 2,581\dots \approx 2,58$$

Testissä arvaamalla saatujen oikeiden vastausten lukumäärän keskihajonta on 2,58.

Vastaus: $s = 2,58$

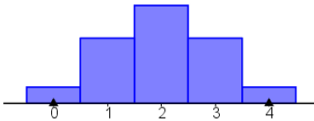
235. Merkitään satunnaismuuttuja X = ”klaavojen lukumäärä”. Kyseessä on binomijakauma, jossa toistojen määrä on $n = 4$ ja klaavan todennäköisyys yhdellä heitolla $p = \frac{1}{2}$.

Muodostetaan jakauma sopivalla ohjelmalla.



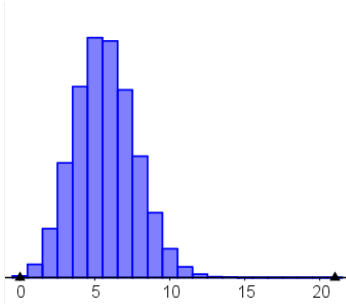
Vastaus:

X	0	1	2	3	4
Todennäköisyys	0,0625	0,250	0,375	0,250	0,0625



236. Merkitään satunnaismuuttuja $X =$ ”veriryhmään O+ kuuluvien lukumäärä”. Kyseessä on binomijakauma, jossa toistojen määrä on $n = 21$ ja todennäköisyys $p = 27\% = 0,27$.

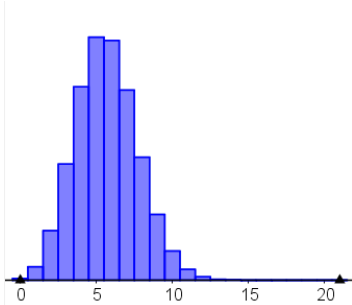
Muodostetaan jakauma sopivalla ohjelmalla.



Veriryhmään O+ kuuluvien opiskelijoiden lukumäärän odotusarvo on $\mu = np = 21 \cdot 0,27 = 5,67$ ja keskihajonta

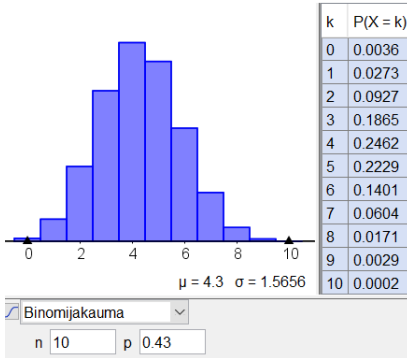
$$s = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{21 \cdot 0,27 \cdot (1-0,27)} = 2,034\dots \approx 2,034$$

Vastaus:



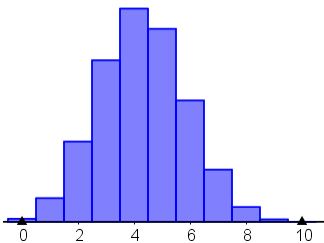
$$\mu = 5,67 \text{ ja } s = 2,03$$

237. Merkitään satunnaismuuttuja X = ”yksilapsisten perheiden lukumäärä”.
Kyseessä on binomijakauma, jossa toistojen määrä $n = 10$ ja todennäköisyys $p = 43 \% = 0,43$.
Muodostetaan jakauma sopivalla ohjelmalla.



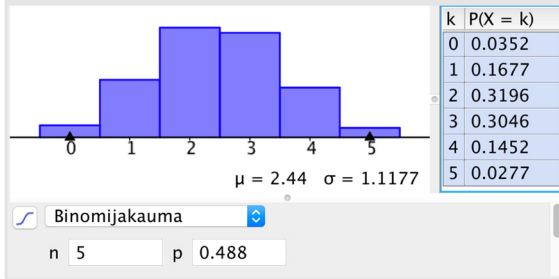
Vastaus:

X	Todennäköisyys
0	0,0036
1	0,0273
2	0,0927
3	0,1865
4	0,2462
5	0,2229
6	0,1401
7	0,0604
8	0,0171
9	0,0029
10	0,0002



238. a) Merkitään satunnaismuuttuja $X =$ ”tyttöjen lukumäärä”. Kyseessä on binomijakauma, jossa toistojen määrä $n = 5$ ja todennäköisyys $p = 0,488$.

Sijoitetaan tiedot sopivaan ohjelmaan.



Vastaus:

X	0	1	2	3	4	5
Todennäköisyys	0,0352	0,1677	0,3196	0,3046	0,1452	0,0277

- b) Lasketaan odotusarvo sijoittamalla odotusarvon lausekkeeseen $n = 5$ ja $p = 0,488$.
 $\mu = np = 5 \cdot 0,488 = 2,44$

Lasketaan keskihajonta sijoittamalla keskihajonnan lausekkeeseen $n = 5$ ja $p = 0,488$.

$$s = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5 \cdot 0,488 \cdot (1-0,488)} = 1,117... \approx 1,12$$

Tulokset ovat samat kuin ohjelman a-kohdassa antamat keskiarvo ja keskihajonta.

Vastaus: $\mu = 2,44$ ja $s = 1,12$. Tulokset ovat samat kuin ohjelman a-kohdassa antamat keskiarvo ja keskihajonta.

239. Sovelletaan Poisson-jakaumaa

$$P(\text{tapahtuma } A \text{ tapahtuu täsmälleen } k \text{ kertaa}) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

odotusarvolla $\mu = 2,73$.

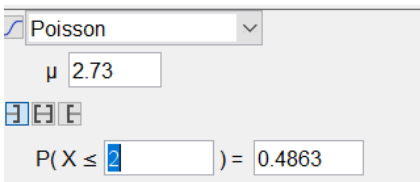
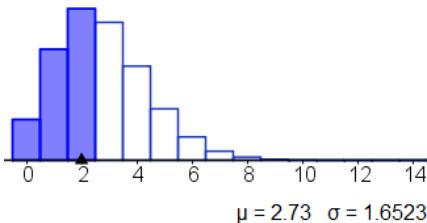
a) Koska maaleja on tasan 2, on $k = 2$.

$$P(X = 2) = \frac{2,73^2}{2!} e^{-2,73} = 0,243\dots$$

Tasan 2 maalia tehdään todennäköisyydellä $0,243\dots \approx 0,24$.

Vastaus: 0,24

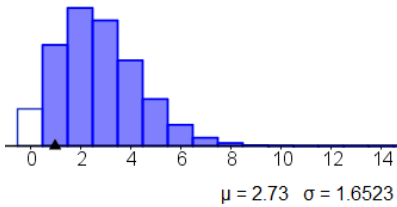
b) Määritetään tapahtuman ”korkeintaan 2 maalia” todennäköisyys $P(X \leq 2)$ sopivalla ohjelmalla.



$$P(X \leq 2) = 0,4863 \approx 0,49.$$

Vastaus: 0,49

- c) Määritetään tapahtuman ”ainakin 1 maali” todennäköisyys $P(X \geq 1)$ sopivalla ohjelmalla.



Poisson

μ 2.73

$P(1 \leq X) = 0.9348$

$$P(X \geq 1) = 0,9348 \approx 0,93.$$

Vastaus: 0,93

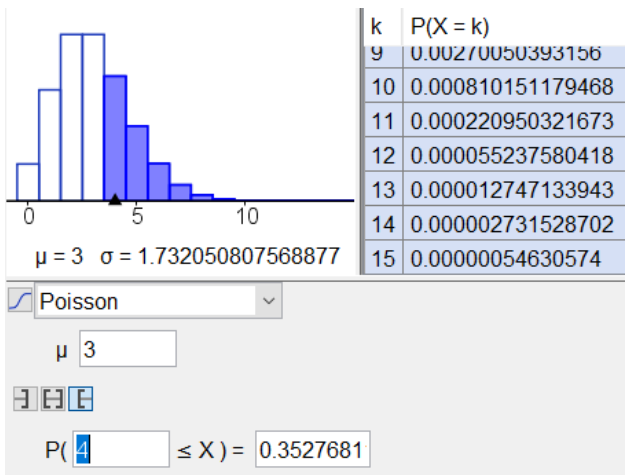
240. Sovelletaan Poisson-jakaumaa

$$P(\text{tapahtuma } A \text{ tapahtuu tasmälleen } k \text{ kertaa}) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

odotusarvolla $\mu = 3$.

Palvelukapasiteetti ylittyy, jos ravintolassa käy yli 3 asiakasta minuutissa. Poisson-jakaumassa satunnaisuuttujan arvot ovat luonnollisia lukuja, joten ravintolassa on tällöin käytävä vähintään 4 asiakasta minuutissa.

Määritetään tapahtuman ”vähintään 4 asiakasta” todennäköisyys $P(X \geq 4)$ sopivalla ohjelmalla.



$$P(X \geq 4) = 0,352... \approx 0,35$$

Vastaus: 0,35

241. Sovelletaan Poisson-jakaumaa

$$P(\text{tapahtuma } A \text{ tapahtuu täsmälleen } k \text{ kertaa}) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

odotusarvolla $\mu = 25$.

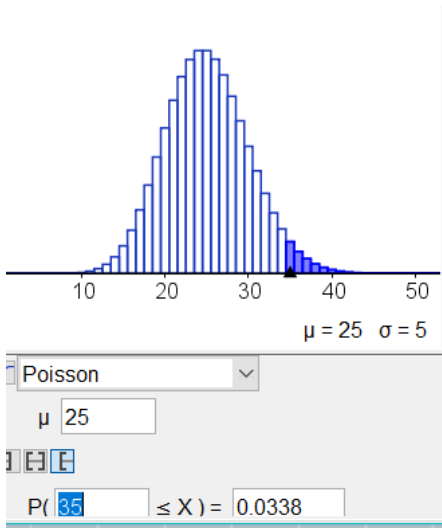
a) Koska pyyntöjä tulee 30, on $k = 30$.

$$P(\text{pyyntöjä tulee täsmälleen } 30) = \frac{25^{30}}{30!} e^{-25} = 0,0454\dots$$

Pyyntöjä tulee sekunnissa 30 todennäköisyydellä $0,0454\dots \approx 0,045$.

Vastaus: 0,045

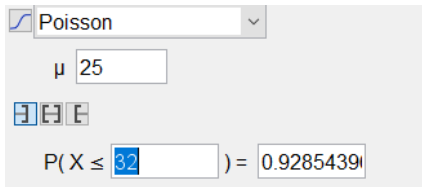
b) Määritetään tapahtuman ”vähintään 35 pyyntöä sekunnissa” todennäköisyys $P(X \geq 35)$ sopivalla ohjelmalla.



$$P(X \geq 35) = 0,0338 \approx 0,034$$

Vastaus: 0,034

- c) Tutkitaan ohjelman avulla, minkä määrän alle pyyntöjen määrä 95 %:n todennäköisyydellä jää.

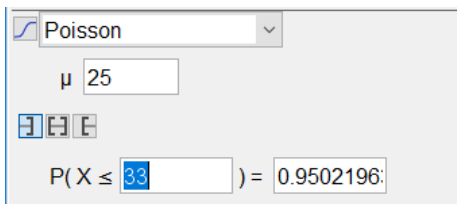


Poisson

μ 25

$P(X \leq 32) = 0.9285439$

Pyyntöjen määrä on 92,854... prosentin todennäköisyydellä korkeintaan 32.



Poisson

μ 25

$P(X \leq 33) = 0.9502196$

Pyyntöjen määrä on 95,021... % \approx 95 %:n todennäköisyydellä korkeintaan 33 eli alle 34.

Vastaus: 34 pyyntöä

242. Sovelletaan Poisson-jakaumaa

$P(\text{tapahtuma } A \text{ tapahtuu täsmälleen } k \text{ kertaa}) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$
odotusarvolla $\mu = 2,1$.

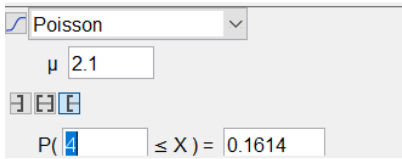
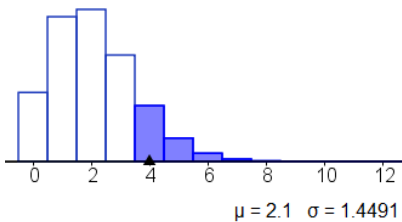
- a) Koska virheitä on tasan 2, on $k = 2$.

$$P(\text{virheitä on tasan } 2) = \frac{2,1^2}{2!} e^{-2,1} = 0,270\dots$$

Tasan 2 virhettä tulee todennäköisyydellä $0,270\dots \approx 27\%$.

Vastaus: 27 %

- b) Määritetään tapahtuman ”enemmän kuin 3 virhettä” todennäköisyys $P(\text{enemmän kuin 3 virhettä})$ sopivalla ohjelmalla. Koska virheiden määrä on luonnollinen luku on $P(X > 3) = P(X \geq 4)$.



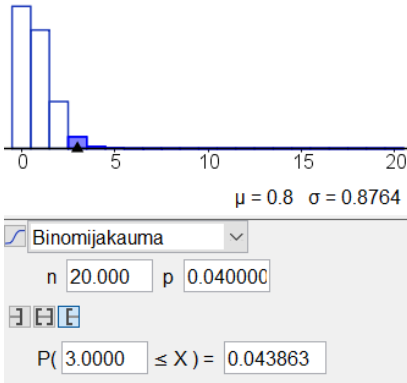
$P(\text{enemmän kuin 3 virhettä}) = 0,1614 \approx 16\%$.

Vastaus: 16 %

- c) Ei tiedetä, kuinka monta virhettä koodaaja korkeintaan voi tehdä, joten virheiden määrän jakaumaa ei voi muodostaa.

Vastaus: Ei tiedetä, kuinka monta virhettä koodaaja korkeintaan voi tehdä 50 rivillä.

243. a) Lasketaan, millä todennäköisyydellä yhdessä pakkauksessa on enemmän kuin kaksi pilaantunutta tomaattia. Kyseessä on binomijakauma, jossa toistojen määrä $n = 20$ ja todennäköisyys $p = 4\% = 0,04$. Määritetään tapahtuman ”enemmän kuin 2 pilaantunutta tomaattia” todennäköisyys $P(\text{enemmän kuin 2 pilaantunutta tomaattia})$ sopivalla ohjelmalla. Koska tomaattien määrä on luonnollinen luku on $P(X > 2) = P(X \geq 3)$.



Todennäköisyys, että yhdessä pakkauksessa on enemmän kuin kaksi pilaantunutta tomaattia on 0,043863. Lasketaan, kuinka monta tällaista pakkausta on odotettavissa 150 pakkauksen joukossa. Kyseessä on binomijakauma, jossa toistojen määrä $n = 150$ ja todennäköisyys $p = 0,0438\dots$ Lasketaan odotusarvo sijoittamalla odotusarvon lausekkeeseen $n = 150$ ja $p = 0,043863$.

$$\mu = np = 150 \cdot 0,043863 = 6,57945 \approx 6,6$$

Palautuvien pakkausten määrän odotusarvo on 6,6.

Vastaus: 6,6 pakkausta

- b) Kauppias saa 150 pakkauksesta voittoa $150 \cdot 0,49 \text{ €} = 73,50 \text{ €}$. Hän joutuu maksamaan ostajille pilaantuneista seitsemästä pakkauksesta $6,579\dots \cdot 2 \cdot 2,59 \text{ €} = 34,081\dots \text{ €} \approx 34,08 \text{ €}$, joten kauppias saa voittoa 150 pakkauksesta $73,50 \text{ €} - 34,08 \text{ €} = 39,42 \text{ €}$.

Vastaus: voittoa 39,42 €

244. Poikien lukumäärä noudattaa binomijakaumaa, jossa $n = 60$ ja $p = 0,513$.
Tyttöjen lukumäärä noudattaa binomijakaumaa, jossa $n = 60$ ja
 $p = 1 - 0,513 = 0,487$.

Poikien lukumäärän odotusarvo on $\mu = np = 60 \cdot 0,513 = 30,78 \approx 31$.

Tyttöjen lukumäärän odotusarvo on $\mu = np = 60 \cdot 0,487 = 29,22 \approx 29$.

Täsmälleen yhtä monta tyttöä ja poikaa syntyy, kun poikia syntyy 30.

Lasketaan binomitodennäköisyys

$$P(A \text{ tapahtuu täsmälleen } k \text{ kertaa}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$P(\text{poikia syntyy } 30) = \binom{60}{30} \cdot 0,513^{30} \cdot (1-0,513)^{60-30} = 0,1005\dots \approx 0,101$$

Vastaus: Poikien lukumäärä noudattaa binomijakaumaa, jossa $n = 60$ ja $p = 0,513$. Tyttöjen lukumäärä noudattaa binomijakaumaa, jossa $n = 60$ ja $p = 0,487$. Poikien lukumäärän odotusarvo 31 ja tyttöjen lukumäärän odotusarvo 29. Todennäköisyydellä 0,101.

245. Mutaatioiden määrän odotusarvo on $\mu = 200\,000\,000 \cdot \frac{1}{100\,000\,000} = 2$.

Sovelletaan Poisson-jakaumaa

$$P(\text{tapahtuma } A \text{ tapahtuu täsmälleen } k \text{ kertaa}) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

odotusarvolla $\mu = 2$.

a) Koska mutaatioita ei ole yhtään, on $k = 0$.

$$P(X = 0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = 0,135\dots$$

Todennäköisyys sille, että yhtään mutaatiota ei ilmaannu, on $0,135\dots \approx 0,14$.

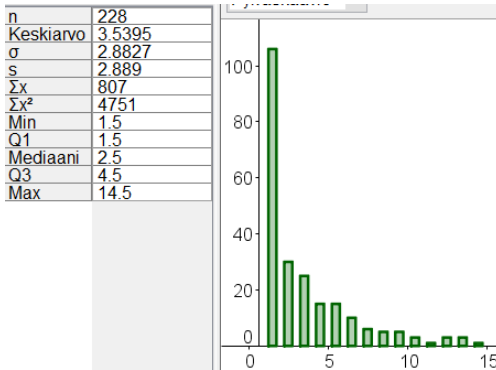
Vastaus: 0,14

b) Tapahtuman ” ilmaantuu ainakin yksi mutaatio ” vastatapahtuma on ” ei ilmaannu yhtäkään mutaatiota”, joten a-kohtan perusteella kysytty todennäköisyys on $1 - 0,135\dots = 0,864\dots \approx 0,86$

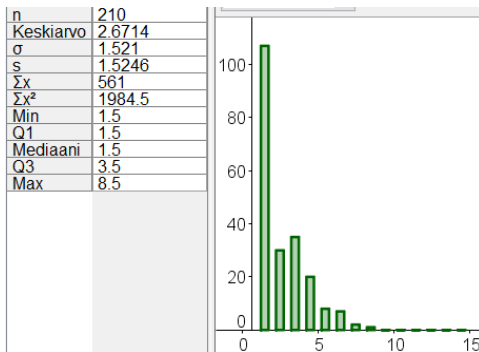
Vastaus: 0,86

246. a) Iän odotusarvo on sama kuin iän keskiarvo. Määritetään naaraiden ja urosten ikien keskiarvo sopivalla ohjelmalla.

Naaraiden iän odotusarvo on 3,5395 vuotta \approx 3,5 vuotta.



Urosten iän odotusarvo on 2,6714 vuotta \approx 2,7 vuotta.

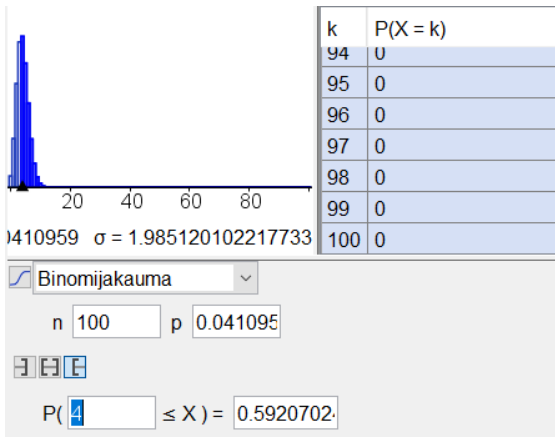


Vastaus: naaras 3,5 vuotta, uros 2,7 vuotta

- b) Lasketaan millä todennäköisyydellä tilaston perusteella kaadetun urospeuran ikä on vähintään 5,5 vuotta. Kaadettuja peuroja on yhteensä 438 ja niistä vähintään 5,5 vuoden ikäisiä urospeuroja on 18, joten todennäköisyys on

$$P(\text{kaadetun urospeuran ikä on vähintään 5,5 vuotta}) = \frac{18}{438} = 0,0410\dots$$

Lasketaan binomijakauman avulla sopivalla ohjelmalla todennäköisyys, että seuraavien 100 kaadetun valkohäntäpeuran joukossa on vähintään 4 urosta, joiden ikä on vähintään 5,5 vuotta.



Todennäköisyydellä $0,592\dots \approx 0,59$ seuraavien 100 kaadetun valkohäntäpeuran joukossa on vähintään 4 urosta, joiden ikä on vähintään 5,5 vuotta.

Vastaus: 0,59

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

247. Olkoon satunnaismuuttuja $X =$ yhdellä arvalla saatu voitto. Muodostetaan satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauma.

Voitto (€)	Todennäköisyys
400	$\frac{2}{800} = 0,0025$
80	$\frac{5}{800} = 0,00625$
20	$\frac{20}{800} = 0,025$
0	$\frac{800 - 2 - 5 - 20}{800} = 0,96625$

Satunnaismuuttujan odotusarvo lasketaan laskemalla yhteen voittojen ja voittoja vastaavien todennäköisyyksien tulot.

$$\mu = 0,0025 \cdot 400 \text{ €} + 0,00625 \cdot 80 \text{ €} + 0,025 \cdot 20 \text{ €} + 0 \cdot 0,96625 = 2 \text{ €}.$$

Jos arvan hinta on 2 €, kaikki pelaajat keskimäärin saavat pelaamansa rahan takaisin. Jos arvan hinta on 4 €, pelaajat saavat siitä keskimäärin 2 € eli 50 % takaisin, joten arvan hinnaksi tulee asettaa 4 €.

Vastaus: 4 €

248. Koska 16 metrin matkalla on keskimäärin yksi kudontavirhe, metrin matkalla on keskimäärin $\frac{1}{16} = 0,0625$ ja viiden metrin matkalla $5 \cdot 0,0625 = 0,3125$ kudontavirhettä. Sovelletaan Poisson-jakaumaa $P(\text{tapahtuma } A \text{ tapahtuu täsmälleen } k \text{ kertaa}) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$ odotusarvolla $\mu = 0,3125$.

Koska virheitä ei ole yhtään, on $k = 0$.

$$P(\text{ei yhtään virhettä}) = \frac{0,3125^0}{0!} e^{-0,3125} = 0,731\dots$$

Viiden metrin pituisessa kangaspalassa ei ole yhtään virhettä todennäköisyydellä $0,731\dots \approx 0,73$.

Vastaus: 0,73

249. Lasketaan millä todennäköisyydellä pelaaja saa yhdellä heitolla korin. Kuuden korin heitossa on kyse binomijakaumasta. Tapahtuman ”ainakin yksi kori kuudessa heitossa” vastatapahtuma on ”ei yhtään koria kuudessa heitossa”.

Sijoitetaan annetut tiedot binomijakauman kaavaan

$$P(A \text{ tapahtuu täsmälleen } k \text{ kertaa}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

$$\begin{aligned} &P(\text{ainakin yksi kori kuudessa heitossa}) \\ &= 1 - P(\text{ei yhtään koria kuudessa heitossa}) \\ &= 1 - P(X = 0) \end{aligned}$$

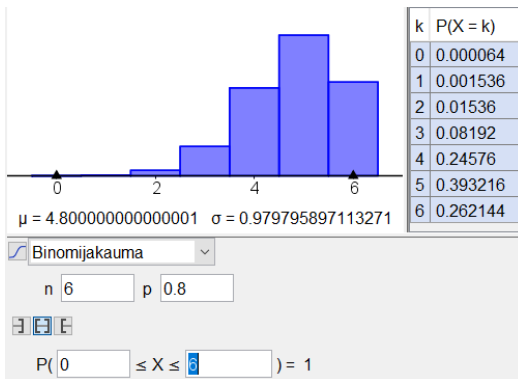
Muodostetaan yhtälö tunnetun todennäköisyyden avulla ja ratkaistaan siitä yhden heiton onnistumisen todennäköisyys p .

$$\begin{aligned} 1 - \binom{6}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{6-0} &= 0,999936 \\ -1 \cdot 1 \cdot (1-p)^6 &= -0,000064 \\ (1-p)^6 &= 0,000064 \\ 1-p &= \pm\sqrt[6]{0,000064} \\ 1-p &= \pm 0,2 \end{aligned}$$

Vastatapahtuman todennäköisyys on suurempi kuin 0, joten hylätään negatiivinen tulos $-0,2$.

$$\begin{aligned} 1-p &= 0,2 \\ -p &= -0,8 \\ p &= 0,8 \end{aligned}$$

Muodostetaan satunnaismuuttujan X jakauma sopivalla ohjelmalla.



Korien määrän X jakauma on seuraava:

X	Todennäköisyys
0	0,000064
1	0,001536
2	0,01536
3	0,08192
4	0,24576
5	0,393216
6	0,262144

Ohjelma antaa korien määrän odotusarvoksi $\mu = 4,800\dots \approx 4,8$.

Vastaus:

X	Todennäköisyys
0	0,000064
1	0,001536
2	0,01536
3	0,08192
4	0,24576
5	0,393216
6	0,262144

$$\mu = 4,8$$

250. a) Määritetään todennäköisyys binomijakauman avulla, kun $n = 500$, $k = 15$ ja $p = 0,02$.

$$P(\text{ominaisuus esiintyy täsmälleen 15 henkilöllä}) \\ = \binom{500}{15} \cdot 0,02^{15} \cdot (1 - 0,02)^{500-15} = 0,03435\dots$$

Todennäköisyys, että ominaisuus A esiintyy täsmälleen 15 henkilöllä 500 henkilön otoksessa on $0,03435\dots = 3,435\dots \% \approx 3,4 \%$.

Vastaus: 3,4 %

- b) Sovelletaan Poisson-jakaumaa odotusarvolla $\mu = 0,02 \cdot 500 = 10$.

$$P(\text{ominaisuus esiintyy täsmälleen 15 henkilöllä}) \\ = \frac{10^{15}}{15!} e^{-10} = 0,03471\dots$$

Todennäköisyys, että ominaisuus A esiintyy täsmälleen 15 henkilöllä 500 henkilön otoksessa on $0,03471\dots = 3,471\dots \% \approx 3,5 \%$

Vastaus: 3,5 %

- c) Huomataan, että b-kohdan tulos on $\frac{0,03471\dots}{0,03435\dots} = 1,0104\dots$ -kertainen a-kohdan tulokseen nähden, joten b-kohdan tulos on $1,04\dots \% \approx 1,0 \%$ suurempi kuin a-kohdan tulos.

Vastaus: 1,0 % suurempi

251. a) Jotta pelaaja pääsisi kolmannelle kierrokselle, on hänen pitänyt avata kahdella kierroksella rosvoton luukku. Tällöin todennäköisyys päästä kolmannelle kierrokselle on $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} = 0,5625$. Määritetään todennäköisyys, että 50 pelaajasta täsmälleen 20 pääsee kolmannelle kierrokselle binomijakauman avulla, kun $n = 50$, $k = 20$ ja $p = 0,5625$.

$$\begin{aligned} P(\text{täsmälleen } 20 \text{ pääsee}) &= \binom{50}{20} \cdot 0,5625^{20} \cdot (1 - 0,5625)^{50-20} \\ &= 0,00803\dots \\ &\approx 0,0080 \end{aligned}$$

Vastaus: 0,0080

- b) Jakauma on binomijakauma. Lasketaan odotusarvo sijoittamalla odotusarvon lausekkeeseen $n = 50$ ja $p = 0,5625$.

$$\mu = np = 50 \cdot 0,5625 = 28,125 \approx 28,1$$

Lasketaan keskihajonta sijoittamalla keskihajonnan lausekkeeseen $n = 50$ ja $p = 0,5625$.

$$s = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{50 \cdot 0,5625 \cdot (1 - 0,5625)} = 3,507\dots \approx 3,51$$

Vastaus: $\mu = 28,1$ ja $s = 3,51$

- c) Olkoon n kierrosten lukumäärä. Ensimmäiselle kierrokselle pääsee varmasti ja sen jälkeen kierrokselta seuraavalle pääsee todennäköisyydellä $\frac{3}{4} = 0,75$, joten todennäköisyys, että pelaaja pääsee kierrokselle n on $0,75^{n-1}$. Muodostetaan odotusarvon avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä sopivalla ohjelmalla n .

$$\mu = np$$

$$2 = 50 \cdot 0,75^{n-1}$$

Ratkaisuksi saadaan $n = 12,189\dots$, joten 12 kierrosta ei riitä. Jatkavien pelaajien määrä on korkeintaan kaksi 13. kierroksella.

$$\begin{aligned} \text{Ratkaise}(2=50 \cdot 0,75^{(n-1)}) \\ \approx \{n = 12.18900388\} \end{aligned}$$

Vastaus: 13. kierros

252. a) Sovelletaan geometrista jakaumaa, kun $k = 24$ ja $p = \frac{1}{20} = 0,05$.

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

$$P(X = 24) = (1 - 0,05)^{24-1} \cdot 0,05 = 0,0153... \approx 0,015$$

Vastaus: 0,015

- b) Lasketaan odotusarvo sijoittamalla odotusarvon lausekkeeseen $p = 0,05$.

$$\mu = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,05} = 20$$

Vastaus: $\mu = 20$

253. a) Muodostetaan satunnaismuuttujan $X =$ ”sen kokeilukerran järjestysluku, jolla avain sopii oveen” jakauma. Kokeilukertoja on korkeintaan 10, koska jokaista avainta kokeillaan korkeintaan kerran. Ensimmäisellä kokeilukerralla oikea avain löytyy todennäköisyydellä $\frac{1}{10}$. Jotta joutuu kokeilemaan toisen kerran, on ensimmäisellä kerralla pitänyt kokeilla väärää avainta, jonka todennäköisyys on $\frac{9}{10}$. Toisella kerralla kokeiltavia avaimia on enää 9, joista 1 on oikea, joten oikean avaimen todennäköisyys on $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9}$ jne.

X	Todennäköisyys
1	$\frac{1}{10} = 0,1$
2	$\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = 0,1$
3	$\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = 0,1$
4	$\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = 0,1$
5	0,1
6	0,1
7	0,1
8	0,1
9	0,1
10	0,1

Vastaus:

X	Todennäköisyys
1	0,1
2	0,1
3	0,1
4	0,1
5	0,1
6	0,1
7	0,1
8	0,1
9	0,1
10	0,1

- b) Jos henkilö ei muista, mitä avainta on kokeillut aiemmin, on oikeaan avaimen osumisen todennäköisyys kaikilla kokeilukerroilla $\frac{1}{10}$. Kokeilukerroilla ei ole ylärajaa. Muodostetaan jakauman alkua taulukoimalla.

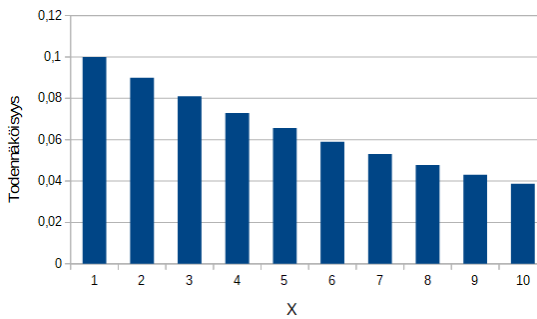
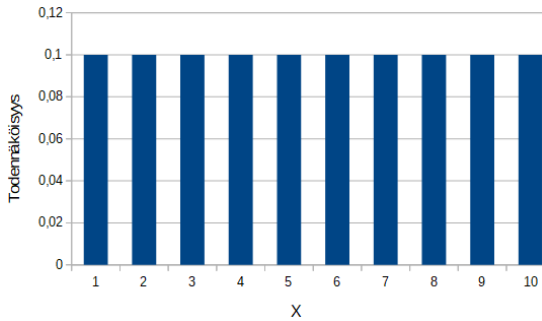
X	Todennäköisyys
1	$\frac{1}{10} = 0,1$
2	$\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0,09$
3	$\left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} = 0,081$
4	$\left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} = 0,0729 \approx 0,073$
5	$\left(\frac{9}{10}\right)^4 \cdot \frac{1}{10} = 0,06561 \approx 0,066$
6	$\left(\frac{9}{10}\right)^5 \cdot \frac{1}{10} = 0,0590... \approx 0,059$
7	$\left(\frac{9}{10}\right)^6 \cdot \frac{1}{10} = 0,0531... \approx 0,053$
8	$\left(\frac{9}{10}\right)^7 \cdot \frac{1}{10} = 0,0478... \approx 0,048$
9	$\left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot \frac{1}{10} = 0,0430... \approx 0,043$
10	$\left(\frac{9}{10}\right)^9 \cdot \frac{1}{10} = 0,0387... \approx 0,039$

Vastaus:

X	Todennäköisyys
1	0,1
2	0,09
3	0,081
4	0,073
5	0,066
6	0,059
7	0,053
8	0,048
9	0,043
10	0,039

c) Havainnollistetaan a- ja b-kohtia pylväskaavioilla.

Vastaus:



254. Pelaajan A todennäköisyys voittaa ensimmäisellä kierroksella on $\frac{1}{6}$. A ei voi voittaa toisella heitolla, koska se on pelaajan B heittovuoro. Jotta A voittaisi kolmannella kierroksella, on hänen saatava ensimmäisellä heitolla joku muu kuin 6 ja pelaajan B on saatava toisella heitolla joku muu kuin 6 ja niin edelleen. Muodostetaan satunnaismuuttujan $X =$ "pelaaja A voittaa kierroksella k " jakauma kymmenelle ensimmäiselle kierrokselle.

X	Todennäköisyys
1	$\frac{1}{6} = 0,1666\dots \approx 0,167$
2	0
3	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0,1157\dots \approx 0,116$
4	0
5	$\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = 0,08037\dots \approx 0,0804$
6	0
7	$\left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} = 0,05581\dots \approx 0,0558$
8	0
9	$\left(\frac{5}{6}\right)^8 \cdot \frac{1}{6} = 0,03876\dots \approx 0,0388$
10	0

Vastaus:

X	Todennäköisyys
1	0,167
2	0
3	0,116
4	0
5	0,0804
6	0
7	0,0558
8	0
9	0,0388
10	0

ALOITUSAUKEAMAAN LIITTYVIÄ TEHTÄVIÄ

1. Yksi vuosi on $365 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min} = 525\,600 \text{ min}$.
Minuutissa tulee keskimäärin $\frac{400\,000}{525\,600} = 0,761\dots$ puhelua, joten viidessä minuutissa tulevien puheluiden odotusarvo on $\mu = 5 \cdot 0,761\dots = 3,805\dots$

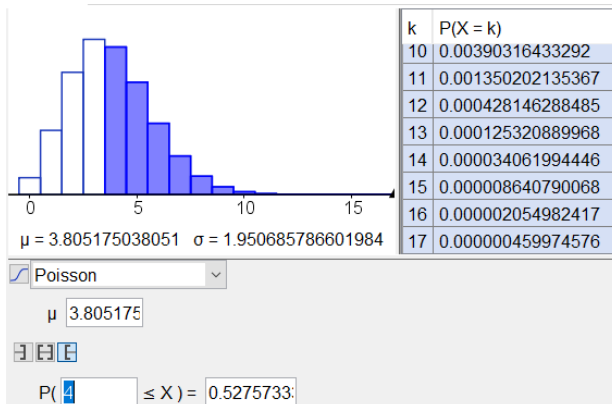
Määritetään kysytty todennäköisyys Poisson-jakauman avulla.

$$P(X = 4) = \frac{3,805\dots^4}{4!} e^{-3,805\dots} = 0,194\dots$$

Satunnaisen viiden minuutin aikana tulee neljä puhelua todennäköisyydellä $0,194\dots \approx 0,19$.

Vastaus: 0,19

2. Määritetään kysytty todennäköisyys Poisson-jakauman avulla sopivalla ohjelmalla, kun puheluiden määrän odotusarvo on $\mu = 3,805\dots$



Satunnaisen viiden minuutin aikana tulee ainakin neljä puhelua todennäköisyydellä $0,527\dots \approx 0,53$.

Vastaus: 0,53