

TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 1-1.** Koska pyörän halkaisija on 8,5 cm, säde on 4,25 cm = 0,0425 m. Yhden pyörähdyksen aikana rengas kulkee matkan $s = 2\pi r = 2\pi \cdot 0,0425$ m. 15 km:n lenkin aikana pyörähdysten määrä on noin

$$\frac{15000 \text{ m}}{2\pi \cdot 0,0425 \text{ m}} \approx 56000.$$

- 1-2.** a) Koska $1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi}$,

$$0,7 \text{ rad} = 0,7 \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 40^\circ \text{ ja}$$

$$6,0 \text{ rad} = 6,0 \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 340^\circ.$$

- b) Koska $1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad}$

$$45^\circ = 45 \cdot \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \approx 0,79 \text{ rad ja}$$

$$750^\circ = 750 \cdot \frac{2\pi}{360} \text{ rad} \approx 13 \text{ rad.}$$

- 1-3.** Kiertokulma on $5 \cdot 360^\circ \approx 1\,800^\circ$.

Kiertokulma on radiaaneina $5 \cdot 2\pi \text{ rad} = 10\pi \text{ rad} \approx 31 \text{ rad}$.

- 1-4.** Pyörimisnopeus 12 500 rpm vastaa pyörimisnopeutta $\frac{12500 \text{ r}}{60 \text{ s}} \approx 210 \text{ r/s}$.
Akseli pyörii sekunnissa 210 kierrosta.

- 1-5.** Koska $14000 \text{ rpm} = \frac{14000 \text{ r}}{60 \text{ s}}$ ja $n = \frac{1}{T}$, terän kierrosajaksi saadaan

$$T = \frac{1}{n} = \frac{60 \text{ s}}{14000} \approx 4,3 \text{ ms}.$$

- 1-6.** a) Kuusen latvan kulkema matka on $s = \varphi r = \frac{\pi}{2} \cdot 15 \text{ m} \approx 24 \text{ m}$.

- b) Kuusen keskikohdan kulkema matka on $s = \varphi r = \frac{\pi}{2} \cdot 7,5 \text{ m} \approx 12 \text{ m}$.

- 1-7.** a) Pyörimisnopeus (kierrostaajuus) on

$$n = \frac{1 \text{ r}}{10,8 \text{ s}} = 0,0925926 \text{ r/s} \approx 0,0926 \text{ r/s}.$$

- b) Lautanen pyörii 0,0925926 kierrosta sekunnissa, joten 2,0 minuutissa eli 120 sekunnissa kierrosten lukumäärä on $120 \cdot 0,0925926 \text{ r} \approx 11,1111 \text{ r}$.
Yksi kierros vastaa kiertokulmaa $2\pi \text{ rad}$, joten kiertokulma 2,0 minuutissa on $\varphi = 11,1111 \cdot 2\pi \approx 70 \text{ rad}$.

- 1-8.** a) Siiven pyörimisnopeus on $n = \frac{10 \text{ r}}{11,1 \text{ s}} \approx 0,90 \frac{\text{r}}{\text{s}} \left(= 0,90 \frac{1}{\text{s}} \right)$.

- b) Kierrosaika $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{\frac{10}{11,1} \frac{1}{\text{s}}} = \frac{11,1 \text{ s}}{10} \approx 1,1 \text{ s}$.

- 1-9.** a) Venttiili on kiertänyt $\frac{2250 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = 358,099 \approx 358$ täyttä kierrosta.

b) Venttiilin pyörimisnopeus on $n = \frac{358,099 \text{ r}}{17,0 \text{ s}} \approx 21,1 \frac{\text{r}}{\text{s}} \left(= 21,1 \frac{1}{\text{s}} \right)$.

1-10. a) Pyörimisnopeus on $n = \frac{1}{T} = \frac{1 \text{ r}}{7,0 \text{ s}} \approx 0,14 \text{ r/s}$.

b) Kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \text{ rad} \cdot \frac{1}{7,0 \text{ s}} \approx 0,90 \text{ rad/s}$.

1-11. Pyörän neljään pyörähdykseen kulunut aika on noin 4,7 s, joten yhteen pyörähdykseen kulunut aika on 1,175 s. Koska yhteen pyörähdykseen (360°) kuluu aikaa 1,175 sekuntia, 3,6 sekunnissa pyörä pyörii

$$\frac{3,6 \text{ s} \cdot 360^\circ}{1,175 \text{ s}} \approx 1100^\circ.$$

Tulokseen aiheuttaa virhettä se, että pyörimisakselissa syntyvän kitkan ja ilmanvastuksen takia pyörän pyöriminen hidastuu.

1-12. a) Pyöriminen on tasaista, koska kuvaajat t, φ -koordinaatistossa ovat suoria.

b) Koska levyn A kuvaaja on jyrkempi kuin B:n, levyn A kulmanopeus on suurempi.

Levyn A kulmanopeus on

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{40,0 \text{ rad} - 0,0 \text{ rad}}{3,0 \text{ s} - 0,0 \text{ s}} = \frac{40,0 \text{ rad}}{3,0 \text{ s}} \approx 13 \text{ rad/s}.$$

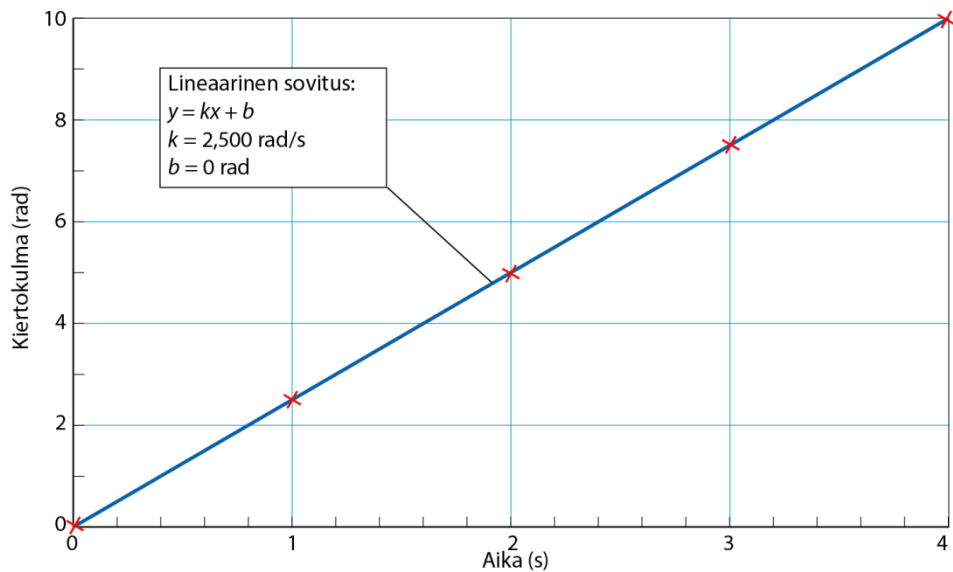
c) Kolmea täyttä kierrosta vastaava kiertokulma on $3 \cdot 2\pi \text{ rad} \approx 18,8 \text{ rad}$.

Näin ollen levy

* A saavuttaa kiertokulman 18,8 rad hetkellä $t = 1,4$ s ja

* B hetkellä $t = 3,8$ s.

1-13. Viedään mittaustulokset mittausohjelmaan ja esitetään ne t, γ -koordinaatistossa.



Kulmanopeus saadaan t, γ -koordinaatiston fysikaalisesta kulmakertoimesta: $\omega = 2,5 \text{ rad/s}$.

- 1-14.** a) Maa pyörähtää akselinsa ympäri kerran vuorokaudessa.
Taulukkokirjan mukaan pyörähdysaika on 23 h 56 min 4,10 s.
Pyörimisnopeus on

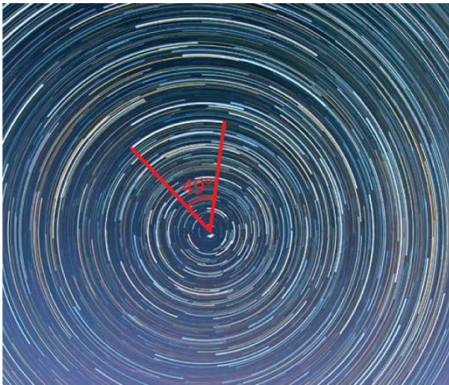
$$n = \frac{1}{T} = \frac{1 \text{ r}}{23 \text{ h } 56 \text{ min } 4,10 \text{ s}} = \frac{1 \text{ r}}{86\,164,1 \text{ s}} = 1,16058 \cdot 10^{-5} \text{ r/s} \approx 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ r/s}.$$

b) Kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 1,16058 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}.$

- 1-15.** Kulmanopeuden yhtälöstä $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ saadaan kiertokulmaksi

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = 7,7 \text{ rad/s} \cdot 2,5 \text{ s} \approx 19 \text{ rad}.$$

- 1-16.** Valokuvan keskellä näkyy kaari, jonka asteluku on noin 49 astetta.



Näin ollen kameran valotusaika on $\frac{49}{360} \cdot 24 \text{ h} \approx 3,3 \text{ h}.$

TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 2-1.** Pyörimisessä ja ympyräliikkeessä kyse on kahdesta eri liikkeestä. Kappale on ympyräliikkeessä, jos se liikkuu pitkin ympyrärataa. Esimerkiksi karusellissa istuja liikkuu pitkin ympyrärataa. Kaikki liike, jossa kappaleen asento muuttuu, on pyörimistä. Ympyräliikkeessä tarkastellaan kappaleen paikan muuttumista, ei asennon muuttumista.
- 2-2.** a) Väite on oikein.
- b) Väite on oikein.
- c) Väite on oikein.
- d) Väite on oikein.
- e) Väite on oikein.
- 2-3.** a) Gravitaatiovoima pitää Maan Auringon kiertoradalla.
- b) Kitka karusellin istuimen ja lapsen välillä estää lapsen liukumisen. Joskus myös rakenteiden, kuten kaiteiden tukivoimat estävät liukumisen.
- c) F1-auton pitää kaarteessa tien pinnan ja renkaiden välinen lepokitka.
- 2-4.** a) Väite on oikein. Ympyräradalla nopeusvektorin suunta on radan tangentin suunta. Radan säde ja nopeusvektori ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Väite on väärin. Ympyräradalla liikkuvan kappaleen nopeusvektorin suunta muuttuu koko ajan. Silloin nopeus muuttuu ja kyseessä on kiihtyvä liike. Kappaleen ratavauhti voi olla vakio, mutta silloinkin kyseessä on kiihtyvä liike, koska nopeuden suunta muuttuu. (Jos lisäksi ratavauhti suurenee tai pienenee, kokonaiskiihtyvyys on tangenttikiihtyvyyden ja normaalikiihtyvyyden vektorisumma.)

c) Väite on väärin. Kiihtyvyys ei ole vakio, koska kiihtyvyyden suunta muuttuu kappaleen liikkuessa ympyräradalla.

2-5. Normaalikiihtyvyyden suuruus kurvissa A on

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{75}{3,6} \text{ m/s}\right)^2}{320 \text{ m}} \approx 1,4 \text{ m/s}^2, \text{ suunta kohti radan keskipistettä.}$$

Normaalikiihtyvyyden suuruus kurvissa B on

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{75}{3,6} \text{ m/s}\right)^2}{550 \text{ m}} \approx 0,79 \text{ m/s}^2, \text{ suunta kohti radan keskipistettä.}$$

Normaalikiihtyvyyden suuruus on kääntäen verrannollinen radan säteen suuruuteen. Normaalikiihtyvyys on suurempi kurvissa A, koska ratanopeus on sama kummassakin kurvissa ja kurvin A säde on pienempi kuin kurvin B säde.

2-6. a) Ympyräradalla autoon vaikuttavan voiman suuruus on

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{1200 \text{ kg} \cdot \left(\frac{18 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}\right)^2}{22 \text{ m}} \approx 1,4 \text{ kN.}$$

b) Auto pysyy ympyräradalla kitkan ansiosta. Newtonin II lain mukaan

on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_n$ eli $\vec{F}_\mu = m\vec{a}_n$, jossa kitkan suuruus on $F_\mu = \mu mg$ ja normaalikiihtyvyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$. Yhtälöstä $\mu mg = \frac{mv^2}{r}$ saadaan kitkakertoimeksi

$$\mu = \frac{v^2}{gr} = \frac{\left(\frac{18 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}\right)^2}{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 22 \text{ m}} \approx 0,12.$$

Riittävän suuri kitkakerroin auton pitämiseksi ympyräradalla on 0,12. Jos kitkakerroin on 0,20, auto pysyy ympyräradalla.

2-7. a) Elektronin normaalikiihtyvyyden suuruus on

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(2,18 \text{ Mm/s})^2}{52,8 \text{ pm}} \approx 9,00 \cdot 10^{22} \text{ m/s}^2.$$

b) Yhteen kierrokseen kuluva aika on

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 52,8 \text{ pm}}{2,18 \text{ Mm/s}} \approx 1,52180 \cdot 10^{-16} \text{ s}.$$

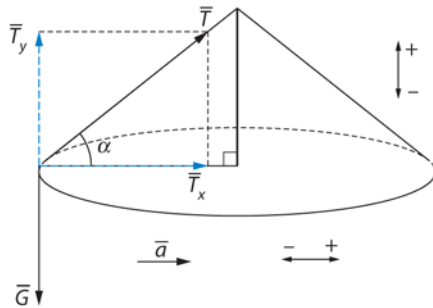
Elektroni kiertää yhdessä sekunnissa $\frac{1,0 \text{ s}}{1,52180 \cdot 10^{-16} \text{ s}} \approx 6,57 \cdot 10^{15}$ kierrosta.

2-8. Normaalikiihtyvyyden suuruus on $a_n = \frac{v^2}{r}$. Nyt on oltava $a_n = \frac{v^2}{r} < 3g$, josta saadaan

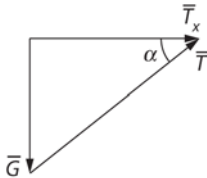
$$\frac{v^2}{r} < 3g \text{ eli } v < \sqrt{r \cdot 3g} = \sqrt{63 \text{ m} \cdot 3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 43,0591 \text{ m/s} \approx 43 \text{ m/s}.$$

Ratanopeuden on siis oltava pienempi kuin 43 m/s.

- 2-9. a) Koneeseen kohdistuvat voimat ovat langan jännitysvoima $\vec{T}$ ja paino $\vec{G}$, ilmanvastus voidaan olettaa pieneksi. Langan jännitysvoiman vaakasuuntainen komponentti $\vec{T}_x$ pitää koneen ympyräradalla ja antaa sille normaalikiikhtyvyyden $\vec{a}_n$.



- b) Lentokoneeseen vaikuttavat voimat ovat suorakulmaisen kolmion sivuina:



Kulman α suuruus saadaan yhtälöstä $\cos \alpha = \frac{0,70 \text{ m}}{0,90 \text{ m}}$, josta $\alpha = 38,9424^\circ$.

Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan $\tan \alpha = \frac{G}{T_x}$, josta

$$T_x = \frac{mg}{\tan \alpha} = \frac{0,200 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{\tan 38,9424^\circ} \approx 2,42785 \text{ N}.$$

Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_n$. Valitaan suunta kohti ympyräradan keskipistettä positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö $T_x = m \frac{v^2}{r}$.

Ratanopeudeksi saadaan

$$v = \sqrt{\frac{T_x \cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{2,42785 \text{ N} \cdot 0,70 \text{ m}}{0,200 \text{ kg}}} \approx 2,9 \text{ m/s}.$$

Toinen tapa:

Lasketaan ensin langan suunta vaakatasoon nähden:

$$\cos \alpha = \frac{0,70 \text{ m}}{0,90 \text{ m}}, \text{ josta saadaan kulma } \alpha \approx 38,9424^\circ.$$

Koska kone kiertää ympyrärataa korkeuttaan muuttamatta, Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ eli $\vec{T}_y + \vec{G} = \vec{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $T_y - G = 0$. Skalaariyhtälöstä saadaan $T_y = G$ eli

$T \sin \alpha = mg$, josta langan jännitysvoiman suuruus on

$$T = \frac{mg}{\sin \alpha} = \frac{0,200 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{\sin 38,9424^\circ} \approx 3,12152 \text{ N}.$$

Newtonin II lain mukaan vaakasuunnassa on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_n$. Valitaan suunta

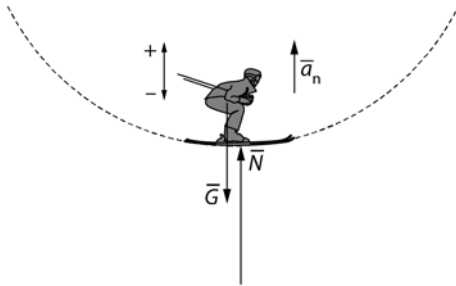
kohti ympyräradan keskipistettä positiiviseksi, jolloin saadaan

skalaariyhtälö $T_x = m \frac{v^2}{r}$ eli $T \cos \alpha = m \frac{v^2}{r}$. Ratkaistaan tästä yhtälöstä

koneen ratanopeus:

$$v = \sqrt{\frac{Tr \cos \alpha}{m}} = \sqrt{\frac{3,12152 \text{ N} \cdot 0,70 \text{ m} \cdot \cos 38,9424^\circ}{0,200 \text{ kg}}} \approx 2,9 \text{ m/s}.$$

2-10.

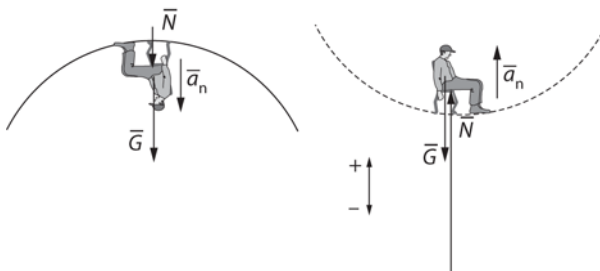


Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_n$ eli $\vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}_n$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälöstä $N - G = \frac{mv^2}{r}$ rinteän tukivoiman suuruudeksi alimmassa kohdassa saadaan

$$N = \frac{mv^2}{r} + G = \frac{mv^2}{r} + mg = \frac{82 \text{ kg} \cdot \left(\frac{45 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \right)^2}{22 \text{ m}} + 82 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 1,4 \text{ kN}.$$

Rinteestä laskijan jalkoihin kohdistuvan voiman suuruus on yhtä suuri kuin rinteän tukivoiman suuruus eli 1,4 kN.

2-11. a)

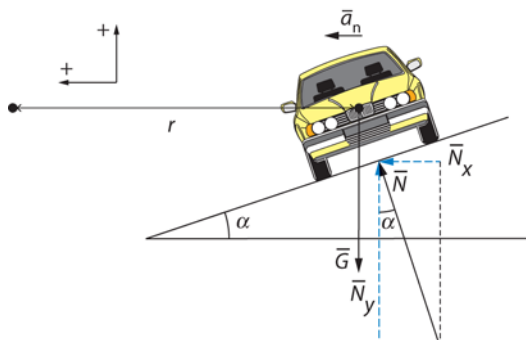


- b) Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_n$ eli $\vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}_n$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälöstä $N - G = \frac{mv^2}{r}$ istuimen tukivoiman suuruudeksi silmukan alimmassa kohdassa saadaan

$$N = \frac{mv^2}{r} + G = \frac{mv^2}{r} + mg = \frac{85 \text{ kg} \cdot \left(\frac{360 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}\right)^2}{1000 \text{ m}} + 85 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 1,7 \text{ kN}.$$

Tukivoima on yli 2-kertainen lentäjään kohdistuvaan painoon verrattuna.

2-12.



Kun vastusvoimat ovat pienet, autoon kohdistuvat voimat ovat paino ja tienpinnan tukivoima. Auton radan säde on etäisyys radan keskipisteestä. Auton tiellä pitävä kokonaisvoima suuntautuu kaarteeseen keskipistettä kohti ja on vaakasuora. Newtonin II lain mukaan vaakasuunnassa on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_n$ ja pystysuunnassa $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$, koska autolla ei ole kiihtyvyyttä pystysuunnassa.

Kun valitaan suunnat radan keskipistettä kohti ja ylös positiivisiksi, saadaan skalaariyhtälöt

$$N_x = m \frac{v^2}{r} \text{ ja } N_y - G = 0 \text{ eli } N \sin \alpha = m \frac{v^2}{r} \text{ ja } N \cos \alpha - mg = 0.$$

Kirjoitetaan yhtälöt allekkain:

$$N \sin \alpha = m \frac{v^2}{r}$$

$$N \cos \alpha = mg.$$

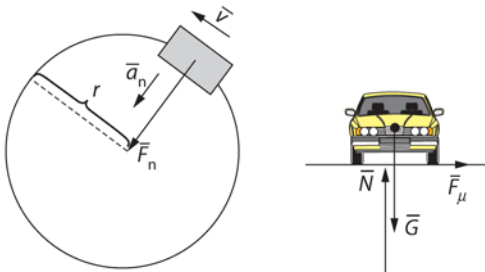
Kun yhtälöt jaetaan puolittain, saadaan $\frac{N \sin \alpha}{N \cos \alpha} = \frac{m \frac{v^2}{r}}{mg}$ eli

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{gr} = \frac{\left(\frac{72}{3,6} \text{ m/s}\right)^2}{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 150 \text{ m}}.$$

Kaltevuuskulman tulee olla 15° .

2-13. a) Jos auto ajaa maksiminopeudella, auton ratanopeus on vakio:

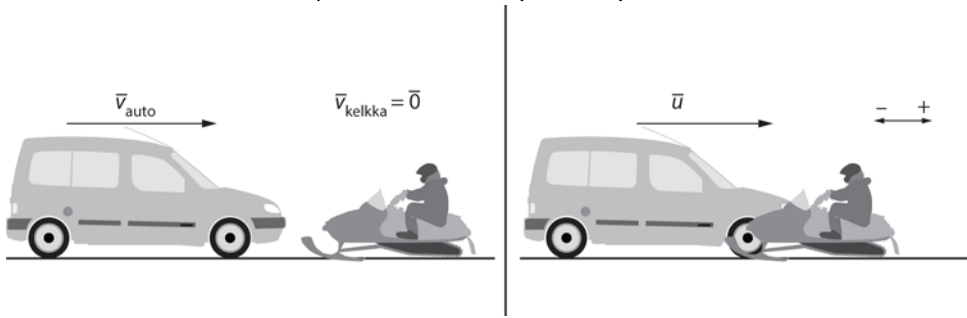
$$v_{\max} = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi \cdot 30 \text{ m}}{33,5 \text{ s}} \approx 5,62673 \text{ m/s}.$$



Auto pysyy ympyräradalla renkaiden ja tien pinnan välisen lepokitkan takia. Koska auton ratanopeus on suurin mahdollinen, renkaiden ja tien välinen kitka on täysin kehittynyt lepokitka. Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_n$ eli $\vec{F}_\mu = m\vec{a}_n$, jossa kitkan suuruus on $F_\mu = \mu_0 N = \mu_0 mg$ ja normaalikiihtyvyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$. Yhtälöstä $\mu_0 mg = m \frac{v_{\max}^2}{r}$ renkaiden ja tien pinnan väliseksi lepokitkakertoimeksi saadaan

$$\mu_0 = \frac{v_{\max}^2}{rg} = \frac{(5,62673 \text{ m/s})^2}{30 \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \approx 0,11.$$

b) Oletetaan, että auton ja kelkan törmäys on täysin kimmoton.



Auton ja kelkan liikemäärä säilyy törmäyksessä eli

$\vec{m}_{\text{auto}} \vec{v}_{\text{auto}} = (m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}}) \vec{u}$. Kun auton liikkeen suunta on positiivinen, auton ja kelkan yhteisen nopeuden suuruus u heti törmäyksen jälkeen on

$$u = \frac{m_{\text{auto}} v_{\text{auto}}}{m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}}} = \frac{1080 \text{ kg} \cdot \frac{17 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}}{1080 \text{ kg} + 380 \text{ kg}} \approx 3,49315 \text{ m/s}.$$

Oletetaan ilmanvastus pieneksi. Työ-energiaperiaatteen mukaan auto ja kelkka pysähtyvät, kun kitkan tekemä työ on yhtä suuri kuin auton ja

kelkan liike-energia heti törmäyksen jälkeen eli $E_{\text{kin}} = W_{\mu 1} + W_{\mu 2}$.

Kun työ-energiaperiaatteen yhtälöön sijoitetaan liike-energian ja töiden

yhtälöt, saadaan $\frac{1}{2}(m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}})u^2 = F_{\mu 1}s + F_{\mu 2}s$.

Ratkaistaan edellisestä yhtälöstä auton ja kelkan liukuma matka s :

$$\frac{1}{2}(m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}})u^2 = (\mu_1 N_{\text{auto}} + \mu_2 N_{\text{kelkka}})s$$

$$\frac{1}{2}(m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}})u^2 = (\mu_1 m_{\text{auto}}g + \mu_2 m_{\text{kelkka}}g)s$$

$$\frac{1}{2}(m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}})u^2 = (\mu_1 m_{\text{auto}} + \mu_2 m_{\text{kelkka}})gs.$$

Auton ja kelkan liukuma matka on

$$s = \frac{(m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}})u^2}{2g(\mu_1 m_{\text{auto}} + \mu_2 m_{\text{kelkka}})} = \frac{(1080 \text{ kg} + 380 \text{ kg}) \cdot (3,49315 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (0,090 \cdot 1080 \text{ kg} + 0,20 \cdot 380 \text{ kg})} \approx 5,2 \text{ m}.$$

TESTAA, OSAATKO S. 25

1. a,b 2. c 3. b, c 4. a, b, c 5. a 6. a,c 7. a,b,c 8. a,b,c 9. b,c 10. a,b,c 11.
a,b,c,d

TEHTÄVIEN RATKAISUT

3-1. Maan radan eksentrisyys on 0,0167 ja Marsin 0,0934. Näin ollen Maan kiertorata Auringon ympäri on lähempänä ympyrärataa kuin Marsin.

3-2. a) Esimerkiksi Sibelius-asteroidin radan säde on

$$2,25\text{AU} = 2,25 \cdot 149,5979 \cdot 10^9 \text{ m} \approx 336,6 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Tämän asteroidin (kuten muidenkin asteroidien radat) sijaitsee Jupiterin ja Marsin ratojen välissä. Joidenkin asteroidien radat poikkeavat tavanomaisista asteroidien radoista.

b) Juhani-asteroidin ratanopeus on

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 2,40 \cdot 149,5979 \cdot 10^6 \text{ km}}{3,72 \cdot 365 \cdot 24 \text{ h}} \approx 69\,200 \text{ km/h}.$$

c) Verrataan Sibelius- ja Helsinki-asteroideja. Keplerin III lain mukaan on

$$\left(\frac{T_S}{T_H}\right)^2 = \left(\frac{r_S}{r_H}\right)^3.$$

Kiertoaikojen suhteen neliö on $\left(\frac{3,37 \text{ a}}{4,29 \text{ a}}\right)^2 \approx 0,62$ ja kiertoratojen säteiden

suhteen kuutio $\left(\frac{2,25 \text{ AU}}{2,64 \text{ AU}}\right)^3 \approx 0,62$. Keplerin III laki toteutuu.

3-3. a) Kohdassa 1 Maan ratanopeus on suurin. Kohdassa 3 Maan ratanopeus on pienin.

b) Kohta 1 on talvipäivänseisaus. Kohta 3 on kesäpäivänseisaus.

3-4. Keplerin III lain mukaan on $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$ eli $\frac{T_{\text{Io}}^2}{T_{\text{Gany}}^2} = \frac{r_{\text{Io}}^3}{r_{\text{Gany}}^3}$. Ganymedes-kuun

$$\text{kiertoaika on } T_{\text{Gany}} = T_{\text{Io}} \cdot \sqrt{\frac{r_{\text{Gany}}^3}{r_{\text{Io}}^3}} = 1,8 \text{ d} \cdot \sqrt{\left(\frac{11 \cdot 10^8 \text{ m}}{4 \cdot 10^8 \text{ m}}\right)^3} \approx 8 \text{ d}.$$

3-5. Merkitään $T_1 = 11,863 \text{ a}$, $r_1 = 778,4 \cdot 10^6 \text{ km}$ ja $T_2 = 84,04 \text{ a}$. Keplerin III laista $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$ saadaan Uranuksen keskitäisyydeksi

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{r_1^3 T_2^2}{T_1^2}} = \sqrt[3]{\frac{(778,4 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \text{ m})^3 \cdot (84,04 \text{ a})^2}{(11,863 \text{ a})^2}} \\ \approx 2,871 \cdot 10^{12} \text{ m} = 2,871 \cdot 10^9 \text{ km} = 2871 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

3-6. a) Kuun ja Maan välillä on gravitaatiovuorovaikutus. Maa vetää Kuuta yhtä suurella voimalla kuin Kuu Maata. Kuu kiertää Maata, koska Maan massa on huomattavasti suurempi kuin Kuun massa.

b) Maan ja Auringon välillä on gravitaatiovuorovaikutus. Aurinko vetää Maata yhtä suurella voimalla kuin Maa Aurinkoa. Maa kiertää Aurinkoa, koska Auringon massa on huomattavasti suurempi kuin Maan massa.

3-7. Ellan massa on 51 kg.

a) Maan Ellaan kohdistaman gravitaatiovoiman suuruus on

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2} = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 51 \text{ kg}}{(6378 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 500 \text{ N}.$$

Voiman suunta on kohti Maan keskipistettä.

b) Ellaan kohdistuva paino on

$$G = mg = 51 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 500 \text{ N}.$$

Painon suunta on kohti Maan keskipistettä.

3-8. Oletetaan, että massasi on 55 kg.

a) Kuu kohdistaa sinuun gravitaatiovoiman, jonka suuruus on

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{7,348 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 55 \text{ kg}}{(384\,400 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \\ = 1,82545 \cdot 10^{-3} \text{ N} \approx 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

Voiman suunta on kohti Kuun keskipistettä.

b) Aurinko kohdistaa sinuun gravitaatiovoiman, jonka suuruus on

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 55 \text{ kg}}{(149,598 \cdot 10^9 \text{ m})^2} \\ = 0,326250 \text{ N} \approx 0,33 \text{ N}.$$

Voiman suunta on kohti Auringon keskipistettä.

$$\text{Voimien suhde on } \frac{F_{\text{Aurinko}}}{F_{\text{Kuu}}} = \frac{0,326250 \text{ N}}{0,00182545 \text{ N}} \approx 180, \text{ eli } F_{\text{Aurinko}} \approx 180 \cdot F_{\text{Kuu}}.$$

3-9. a) Gravitaatiovoiman suuruus on

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2} = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{0,42 \text{ kg} \cdot 0,059 \text{ kg}}{(2,0 \text{ m})^2} \\ = 4,13472 \cdot 10^{-13} \text{ N} \approx 4,1 \cdot 10^{-13} \text{ N}.$$

b) Kiihtyvyys on

$$a = \frac{F}{m} = \frac{4,13472 \cdot 10^{-13} \text{ N}}{0,059 \text{ kg}} \approx 7,0 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}^2.$$

3-10. Kuulien säde on 7,5 cm ja keskipisteiden etäisyys 15 cm. Tiheyden yhtälöstä $\rho = m/V$ saadaan kuulan massaksi

$$m = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = 7,87 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0,075 \text{ m})^3 = 13,9074 \text{ kg}.$$

Gravitaatiovoiman suuruus on

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{13,9074 \text{ kg} \cdot 13,9074 \text{ kg}}{(0,15 \text{ m})^2} \approx 5,7 \cdot 10^{-7} \text{ N}.$$

3-11. a) Sähköisen vetovoiman suuruus on Coulombin lain mukaan

$$F = k \frac{|Q_1 \cdot Q_2|}{r^2} = k \frac{e^2}{r^2} = 8,98755 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(5 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2} \approx 9 \cdot 10^{-8} \text{ N}.$$

Voima on vetovoima.

b) Gravitaatiovoiman suuruus on gravitaatiolain mukaan

$$F = \gamma \frac{m_e m_p}{r^2} = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{9,10938 \cdot 10^{-31} \text{kg} \cdot 1,67262 \cdot 10^{-27} \text{kg}}{(5 \cdot 10^{-11} \text{m})^2} \approx 4 \cdot 10^{-47} \text{N}.$$

Voima on vetovoima.

c) Voimien välillä on merkittävä suuruusluokkaero!

3-12. Olkoon kysytty etäisyys x Maan keskipisteestä lukien. Sijoitetaan kappale, jonka massa on m , kohtaan, jossa Maan ja Auringon vetovoimat ovat yhtä suuret. Tällöin Newtonin II lain mukaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on nolla: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ eli $\vec{F}_{\text{Maa}} + \vec{F}_{\text{Aurinko}} = \vec{0}$.

Kun sovitaan suunta kohti Maan keskipistettä positiiviseksi, yhtälö

$$\vec{F}_{\text{Maa}} + \vec{F}_{\text{Aurinko}} = \vec{0} \text{ on skalaarimuodossa } F_{\text{Maa}} - F_{\text{Aurinko}} = 0 \text{ eli}$$

$$\gamma \frac{Mm}{x^2} - \gamma \frac{M_A m}{(r-x)^2} = 0.$$

$$\text{Yhtälö saadaan muotoon } \gamma \frac{Mm}{x^2} = \gamma \frac{M_A m}{(r-x)^2}.$$

Kun yhtälö kerrotaan ristiin ja jaetaan puolittain termillä γm , saadaan

$$M(r^2 - 2rx + x^2) = M_A x^2.$$

Yhtälö sievenee toisen asteen yhtälöksi

$$(M - M_A)x^2 - 2Mrx + Mr^2 = 0.$$

Käyttämällä ratkaisukaavaa saadaan

$$x = \frac{-(-2Mr) \pm \sqrt{(-2Mr)^2 - 4 \cdot (M - M_A) \cdot Mr^2}}{2(M - M_A)}.$$

Sijoitetaan ratkaisukaavaan Maan ja Auringon massat

$$M = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg ja}$$

$$M_A = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg sekä etäisyys}$$

$$r = 149,598 \cdot 10^9 \text{ m.}$$

Ratkaisuiksi saadaan

$$x_1 = -2,6 \cdot 10^8 \text{ m, ei käy}$$

$$x_2 = 2,6 \cdot 10^8 \text{ m.}$$

Auringon ja maan vetovoimat ovat yhtä suuret etäisyydellä $2,6 \cdot 10^8 \text{ m}$ Maan keskipisteestä.

3-13. Mittalaitteen massa Maan pinnalla on $m = \frac{G}{g} = \frac{1340 \text{ N}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 136,595 \text{ kg}.$

Lasketaan Kuun pinnalla mittalaitteeseen kohdistuvan painon suuruus:

$$F = \gamma \frac{mm_{\text{kuu}}}{r_{\text{kuu}}^2} = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{136,595 \text{ kg} \cdot 7,348 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(1738,2 \cdot 10^3 \text{ m})^2} = 221,722 \text{ N.}$$

Lasketaan etäisyys r Maan keskipisteestä.

Gravitaatiolaista $F = \gamma \frac{mM}{r^2}$ saadaan etäisyydeksi Maan keskipisteestä

$$r = \sqrt{\gamma \frac{mM}{F}} = \sqrt{6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{136,595 \text{ kg} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{221,722 \text{ N}}} \approx 15672,8 \text{ km.}$$

Koska Maan säde on 6378 km, on suhde $\frac{r}{R} = \frac{15672,8 \text{ km}}{6378 \text{ km}} \approx 2,46$.

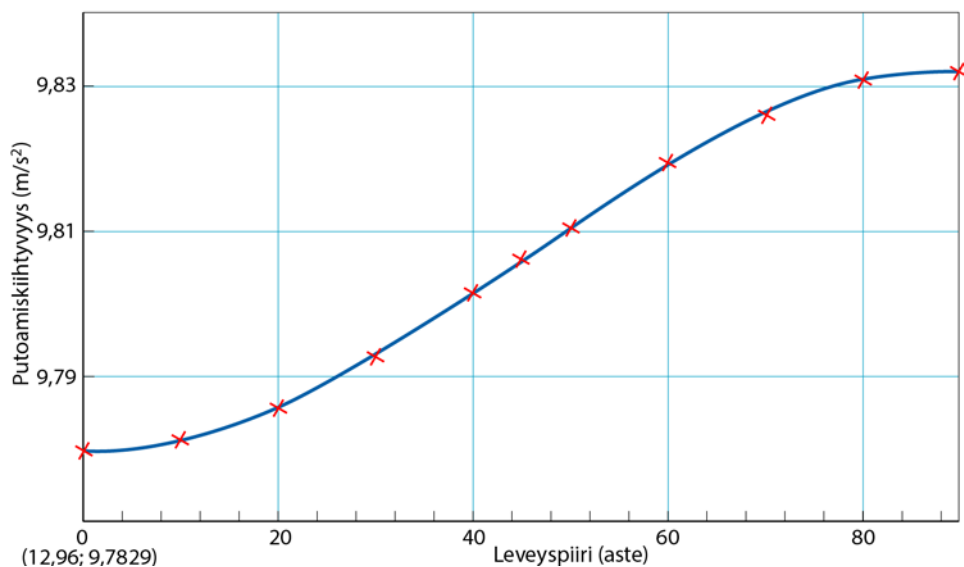
Mittalaitteen on oltava 2,46 Maan säteen etäisyydellä Maan keskipisteestä eli $r = 2,46R$.

TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 4-1.** a) Isaac Newton on eräs tieteen historian kuuluisimmista henkilöistä. Hän istuskeli tarun mukaan omenapuun alla.
- b) Runo kuvaa gravitaatiovuorovaikutusta ja siitä johtuvaa omenan kiihtyvää liikettä.
- c) Omenan vetovoima, joka kohdistuu maapalloon, oli omenan painon suuruinen. Newtonin kolmannen lain mukaan omenan ja maapallon toisiinsa kohdistamat voimat ovat yhtä suuria, mutta vastakkaissuuntaisia.
- d) Omenapuu on melko matala, joten omenan nopeus on verraten pieni ja ilmanvastus on siksi vähäinen. Omenalla ja madolla on siten yhtä suuri putoamiskiihtyvyys, joten madonreiän seinän matoon kohdistama tukivoima on nolla. Omenan sisällä oleva mato ei voi havaita painovoimaa putoamisen aikana.
- 4-2.** Käsitys on väärä. Maan ja avaruusaluksen sekä siellä olevan astronautin välillä on gravitaatiovuorovaikutus, minkä johdosta astronautti ja avaruusalus ovat vapaassa putoamisliikkeessä Maata kohti. Täten astronautti ja avaruusalus putoavat Maata kohti samalla kiihtyvyydellä. Näin ollen astronautti ei putoa aluksen lattiaa kohti.

4-3. a) Oheiset arvot löytyvät taulukkokirjasta.

leveyspiiri (°)	0	10	20	30	40	45	50	60	70	80	90
g (m/s ²)	9,7804	9,7820	9,7864	9,7933	9,8017	9,80665	9,8107	9,8197	9,8261	9,8306	9,8322



Huomaa, taulukkokirjassa olevat putoamiskiihtyvyyden arvot poikkeavat hieman gravitaatiolain avulla lasketuista arvoista.

b) Bangkok sijaitsee 13. leveyspiirillä, kuvaajan mukaan putoamiskiihtyvyyden arvo Bangkokissa on noin 9,783 m/s².

4-4. Kun yhtälö $g_r = \gamma \frac{M}{r^2}$ lavennetaan termillä R^2 , saadaan

$$g_r = \gamma \frac{M}{r^2} = \gamma \frac{MR^2}{r^2 R^2} = \gamma \underbrace{\frac{M}{R^2}}_{=g} \cdot \frac{R^2}{r^2} = g \left(\frac{R}{r} \right)^2.$$

4-5 a) Tarkastellaan kappaletta, jonka massa on m . Gravitaatiokentän voimakkuus kappaleen kohdalla 6380 km:n etäisyydellä Maan keskipisteestä on

$$\frac{F}{m} = \frac{\gamma \frac{mM}{r^2}}{m} = \gamma \frac{M}{r^2} = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6380 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 9,80 \text{ m/s}^2.$$

Huomaa, että gravitaatiokentän voimakkuus etäisyydellä r on sama kuin putoamiskiihtyvyys etäisyydellä r .

b) Mount Kenyan huipulla 5199 m korkeudella gravitaatiokentän voimakkuus on

$$\begin{aligned} \frac{F}{m} &= \frac{\gamma \frac{mM}{r^2}}{m} = \gamma \frac{M}{r^2} \\ &= 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6\,380\,000 \text{ m} + 5199 \text{ m})^2} \approx 9,78 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

c) Gravitaatiokentän voimakkuus 15 000 km:n korkeudella Maan pinnasta on

$$\begin{aligned} \frac{F}{m} &= \frac{\gamma \frac{mM}{r^2}}{m} = \gamma \frac{M}{r^2} \\ &= 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6380 \cdot 10^3 \text{ m} + 15\,000 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 0,87 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

d) Gravitaatiokentän voimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön eli etäisyyden kasvaessa gravitaatiokentän voimakkuus heikkenee.

4-6. a) Painon yhtälöstä $G = mg$ saadaan Liisan massaksi Helsingissä

$$m = \frac{G}{g} = \frac{539,8 \text{ N}}{9,825 \text{ m/s}^2} \approx 54,9415 \text{ kg}.$$

Liisaan kohdistuva paino Mexico Cityssä on

$$G = mg = 54,9415 \text{ kg} \cdot 9,766 \text{ m/s}^2 \approx 536,6 \text{ N}.$$

b) Massa ei riipu sijainnista maapallolla. Josen massa Helsingissä on sama kuin Mexico Cityssä eli 53 kg.

4-7. Gravitaatiokentän voimakkuus tietyssä kentän pisteessä määritellään kentässä olevaan kappaleeseen (massa m) kohdistuvan gravitaatiovoiman ja kappaleen massan osamääränä. Sen suuruus kertoo putoamis-

kiihtyvyyden suuruuden eli $g = \gamma \frac{m}{r^2}$.

a) Putoamiskiihtyvyyden suuruus Kuussa on

$$g_{\text{Kuu}} = \gamma \frac{m_{\text{Kuu}}}{r_{\text{Kuu}}^2} = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{7,348 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(1738,2 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 1,623 \text{ m/s}^2,$$

putoamiskiihtyvyyden suunta on kohti Kuun keskipistettä.

b) Putoamiskiihtyvyyden suuruus Marsissa on

$$g_{\text{Mars}} = \gamma \frac{m_{\text{Mars}}}{r_{\text{Mars}}^2} = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{0,1075 \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(3397 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 3,714 \text{ m/s}^2,$$

putoamiskiihtyvyyden suunta on kohti Marsin keskipistettä.

- 4-8.** Oletetaan neutronitähti pallon muotoiseksi. Gravitaatiokentän voimakkuuden suuruus tähden pinnalla on

$$g_{\text{tähti}} = \gamma \frac{m_{\text{tähti}}}{r_{\text{tähti}}^2} = \gamma \frac{\rho_{\text{tähti}} V_{\text{tähti}}}{r_{\text{tähti}}^2} = \gamma \frac{\rho_{\text{tähti}} \frac{4}{3} \pi r_{\text{tähti}}^3}{r_{\text{tähti}}^2} = \frac{4}{3} \pi \gamma \rho_{\text{tähti}} r_{\text{tähti}}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 9,2 \cdot 10^{17} \text{kg/m}^3 \cdot 5,7 \cdot 10^3 \text{m} \approx 1,5 \cdot 10^{12} \text{m/s}^2.$$

- 4-9.** Etäisyydellä r maanpinnasta putoamiskiihtyvyys on $g_r = \gamma \frac{M}{r^2}$. Jotta putoamiskiihtyvyys olisi puolet putoamiskiihtyvyydestä Maan pinnalla, on oltava voimassa yhtälö $\gamma \frac{M}{r^2} = 0,5 g$, josta saadaan etäisyydeksi Maan keskipisteestä

$$r = \sqrt{\frac{\gamma M}{0,5 g}} = \sqrt{\frac{6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{kg}}{0,5 \cdot 9,81 \text{m/s}^2}} = 9016029 \text{ m} = 9016,029 \text{ km}.$$

Etäisyys maanpinnasta on $9\,016,029 \text{ km} - 6\,378 \text{ km} \approx 2\,600 \text{ km}$.

- 4-10.** Neutronitähden pinnan välittömässä läheisyydessä olevaan kappaleeseen, jonka massa on m_1 , kohdistuu gravitaatiovoima. Sen aiheuttama putoamiskiihtyvyys saadaan Newtonin II laista $\Sigma \vec{F} = m_1 \vec{a}$. Kun gravitaatiovoiman suuruus on $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ja gravitaatiovoima ja kiihtyvyys kumpikin suuntautuu kohti tähden keskipistettä, saadaan yhtälöstä $\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 a$ putoamiskiihtyvyydeksi tähden pinnalla

$$a = \frac{\gamma m_2}{r^2} = \frac{6,67428 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 2,8 \cdot 10^{30} \text{kg}}{(12\,000 \text{ m})^2} \approx 1,3 \cdot 10^{12} \text{m/s}^2.$$

4-11. a) Väite on totta. Kappaleen massa ei muutu.

b) Väite on totta. Kymmenen kilometrin korkeudella maanpinnasta kappaleeseen kohdistuvan painon suuruus on

$$G_r = mg \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 = 92 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \left(\frac{6378 \cdot 10^3 \text{ m}}{6378 \cdot 10^3 \text{ m} + 10 \cdot 10^3 \text{ m}} \right)^2 \approx 900 \text{ N}.$$

c) Väite on totta. Painon suuruus Maan pinnalla on $G = mg = 92 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 902,52 \text{ N}$. Sadan kilometrin korkeudella kappaleeseen kohdistuvan painon suuruus on

$$G_r = mg \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 = 92 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \left(\frac{6378 \cdot 10^3 \text{ m}}{6378 \cdot 10^3 \text{ m} + 100 \cdot 10^3 \text{ m}} \right)^2 \approx 874,871 \text{ N},$$

joten paino on pienentynyt

$$\frac{874,871 \text{ N}}{902,52 \text{ N}} \approx 0,969365 \text{ eli } 1 - 0,969365 = 0,030635 \approx 3 \, \%.$$

d) Väite ei ole totta. 10 000 kilometrin korkeudella kappaleeseen kohdistuvan painon suuruus on

$$G_r = mg \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 = 92 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \left(\frac{6378 \cdot 10^3 \text{ m}}{6378 \cdot 10^3 \text{ m} + 10000 \cdot 10^3 \text{ m}} \right)^2 \approx 137 \text{ N}.$$

Paino on yli 10 % painosta Maan pinnalla.

4-12. Yhtälöstä $g_r = \gamma \frac{M}{r^2}$ saadaan etäisyydeksi $r = \sqrt{\frac{\gamma M}{g_r}}$.

Yksikkötarkastelu:

$$[r] = \sqrt{\frac{[\gamma][M]}{[g]}} = \sqrt{\frac{1 \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1 \text{ kg}}{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{\frac{1 \frac{\text{kgm/s}^2 \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1 \text{ kg}}{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{\frac{1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}}{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{1 \text{ m}^2} = 1 \text{ m}.$$

TEHTÄVIEN RATKAISUT

5-1. Maan ratanopeus on $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 149,598 \cdot 10^9 \text{ m}}{365,2564 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} \approx 29,78 \text{ km/s}$.

Useissa taulukkokirjoissa Maan keskinopeus radallaan on 29,78 km/s.

5-2. a) Maan ratanopeus on $v = \frac{2\pi r}{T}$. Maan normaalikiihtyvyys Auringon keskipistettä kohti on

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 149,598 \cdot 10^9 \text{ m}}{(365,2564 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s})^2} \approx 5,93 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

b) Kuun normaalikiihtyvyys Maata kohti on

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 384\,400 \cdot 10^3 \text{ m}}{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s})^2} \approx 2,73 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

5-3. Gravitaatiovuorovaikutus pitää Maan Aurinkoa kiertävällä radallaan. Newtonin II lain mukaan on $\sum \vec{F} = M\vec{a}_n$, jossa gravitaatiovoiman suuruus

on $F = \gamma \frac{mM}{r^2}$ ja normaalikiihtyvyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$. Yhtälöstä

$$\gamma \frac{m \cdot M}{r^2} = M \frac{v^2}{r} \text{ Auringon massaksi saadaan}$$

$$m = \frac{v^2 r}{\gamma} = \frac{(29,78 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2 \cdot 149,598 \cdot 10^9 \text{ m}}{6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} \approx 1,988 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

- 5-4.** a) Gravitaatiovuorovaikutus pitää Kuun Maata kiertävällä radallaan. Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_n$, jossa gravitaatiovoiman suuruus

on $F = \gamma \frac{Mm}{r^2}$ ja normaalikiihtyvyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$. Yhtälöstä

$$\gamma \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \text{ kuun ratanopeudeksi saadaan}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{384\,400 \cdot 10^3 \text{ m}}} = 1018,46 \text{ m/s} \approx 1,018 \text{ km/s.}$$

- b) Kuun kiertoaika Maan ympäri on

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi \cdot 384\,400 \cdot 10^3 \text{ m}}{1018,46 \text{ m/s}} = 2371479 \text{ s} \approx 27,45 \text{ d.}$$

- 5-5.** a) Satelliitin kiertoaika planeetan ympäri on 7 h 39 min = 27 540 s. Satelliitin kiertoradan pituus on $2\pi r = 2\pi \cdot 9\,370\,000 \text{ m} = 58,8734 \cdot 10^6 \text{ m}$ ja ratanopeus

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{58,8734 \cdot 10^6 \text{ m}}{27\,540 \text{ s}} \approx 2137,74 \text{ m/s.}$$

Gravitaatiovuorovaikutus pitää satelliitin radallaan. Newtonin II lain

mukaan on $\Sigma \vec{F} = m_2 \vec{a}_n$, jossa gravitaatiovoiman suuruus on $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$

ja normaalikiihtyvyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$. Yhtälöstä $\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{m_2 v^2}{r}$

planeetan massaksi saadaan

$$m_1 = \frac{v^2 r}{\gamma} = \frac{(2137,74 \text{ m/s})^2 \cdot 9\,370\,000 \text{ m}}{6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2} \approx 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg.}$$

b) Planeetta on Mars.

- 5-6. a) Gravitaatiovuorovaikutus pitää satelliitin radallaan. Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_n$, jossa gravitaatiovoiman suuruus on $F = \gamma \frac{Mm}{r^2}$ ja normaalikiikhtyvyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$. Yhtälöstä $\gamma \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$ satelliitin ratanopeudeksi saadaan

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6378 \text{ km} + 610 \text{ km}}} = 7553,68 \text{ m/s} \approx 7,6 \text{ km/s}.$$

b) Kiertoaika Maan ympäri on

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi \cdot (6378 \cdot 10^3 \text{ m} + 610 \cdot 10^3 \text{ m})}{7553,68 \text{ m/s}} = 5812,65 \text{ s} \approx 97 \text{ min}.$$

c) Kulmanopeus on

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{5812,65 \text{ s}} \approx 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}.$$

5-7. a)

1) Gravitaatiovuorovaikutus pitää satelliitin radallaan.

2) Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_n$, jossa gravitaatiovoiman suuruus on $F = \gamma \frac{mM}{r^2}$ ja normaalikiikhtyvyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$.

Saadaan yhtälö $\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$.

Tästä saadaan satelliitin ratanopeuden suuruudeksi

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6,68428 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{23\,200\,000 \text{ m}}} \approx 4,15 \text{ km/s.}$$

b) Jotta satelliitti voisi olla geostationäärinen, sen tulee kiittää Maan keskipisteen ympäri samalla kulmanopeudella ja samaan suuntaan kuin Maa pyörii. Lisäksi satelliittiin kohdistuvan gravitaatiovoiman tulee pysyä koko ajan suuruudeltaan vakiona ja suunnan tulee olla aina kohti radan keskipistettä. Ainut mahdollinen sijainti, jossa satelliitti voi pysyä koko ajan tietyn paikkakunnan yläpuolella, on päiväntasaajan yläpuolella.

5-8. Satelliitin kiertoradan korkeus riippuu satelliitin käyttötarkoituksesta. Lähinnä Maata kiertäviä LEO-ratoja (Low Earth Orbit) käyttävät mm. vakoilusatelliitit ja avaruussukkulat. Ne kiertävät Maata 200–400 km:n korkeudella. Niiden kiertoaika maapallon ympäri on noin 1,5 tuntia.

Geostationääriset satelliitit kiertävät Maata noin 36 000 km:n korkeudella olevalla GEO-radalla. LEO- ja GEO-ratojen väliin jää ns. GTO-rata (Geostationary Transfer Orbit), joka on ellipsin muotoinen. Sen alin piste on LEO-radalla ja ylin GEO-radalla. GTO-rataa käyttävät satelliitit, jotka pystyvät oman moottorinsa avulla nousemaan matalalta kiertoradalta ympyrän muotoiselle GEO-radalle.

5-9. a) Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_n$, jossa gravitaatiovoiman

suuruus on $F = \gamma \frac{Mm}{r^2}$ ja normaalikihtiyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$.

Yhtälöstä $\gamma \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$ Hubblen ratanopeudeksi saadaan $v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}$.

Hubblen kiertoaika Maan ympäri on

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{\gamma M}{r}}} = \frac{2\pi \cdot (6378 \cdot 10^3 \text{ m} + 590 \cdot 10^3 \text{ m})}{\sqrt{\frac{6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6378 \cdot 10^3 \text{ m} + 590 \cdot 10^3 \text{ m}}}} = 5787,72 \text{ s}$$

$$\approx 1 \text{ h } 36 \text{ min.}$$

Koska satelliitti liikkuu vakionopeudella, sillä ei ole tangenttikiihtyvyyttä. Kiihtyvyys on normaalikiihtyvyyttä. Kiihtyvyys on

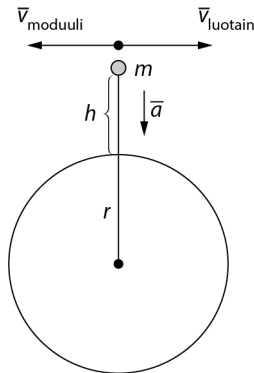
$$a = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\sqrt{\frac{\gamma M}{r}}\right)^2}{r} = \frac{\gamma M}{r^2}$$

$$= \frac{6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6378 \cdot 10^3 \text{ m} + 590 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 8,21 \text{ m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta on kohti radan keskipistettä.

b) Teleskooppi kannattaa sijoittaa avaruuteen, koska Maan pinnalla oltaessa ilmakehästä johtuva absorptio häiritsee teleskoopin käyttöä. Lisäksi ilmakehä aiheuttaa Maan pinnalle saapuvan valon suunnanmuutoksen, joka johtuu ilmakehän muuttuvasta taitekertoimesta. Avaruudessa kaukoputken käyttöä häiritseviä tekijöitä on vähemmän.

5-10.



a) Ennen laukaisua moduulin nopeus Marsin kiertoradalla on sama kuin luotaimen. Koska moduuli lähetetään taaksepäin luotaimen nopeuden suuruisella nopeudella, moduulin ratanopeus on nolla. Moduuliin vaikuttaa Marsin aiheuttama gravitaatiovoima. Moduuli alkaa pudota kohti Marsia, ja sen kiihtyvyys kasvaa, koska etäisyys Marsin keskipisteestä pienenee.

b) Taulukkokirjan mukaan Marsin massa on

$m_{\text{Mars}} = 0,1075 \cdot m_{\text{Maa}} = 0,1075 \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} = 6,42205 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ ja ekvaattorisäde 3397 km.

Newtonin II lain mukaan on $\sum \vec{F} = m\vec{a}_{\text{moduuli}}$, jossa gravitaatiovoiman

suuruus on $F = \gamma \frac{mm_{\text{Mars}}}{(r+h)^2}$. Koska sekä gravitaatiovoima että kiihtyvyys

kumpikin suuntautuu Marsin keskipisteeseen, saadaan yhtälö

$$\gamma \frac{mm_{\text{Mars}}}{(r+h)^2} = ma_{\text{moduuli}}.$$

Alkukiihtyvyys on

$$\begin{aligned}a_{\text{moduuli}} &= \frac{\gamma \frac{mm_{\text{Mars}}}{(r+h)^2}}{m} = \gamma \frac{m_{\text{Mars}}}{(r+h)^2} \\&= 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6,42205 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{(3397 \cdot 10^3 \text{ m} + 1500 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 1,8 \text{ m/s}^2.\end{aligned}$$

Moduulin alkukiihtyvyys on $1,8 \text{ m/s}^2$.

5-11. Marsin kulmanopeus Auringon suhteen on

$$\omega_{\text{Mars}} = \frac{\Delta \varphi_{\text{Mars}}}{\Delta t_{\text{Mars}}} = \frac{6,4 \text{ rad} - 3,1 \text{ rad}}{1,0 \text{ a}} = \frac{3,3 \text{ rad}}{1,0 \text{ a}} = 3,3 \text{ rad/a}.$$

5-12. a) Väärin. Jupiterin ratanopeus Auringon ympäri on pienempi kuin Maan ja Marsin ratanopeudet.

b) Oikein.

c) Oikein.

d) Oikein.

TEHTÄVIEN RATKAISUT

6-1. a) Lasketaan ensin avaruusaseman ratanopeus. Newtonin II lain mukaan on

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_n, \text{ jossa gravitaatiovoiman suuruus on } F = \gamma \frac{mM}{r^2} \text{ ja}$$

normaalkiihtyvyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$. Yhtälöstä $\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$ saadaan

ISS:n ratanopeudeksi

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{410 \cdot 10^3 \text{ m} + 6378 \cdot 10^3 \text{ m}}} = 7664,15 \text{ m/s}.$$

Liike-energia on

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 420000 \text{ kg} \cdot (7664,15 \text{ m/s})^2 \approx 1,2 \cdot 10^{13} \text{ J}.$$

b) Potentiaalienergia on

$$E_p = -\gamma \frac{mM}{r} = -6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{420000 \text{ kg} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{410 \cdot 10^3 \text{ m} + 6378 \cdot 10^3 \text{ m}} \\ \approx -2,5 \cdot 10^{13} \text{ J}.$$

c) ISS:n mekaaninen energia on negatiivinen.

- 6-2.** a) Johdetaan ensin satelliitin ratanopeuden yhtälö. Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_n$, jossa gravitaatiovoiman suuruus on $F = \gamma \frac{mM}{r^2}$ ja normaalikiihtyvyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$. Yhtälöstä $\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$ satelliitin ratanopeus on $v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}$.

Sijoitetaan ratanopeuden yhtälö liike-energian yhtälöön:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \left(\sqrt{\frac{\gamma M}{r}} \right)^2 = \frac{1}{2}m \cdot \frac{\gamma M}{r} = \frac{\gamma mM}{2r}.$$

b) Yksikkötarkastelu:

$$[E_k] = \frac{[\gamma][m][M]}{[r]} = \frac{1 \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1 \text{kg} \cdot 1 \text{kg}}{1 \text{m}} = \frac{1 \text{ Nm}^2}{1 \text{ m}} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}.$$

- 6-3.** a) Maan liike-energia on

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (29,78 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2 \approx 2,6 \cdot 10^{33} \text{ J}.$$

b) Maan gravitaation potentiaalienergia on

$$E_p = -\gamma \frac{mM}{r} = -6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{149,598 \cdot 10^9 \text{ m}} \\ \approx -5,3 \cdot 10^{33} \text{ J}.$$

c) Maan pyörimisen energia on

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m r^2 \cdot (2\pi n)^2 = \frac{1}{5} m r^2 \cdot \left(2\pi \cdot \frac{1}{T} \right)^2$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (6378 \cdot 10^3 \text{ m})^2 \cdot \left(2\pi \cdot \frac{1}{86164,1 \text{ s}} \right)^2 \approx 2,6 \cdot 10^{29} \text{ J}.$$

d) Maan pyörimisen energia on pieni verrattuna Maan liike-energiaan ja gravitaatiokentän potentiaalienergian itseisarvoon.

6-4. a) Raketin työntövoiman tekemä työ on

$$W = \Delta E_p = -\gamma \frac{mM}{r_2} - \left(-\gamma \frac{mM}{r_1} \right) = -\gamma \frac{mM}{r_2} + \gamma \frac{mM}{r_1} = -\gamma mM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$= -6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 3170 \text{ kg} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \left(\frac{1}{410 \text{ km} + 6378 \text{ km}} - \frac{1}{6378 \text{ km}} \right)$$

$$= 11,9698 \text{ GJ} \approx 12 \text{ GJ}.$$

b) Jos Maan gravitaatiokenttä oletetaan homogeeniseksi, työ on

$$W = mgh = 3170 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 410 \text{ km} \approx 12,7501 \text{ GJ}.$$

$$\text{Virhe on } \frac{12,7501 \text{ GJ} - 11,9698 \text{ GJ}}{11,9698 \text{ GJ}} \cdot 100 \% \approx 6,5 \%.$$

6-5.

Ilmanvastusta ei oteta huomioon, joten aluksen mekaaninen energia säilyy: $E_{k,a} + E_{p,a} = E_{k,l} + E_{p,l}$ eli

$$\frac{1}{2}mv_a^2 + \left(-\gamma \frac{mm_A}{r_a}\right) = \frac{1}{2}mv_l^2 + \left(-\gamma \frac{mm_A}{r_l}\right).$$

Gravitaatiokentän potentiaalienergian nollataso on valittu äärettömän kauas Maasta. Kun avaruusalus pystyy juuri ja juuri matkaamaan äärettömän kaukana olevalle potentiaalienergian nollatasolle, sen loppunopeus v_l on nolla. Aluksen liike-energia on siis nolla, samoin gravitaatiokentän potentiaalienergia eli mekaanisen energian säilymislaki saadaan muotoon

$$\frac{1}{2}mv_a^2 + \left(-\gamma \frac{mm_A}{r_a}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}mv_l^2}_{=0} + \underbrace{\left(-\gamma \frac{mm_A}{r_l}\right)}_{=0}.$$

Yhtälöstä $\frac{1}{2}mv_a^2 + \left(-\gamma \frac{mm_A}{r_a}\right) = 0$ saadaan ratkaistua aluksen alkunopeus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_a^2 + \left(-\gamma \frac{mm_A}{r_a}\right) &= 0 \\ \frac{1}{2}mv_a^2 &= \gamma \frac{mm_A}{r_a}, \end{aligned}$$

josta nopeudeksi saadaan

$$v_a = \sqrt{\frac{2\gamma m_A}{r_A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{149,598 \cdot 10^9 \text{ m}}} \approx 42,1 \text{ km/s}.$$

Tämä on alkunopeus, jolla kappale juuri ja juuri irtautuu Maan gravitaatiokentästä eli kolmas pakonopeus.

6-6. Kun ilmanvastusta ei oteta huomioon, luodin mekaaninen energia säilyy:

$$E_{k,a} + E_{p,a} = E_{k,l} + E_{p,l} \text{ eli } \frac{1}{2}mv_a^2 + \left(-\gamma \frac{mM}{r_a}\right) = \frac{1}{2}mv_l^2 + \left(-\gamma \frac{mM}{r_l}\right).$$

Korkeudella, jonne luoti on juuri ja juuri noussut, luodin nopeus ja liike-energia on nolla. Saadaan yhtälö

$$\frac{1}{2}mv_a^2 + \left(-\gamma \frac{mM}{R}\right) = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

Ratkaistaan edellisestä yhtälöstä etäisyys r Maan keskipiteestä. Huomaa, että massa m supistuu.

Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{\gamma M}{r} &= \frac{\gamma M}{R} - \frac{1}{2}v_a^2, \text{ josta} \\ r &= \frac{\gamma M}{\frac{\gamma M}{R} - \frac{1}{2}v_a^2} = \frac{6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{\frac{6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6378 \cdot 10^3 \text{ m}} - \frac{1}{2} \cdot (8,5 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2} \\ &= 15\,108\,736 \text{ m} \approx 15\,108,7 \text{ km}. \end{aligned}$$

Nousukorkeus maanpinnalta on $15\,108,7 \text{ km} - 6378 \text{ km} \approx 8\,700 \text{ km}$.

6-7. a) Kaksoistähdelle on voimassa yhtälö $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$ eli

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{m_B}{m_A} = \frac{2,2M_A}{0,82M_A} = 2,68293, \text{ josta saadaan}$$

$$r_A = 2,68293r_B.$$

Koska $r = r_A + r_B = 4,3 \cdot 10^{10} \text{ m}$, yhtälöstä $2,68293r_B + r_B = 4,3 \cdot 10^{10} \text{ m}$ saadaan $3,68293r_B = 4,3 \cdot 10^{10} \text{ m}$, josta

$$r_B = 1,16755 \cdot 10^{10} \text{ m} \approx 1,2 \cdot 10^{10} \text{ m ja}$$

$$r_A = 3,13245 \cdot 10^{10} \text{ m} \approx 3,1 \cdot 10^{10} \text{ m.}$$

b) Oletetaan, että molemmat tähdet ovat tasaisessa ympyräliikkeessä yhteisen massakeskipisteen ympäri. Molemmilla tähdillä on sama kiertoaika T .

Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = m_A \vec{a}_n$, jossa gravitaatiovoiman suuruus on $F = \gamma \frac{m_A m_B}{r^2}$ ja normaalikihtiyyden suuruus $a_n = \frac{v_A^2}{r_A}$.

$$\text{Saadaan yhtälö } \gamma \frac{m_A m_B}{r^2} = m_A \frac{v_A^2}{r_A}.$$

Ratanopeus voidaan olettaa vakioksi: $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r_A}{T}$. Sijoitetaan

ratanopeus $v = \frac{2\pi r_A}{T}$ yhtälöön $\gamma \frac{m_A m_B}{r^2} = m_A \frac{v_A^2}{r_A}$ ja ratkaistaan kiertoaika T :

$$\gamma \frac{m_A m_B}{r^2} = m_A \frac{\left(\frac{2\pi r_A}{T}\right)^2}{r_A} \text{ eli } \gamma \frac{m_A m_B}{r^2} = m_A \frac{4\pi^2 r_A^2}{r_A T^2}.$$

Kiertoajaksi saadaan

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^2 r_A}{\gamma m_B}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (4,3 \cdot 10^{10} \text{ m})^2 \cdot 3,13245 \cdot 10^{10} \text{ m}}{6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 2,2 \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}}$$
$$= 2,80 \cdot 10^6 \text{ s} \approx 32 \text{ d.}$$

6-8. Kaikki ovat oikein.

TESTAA, OSAATKO

1. a c 2. a b c 3. b c 4. a c 5. a b c 6. a 7. a 8. a 9. a c 10. b

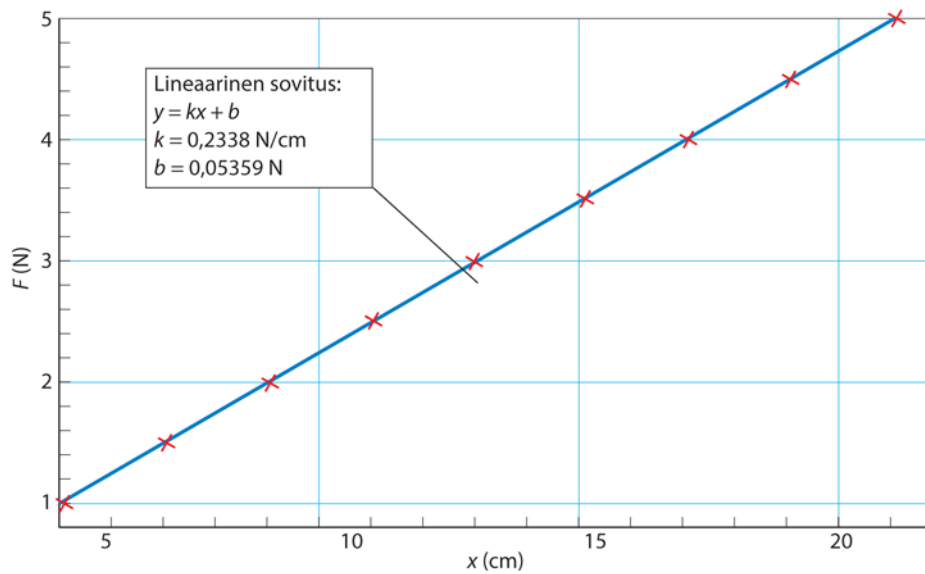
TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 7-1.** a) Jousivakio kuvaa jousen jäykkyyttä: mitä suurempi jousivakio on, sitä jäykempi jousi on.
- b) Auton jousi on jäykkä eli sen jousivakio on suuri. Auton jouseen voi kohdistua suuri voima, silti poikkeama tasapainoasemasta on pieni. Sohvan jousi on löysempi kuin auton jousi eli sohvan jousen jousivakio on pienempi kuin auton jousen jousivakio. Sohvan jouseen kohdistuva pieni voima aiheuttaa riittävän suuren poikkeaman, jotta sohva tuntuu istuttaessa sopivan pehmeältä.
- c) Kun henkilöauton takaluukku avataan, jouta tarvitaan hidastamaan takaluukun kannen nousua kohti takaikkunaa.
- d) Iskunvaimentimien liikkeessä syntynyt energia muuntuu iskunvaimentimen ja sen öljyn sisäenergiaksi: iskunvaimennin ja öljy lämpenevät.

7-2. Mittaustulokset taulukoituna:

venymä (cm)	kuormittava voima (N)
4,1	1,00
6,2	1,50
8,3	2,00
10,5	2,51
12,5	3,00
14,8	3,51
16,9	4,00
19,0	4,50
21,2	5,00

Mittaustulokset x, F -koordinaatistossa



Jousen jousivakio on $0,2338 \text{ N/cm} \approx 23 \text{ N/m}$.

- 7-3.** Kun voima $F_1 = 5,0 \text{ N}$ venyttää joustaa, jousivoima $\overline{F}$ on venyttävän voiman suuruinen mutta vastakkaissuuntainen. Sovitaan poikkeaman $\overline{x}$ suunta positiiviseksi, jolloin tasapainotilassa on voimassa yhtälö $-kx + F_1 = 0$, josta saadaan jousivakioksi

$$k = \frac{F_1}{x} = \frac{5,0 \text{ N}}{0,020 \text{ m}} = 250 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

- a)** Venymän aiheuttaa $15,0 \text{ N}$:n suuruinen voima $\overline{F}_2$ eli $-kx + F_2 = 0$. Jousen venymä on

$$x = \frac{F_2}{k} = \frac{15,0 \text{ N}}{250 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0,060 \text{ m} = 6,0 \text{ cm}.$$

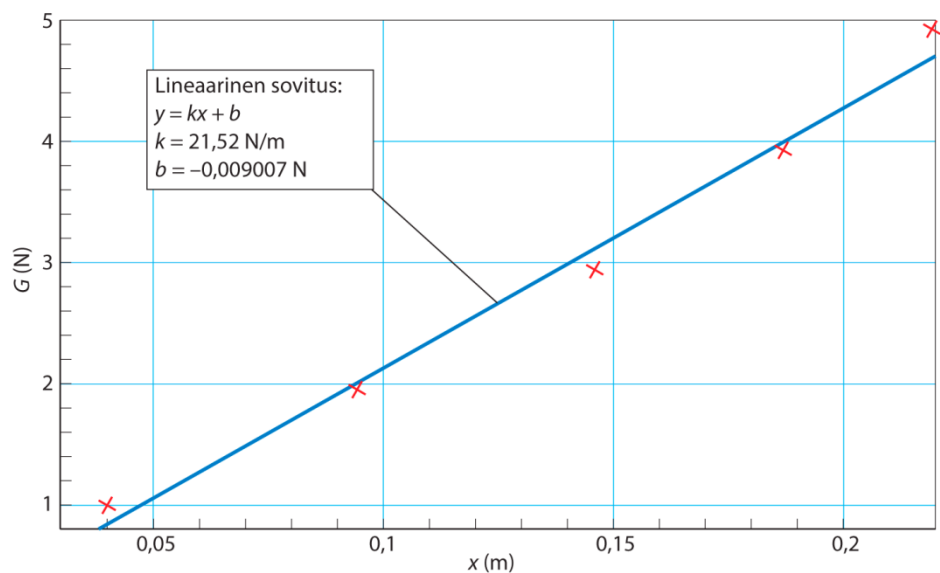
- b)** Venymän aiheuttaa $22,0 \text{ N}$:n voima $\overline{F}_3$ eli $-kx + F_3 = 0$. Jousen venymä on

$$x = \frac{F_3}{k} = \frac{22,0 \text{ N}}{250 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0,088 \text{ m} = 8,8 \text{ cm}.$$

- 7-4.** Kumilanka vaikuttaa punnuskuppiin voimalla, joka on likimain harmoninen eli $\overline{F} = -k\overline{x}$, jossa k on jousivakio ja $\overline{x}$ on poikkeama tasapainoasemasta. Langan pituus punnuskupin asettamisen jälkeen oli 175 mm . Lisätään taulukkoon jokaista massaa vastaava paino ja jokaista punnukseen kohdistuvaa painoa vastaavan venymän suuruus x , joka saadaan vähentämällä langan pituudesta 175 mm .

massa (g)	100	200	300	400	500
paino (N)	0,981	1,962	2,943	3,924	4,905
pituus (mm)	215	269	321	362	394
poikkeama x (mm)	40	94	146	187	219
poikkeama x (m)	0,040	0,094	0,146	0,187	0,219

Esitetään mittaustulokset x, G -koordinaatistossa.



Punnus asettuu kupissa paikalleen tasapainoasemaan. Tällöin vastakkaisiin suuntiin vaikuttavat kumilangan jousivoima F ja kumilankaa venyttävä paino G ovat yhtä suuria, jolloin myös $\Delta F = \Delta G$.

Kuminauhan jousivakio on mittaushjelman mukaan 21,5 N/m.

7-5. a) Systeemi on löysempi kuin alkuperäinen, koska kumpikin jousi venyy saman verran kuin ne venyisivät yksinäänkin. Systeemin jousivakio on puolet alkuperäisen jousen jousivakiosta.

b) Systeemi on jäykempi kuin alkuperäinen, koska kuorma jakautuu kahdelle jouselle. Systeemin jousivakio on kaksinkertainen verrattuna alkuperäisen jousen jousivakioon.

c) Jos voima $\bar{F}$ aiheuttaa venymän $\bar{x}$, on jousivakio $k = -\frac{F}{x}$.

Jos jousi katkaistaan keskeltä, on venymä $x/2$. Tällöin uuden jousen

$$\text{jousivakio on } k_1 = -\frac{F}{x/2} = \frac{-F}{\frac{x}{2}} = -F \cdot \frac{2}{x} = 2 \cdot \underbrace{\left(-\frac{F}{x}\right)}_{=k} = 2k.$$

7-6. Jouta puristava voima on $-1,7$ N, joten vaunuun kohdistuva jousivoima $\bar{F}$ on vastakkaisuuntainen, eli $F = 1,7$ N. Koska $F = -kx$, jousivakio on

$$k = -\frac{F}{x} = -\frac{1,7 \text{ N}}{-0,15 \text{ m}} \approx 11,3333 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Newtonin II lain mukaan vaunun kiihtyvyyden suuruus on $\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}$, jossa

$\bar{F}$ on vaunuun kohdistuva jousivoima eli $\bar{F} = -k\bar{x}$, jossa k on jousivakio ja $\bar{x}$ poikkeama tasapainoasemasta.

$$\text{a) Kiihtyvyys on } a = \frac{F}{m} = \frac{-kx}{m} = \frac{-11,3333 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,00 \text{ m}}{0,76 \text{ kg}} = 0,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Kun vaunu lähtee liikkeelle ääriasennosta, kiihtyvyys on

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1,7 \text{ N}}{0,76 \text{ kg}} \approx 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c) Kun $x = 0,12 \text{ m}$, vaunu on ohittanut tasapainoasemansa ja kiihtyvyys

$$\text{on } a = \frac{F}{m} = \frac{-kx}{m} = \frac{-11,3333 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,12 \text{ m}}{0,76 \text{ kg}} \approx -1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ eli vaunu on}$$

hidastuvassa liikkeessä alkuperäiseen positiiviseen liikesuuntaan nähden

tai kiihtyvässä liikkeessä vastakkaiseen (negatiiviseen) suuntaan.

7-7. Tarkastelleen ensin jousisysteemin alinta joustia.

Alimpaan jouseen kiinnitettyyn punnukseen vaikuttavat paino $\bar{G}$ ja jousivoima $\bar{F}_2$. Tasapainotilanteessa Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \bar{F} = \bar{0}$ eli $\bar{F}_2 + \bar{G} = \bar{0}$.

Kun suunta alas valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$-F_2 + G = 0$ eli $-k_2 x_2 + mg = 0$. Alemman jousen jousivoima on suuruudeltaan yhtä suuri kuin punnukseen kohdistuva paino.

Yhtälöstä $k_2 x_2 = mg$ saadaan alemman jousen venymäksi

$$x_2 = \frac{mg}{k_2} = \frac{0,35 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{26 \text{ N/m}} \approx 0,132058 \text{ m} = 13,2058 \text{ cm}.$$

Newtonin III lain mukaisesti jouset vetävät toisiaan yhtä suurilla mutta vastakkaissuuntaisilla voimilla. Tasapainotilanteessa on voimassa ehto

$$F_1 = F_2 = G.$$

Ylemmän jousen jousivakio saadaan yhtälöstä $F_1 = G$ eli $k_1 x_1 = mg$, josta saadaan jousivakiolle arvo

$$k_1 = \frac{mg}{x_1} = \frac{0,35 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,026 \text{ m}} \approx 130 \text{ N/m}.$$

Jouset venyvät yhteensä

$$x = x_2 + x_1 = 13,2058 \text{ cm} + 2,6 \text{ cm} \approx 16 \text{ cm}.$$

TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 8-1.** a) Sydämen lyöntien jakson aika vaihtelee eri ihmisillä. Rauhallisesti istuttaessa se on noin 1 sekunti. Sydämen lyöntitaajuus voidaan mitata mittaamalla esimerkiksi lyönnit 60 sekunnin aikana. Lyöntejä voi olla esimerkiksi 72. Taajuus on $\frac{72}{60\text{s}} = 1,2 \text{ Hz}$.
- b) Säännöllisesti toistuvaa värähdysliikettä pitävät yllä esimerkiksi perinteisten kellojen jouset. Myös paristoilla toimivien rannekellojen ajanmittaus perustuu pienen kiteen hyvin säännölliseen värähtelyyn. Kuulemme, koska korvamme tärykalvo värähtelee ilman painevaihtelujen vaikutuksesta. Aineen atomit ovat jatkuvassa värähdysliikkeessä tasapainoasemansa suhteen. Tästä liikkeestä käytetään nimitystä lämpövärähtely. Kappale joutuu värähdysliikkeeseen, kun suuntaansa ja suuruuttaan muuttava voima vaikuttaa kappaleeseen. Värähdysliike jatkuu, jos systeemiin siirtyy energiaa. Ilman lisäenergiaa se vaimenee vähitellen ja pysähtyy. Esimerkiksi jousessa värähtelevän punnuksen liike hidastuu ja lopulta pysähtyy, koska vastusvoimien tekemä negatiivinen työ pienentää punnuksen liike-energiaa. Värähdysliike vaimenee värähtelijän ulkopuolelta vaikuttavien voimien vaikutuksesta. Tällaisia voimia ovat esimerkiksi ilmanvastus ja kitka.
- c) Värähteleviä kieliä on esimerkiksi kitarassa, pianossa, viulussa, kanteleessa ja harpussa. Värähteleviä kalvoja on erilaisissa rummuissa.
- d) Hitaita värähtelyjä ovat esimerkiksi suurien lintujen siipien liike, puiden huojunta tuulessa ja veden pitkien aaltojen liike meressä. Nopeita värähtelyjä ovat hyönteisten siiven iskut, puiden lehtien värähtelyt tuulessa ja veden lyhyiden aaltojen liike.

8-2. a) Hiekkaan juuttunutta autoa voidaan irrottaa hiekasta kaasuttamalla moottoria hetki ja antamalla auton pyörien nousta hiukan kuopan reunaa kohti. Annetaan sitten pyörien palautua kuoppaan. Kaasutetaan uudelleen ja pyritään saamaan auto edestakaiseen "heijaavaan" liikkeeseen (ylös-alas) eli käytetään hyväksi resonanssi-ilmiötä. Lopulta auto voi nousta hiekasta.

b) Auton moottori eristetään auton rungosta paksujen kumityynyjen avulla. Näin vaimennetaan moottorin värähtelyä, ja värähtelyn etenemistä esimerkiksi matkustamoon.

c) Keinua ja lasta voidaan pitää värähtelevänä systeeminä. Lapsella on keinussa eri hetkinä eri vaihe. Kun lapselle annetaan lisävauhtia peräkkäisten heilahdusten aikana samassa heilahduksen vaiheessa, hän saa energiaa parhaiten. Jos keinussa istuva lapsi on kulkemassa kohti potentiaalienergian minimikohtaa ja hänelle annetaan lisävauhtia nopeuden suuntaan jokaisella heilahduksella samassa kohdassa, kyse on resonanssi-ilmiöstä. Värähtelijä ottaa energiaa vastaan parhaiten, kun sitä annetaan sillä taajuudella, joka on kyseisen värähtelijän ominaisvärähtelytaajuus.

d) Tapahtuma on mahdollinen: ohutreunainen lasi voi särkyä korkean äänen vaikutuksesta. Äänen sisältämää energiaa siirtyy lasiin erityisen paljon silloin, kun äänen taajuus on sama kuin lasin ominaistaajuus. Lasi alkaa silloin värähdellä voimakkaasti ja se voi rikkoutua. Kyseessä on resonanssi-ilmiö.

8-3. Värähtelijä, jonka massa on 150 g.

Viiteen värähdykseen kulunut aika mitattiin neljä kertaa. Aikojen keskiarvo on $T_5 = 3,24$ s.

Värähdysaika on $T = 0,65$ s.

Värähtelijä, jonka massa on 200 g.

Viiteen värähdykseen kulunut aika mitattiin 4 kertaa. Aikojen keskiarvo on $T_5 = 3,80$ s.

Värähdysaika on $T = 0,76$ s.

Huomaa, että ajat mitattiin käsiajanotolla, jolloin mittaaajan reaktioaika vaikuttaa mittaustulokseen.

8-4. a) Kieli värähtelee 880 kertaa sekunnissa.

b) Pallon jaksonaika on $T = \frac{32,4 \text{ s}}{23} = 1,40870 \text{ s} \approx 1,4 \text{ s}$ ja

$$\text{taajuus } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,40870 \text{ s}} \approx 0,71 \text{ Hz}.$$

8-5. Pallon värähtelyn jaksonaika on $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,170 \text{ kg}}{16 \text{ N/m}}} \approx 0,65 \text{ s}.$

8-6. Kun punnus on kiinnitetty jouseen, tasapainotilanteessa punnukseen vaikuttaa jousivoima F , joka on kappaleen painon suuruinen mutta vastakkais suuntaan. Sovitaan suunta alas positiiviseksi, jolloin tasapainotilassa on voimassa yhtälö $kx = mg$, josta saadaan jousivakioksi

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{0,350 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,14 \text{ m}} = 24,525 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Värähtelijän jaksonaika on

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,350 \text{ kg}}{24,525 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} \approx 0,75 \text{ s}.$$

8-7. a) Punnuksen nopeuden kuvaaja on B.

b) Punnuksen kiihtyvyyden kuvaaja on A.

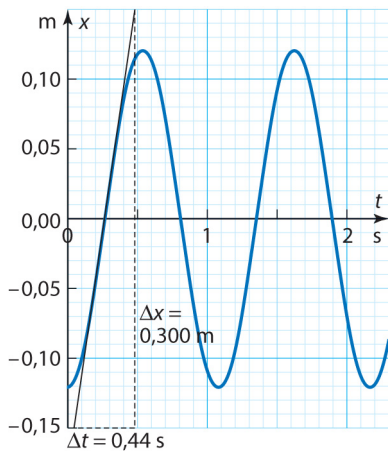
c) Jousivoiman kuvaaja on C.

8-8. a) Kuvaajasta saadaan jaksonajaksi $T = 1,1 \text{ s}$, joten taajuus on

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,1 \text{ s}} \approx 0,91 \text{ Hz}.$$

b) Värähtelijän nopeus on suurin tasapainoaseman kohdalla. Suurin nopeus saadaan t -akselin leikkauskohdassa fysikaalisena kulmakertoimenä:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0,300 \text{ m}}{0,44 \text{ s}} \approx 0,68 \text{ m/s}.$$



c) Värähtelyn jaksonajan ja jousen jousivakion välisestä yhtälöstä

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ saadaan jousivakio korottamalla yhtälö puolittain toiseen

potenssiin: $T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$, josta saadaan jousivakioksi

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0,500 \text{ kg}}{(1,1 \text{ s})^2} \approx 16 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

d) Nopeus on pienin (nolla) värähtelijän ääriasennoissa eli esimerkiksi hetkillä $t = 0,55 \text{ s}$ ja $t = 1,1 \text{ s}$.

8-9. Lasketaan ensin jousivakion arvo yhtälöstä $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Koska

$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$, jousivakioksi saadaan

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 m}{\left(\frac{1}{f}\right)^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0,2000 \text{ kg}}{\left(\frac{1}{0,90 \text{ Hz}}\right)^2} \approx 6,39550 \text{ N/m}.$$

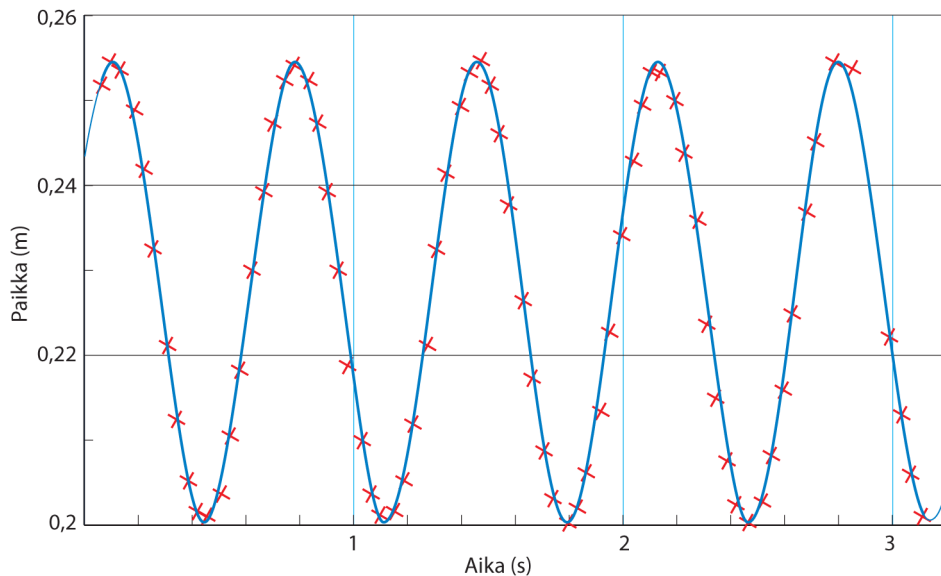
Jousi lyhenee sen verran kuin punnus on sitä venyttänyt. Kun punnus on kiinnitetty jouseen, tasapainotilanteessa punnukseen ylöspäin vaikuttava jousivoima on yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuva alaspäin suuntautuva paino G . Sovitaan suunta alas positiiviseksi, jolloin tasapainotilanteessa on voimassa yhtälö $kx = mg$, josta saadaan jousen venymän suuruudeksi

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{0,2000 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{6,39550 \frac{\text{N}}{\text{m}}} \approx 31 \text{ cm}.$$

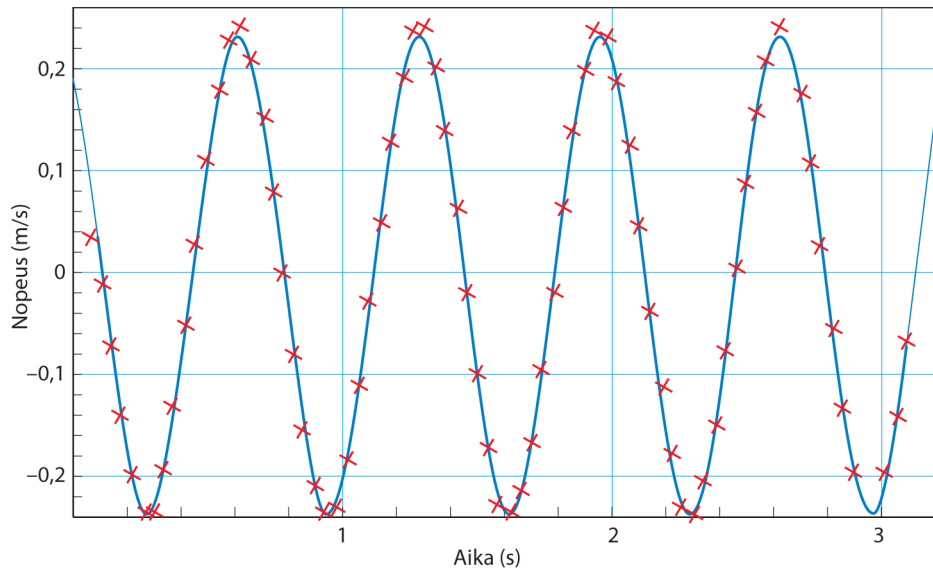
Kun punnus irrotetaan, jousi lyhenee 31 cm.

8-10. a) Värähdysliikkeen jaksonaika on $T = 1,251 \text{ s} - 0,580 \text{ s} \approx 0,67 \text{ s}$.

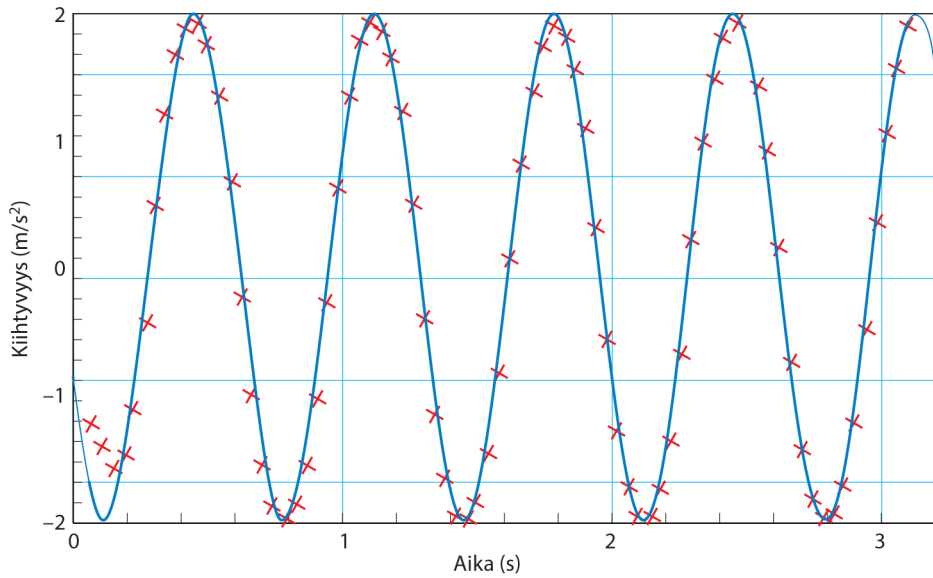
b) Suurin poikkeama on $0,2544 \text{ m} - 0,2011 \text{ m} = 0,0533 \text{ m} = 5,33 \text{ cm}$, joten värähtelijän amplitudi on $A \approx 2,7 \text{ cm}$.



c) Värähtelijän suurin vauhti on $0,24 \text{ m/s}$ ja vauhti hetkellä $0,74 \text{ s}$ on $0,080 \text{ m/s}$.



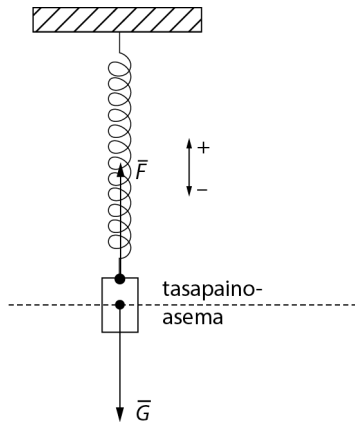
d) Värähtelijän suurin kiihtyvyys on $2,0 \text{ m/s}^2$ ja kiihtyvyys hetkellä $1,3 \text{ s}$ on $-0,37 \text{ m/s}^2$.



8-11. Harmonisen värähtelijän jaksonaika on $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, josta seuraa

jousivakiolle yhtälö $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$. Luetaan kuvaajasta kymmentä edestakaista värähdystä vastaava aika ja lasketaan sen perusteella jaksonaika: $T = \frac{8,4 \text{ s}}{10} = 0,84 \text{ s}$.

Newtonin II lain mukaan on $\sum \bar{F} = m\bar{a}$. Värähdyn keskipistessä punnuksen kiihtyvyys on hetkellisesti nolla.



Kun valitaan suunta ylös positiiviseksi, yhtälö $\bar{F} + \bar{G} = \bar{0}$ saadaan muotoon $F - mg = 0$. Koska voima vaihtelee symmetrisesti 0,50 N:n ympärillä, tasapainoasemaa vastaavan jousivoiman suuruus on 0,50 N. Punnuksen massa on

$$m = \frac{F}{g} = \frac{0,50 \text{ N}}{9,81 \text{ m/s}^2} \approx 0,0509684 \text{ kg}.$$

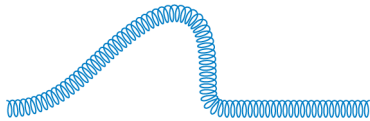
$$\text{Jousivakio on } k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0,0509684 \text{ kg}}{(0,84 \text{ s})^2} \approx 2,9 \text{ N/m}.$$

TEHTÄVIEN RATKAISUT

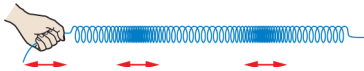
- 9-1.** a) Aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaan aallon etenemisnopeus ei riipu amplitudista, joten nopeus ei muutu, jos amplitudi kaksinkertaistuu.
- b) Jos taajuus kaksinkertaistuu eli $f_2 = 2f$, aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaan $v_2 = 2f\lambda = 2v$. Jos aaltolähteen taajuus kaksinkertaistuu, niin aallon nopeus kaksinkertaistuu.
- c) Jos aallonpituus puolittuu eli $\lambda_2 = \lambda/2$, aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaan $v_2 = f\lambda/2 = v/2$. Jos aallonpituus puolittuu, niin myös aallon nopeus puolittuu.
- 9-2.** Veden pinnalla etenevät vain pinta-aallot. Vesi ei liiku pohjoisesta etelään aaltojen mukana. Kuitenkin pitkäaikainen kova tuuli samasta suunnasta voi aiheuttaa veden pinnan korkeuden vaihtelua suuressa järvessä.
- 9-3.** a, b, c) Tuuli synnyttää veden pintaan aluksi pieniä ryppyjä pyörteilyjensä takia. Kun ilma virtaa pintaa pitkin, ryppyjen huippujen kohdalle tulee alipainetta ilman nopeamman (ilma joutuu tekemään pitemmän matkan) virtauksen takia, vrt. lentokoneen siipi. Alipaine nostaa vettä huipun kohdalla ylemmäs. Veteen kohdistuva paino toimii palauttavana voimana ja saa veden ylös-alas-liikkeeseen. Heilahtelujen energia on peräisin tuulesta, mutta aalto voi edetä kerran synnyttyään myös alueille, jossa ei ole tuulta lainkaan.
- 9-4.** a) Pulssilla tarkoitetaan yksittäistä aineessa etenevää häiriötä. Jos värähtelyt tapahtuvat aallon etenemissuunnassa, syntyvää aaltoliikettä nimitetään pitkittäiseksi aaltoliikkeeksi. Jos värähtelyt tapahtuvat

poikittain aallon etenemissuuntaa vastaan, liikettä nimitetään poikittaiseksi aaltoliikkeeksi.

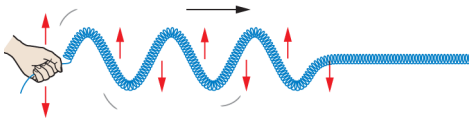
b) Pulssi:



Pitkittäinen aaltoliike:



Poikittainen aaltoliike:



9-5. Aallonpituus saadaan huippujen välimatkasta. Se on 80 cm.

Aaltoliikkeen perusyhtälö on $v = f\lambda$, joten taajuus on

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{25 \text{ cm/s}}{80 \text{ cm}} \approx 0,31 \text{ Hz}.$$

Amplitudi on kuvion mukaan 2,0 cm.

- 9-6.** Aaltoliikkeen perusyhtälö on $v = \lambda f$. Tihentymät ovat aallonpituuden päässä toisistaan. Aallonpituus on

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{4,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,1 \frac{1}{\text{s}}} = 2,0 \text{ m}.$$

Tihentymien väli on 2,0 m.

- 9-7. a)** Mittaa kännykän ajanottolaitteella esimerkiksi kymmeneen värähdykseen kulunut aika ja laske sen avulla yhden värähdyksen jaksonaika: värähtelyn taajuus on $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,66 \text{ s}} \approx 1,51515 \text{ Hz}$. Mittaa

aaltojen aallonpituus: $\lambda = 2,0 \text{ cm} = 0,020 \text{ m}$. Aallon nopeus on

$$v = f\lambda = 1,51515 \text{ Hz} \cdot 0,020 \text{ m} = 0,03030 \text{ m/s} \approx 3,0 \text{ cm/s}.$$

b) Värähtelijän B aallonpituus on 1,0 cm: se on lyhempi kuin värähtelijän A aallonpituus.

c) Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan on $v = f\lambda$. Koska aallon nopeuden määrää aine, jossa aalto etenee, kummankin värähtelijän A ja B synnyttämän aallon nopeus on sama. Koska nopeus v on vakio, värähdysliikkeen taajuuden kasvaessa täytyy aallon aallonpituuden lyhentyä.

9-8. a) Jaksonaika on $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{4,0 \frac{1}{s}} = 0,25 \text{ s}.$

b) Aaltoliikkeen perusyhtälö on $v = \lambda f = \lambda \frac{1}{T}$, joten aallonpituus on

$$\lambda = vT = 8,0 \text{ m/s} \cdot 0,25 \text{ s} = 2,0 \text{ m}.$$

c) Aikaa kuluu puolet jaksonajasta eli

$$\frac{T}{2} = \frac{0,25 \text{ s}}{2} \approx 0,13 \text{ s}.$$

d) Etenemiseen kulunut aika on

$$t = \frac{s}{v} = \frac{15,0 \text{ m}}{8,0 \text{ m/s}} \approx 1,9 \text{ s}.$$

9-9. a) Aaltoliikkeen jaksonaika on $T = 32 \text{ s}/10 = 3,2 \text{ s}.$

Värähtelyn taajuus on $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,2 \text{ s}} = 0,3125 \text{ Hz}.$

Aallon nopeus on $v = \frac{s}{t} = \frac{11 \text{ m}}{4 \text{ s}} = 2,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Aaltoliikkeen perusyhtälö on $v = \lambda f$, joten aallonpituus on

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2,75 \text{ m/s}}{0,3125 \text{ Hz}} = 8,8 \text{ m} \approx 9 \text{ m}.$$

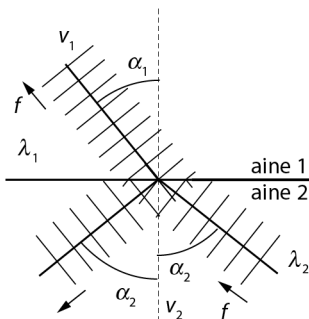
b) Koska $\frac{11 \text{ m}}{8,8 \text{ m}} = 1,25$, aluksen pituuden matkalle mahtuu yksi kokonainen aalto.

TESTAA, OSAATKO

1. b) c) 2. b) c) 3. b) c) 4. b) 5. a) 6. a) b) c) 7. a) 8. b) c) 9. a) c)

TEHTÄVIEN RATKAISUT

- 10-1.** a) Kun jousen pää on kiinnitetty seinään, aalto heijastuu seinästä siten, että aallon harjan muotoinen pulssi heijastuu seinästä aallonpohjana.
- b) Kun jousen pää on vapaasti liikkuva, heijastuneen pulssin vaihe säilyy samana ja aallonharja heijastuu aallonharjana. Heijastuskohdassa pulssin värähdyksen suunta säilyy samana.
- 10-2.** a) Kun aalto taittuu, taajuus ei muutu, koska aaltoliikkeen taajuus riippuu vain aallon lähteestä.
- b) Koska aalto taittuu normaaliin päin, aallon nopeus pienenee.
- c) Koska aalto taittuu normaaliin päin, aallon aallonpituus pienenee.
- 10-3.** a) Koska aalto taittuu poispäin aineiden rajapinnan normaalista, aalto etenee aineessa 1 hitaammin kuin aineessa 2. Aine 1 on näin ollen aalto-opillisesti tiheämpi kuin aine 2.
- b) Aalto taittuu aineeseen 1. Aallonpituus pienenee rajapinnan ylityksen jälkeen ja myös aallon nopeus pienenee. Aalto heijastuu osittain takaisin aineeseen 2. Heijastuskulma on tulokulman α_2 suuruinen. Heijastumisessa tapahtuu puolen aallonpituuden vaihesiirto.



10-4. a) Tahtumislaki on $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$, jossa α_2 on taitekulma:

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot \sin \alpha_1 = \frac{7100 \text{ m/s}}{14100 \text{ m/s}} \cdot \sin 58^\circ \approx 0,427031.$$

Taitekulma on 25° .

b) Tahtumislaki on $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$. Kokonaisheijastumisessa taitekulma on $\alpha_2 = 90^\circ$, joten tahtumislain mukaan $\sin \alpha_r = \frac{v_1}{v_2} = \frac{10\,100 \text{ m/s}}{11\,200 \text{ m/s}} \approx 0,901786$.

Kokonaisheijastumisen rajakulma on 64° .

10-5. a) Koska aallonpituus kasvaa, aallon taitekulma on suurempi kuin tulokulma.

b) Tahtumislaki voidaan esittää muodossa $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

$$\text{Yhtälöstä } \sin \alpha_2 = \frac{\lambda_2 \cdot \sin \alpha_1}{\lambda_1} = \frac{34 \text{ cm} \cdot \sin 6,7^\circ}{12,5 \text{ cm}} = 0,317344$$

saadaan taitekulman arvoksi $\alpha_2 \approx 19^\circ$.

10-6. a) Tahtumislain mukaan on $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n_{12}$, josta saadaan

$$\sin \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_1}{n_{12}} = \frac{\sin 15^\circ}{1,9} \approx 0,136221.$$

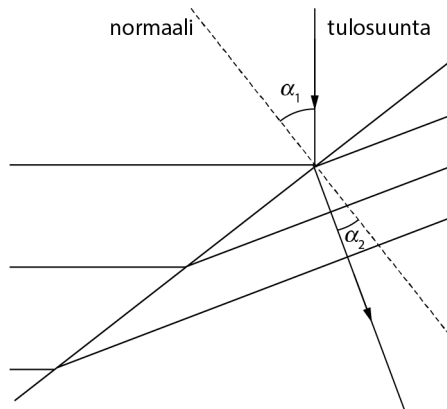
Taitekulma on $7,8^\circ$.

b) Nopeuksien suhde on sama kuin taitesuhde $\frac{v_1}{v_2} = n_{12}$, josta saadaan

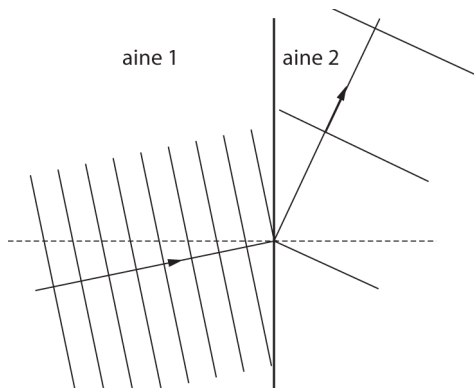
taittuneen aallon nopeus:

$$v_2 = \frac{v_1}{n_{12}} = \frac{25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1,9} \approx 13 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

- 10-7.** Aaltorintamat ovat kohtisuorassa aallon etenemissuuntaa vastaan. Tulokulma α_1 on tulevan aallon etenemissuunnan ja normaalin välinen kulma. Taitekulma α_2 on taittuneen aallon etenemissuunnan ja rajapinnan normaalin välinen kulma. Kulmat ovat $\alpha_1 \approx 37^\circ$ ja $\alpha_2 \approx 19^\circ$.



- 10-8.** Koska pinnan taitesuhde on $n_{12} = 0,25$, yhtälöstä $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_{12}$ saadaan aallonpituuksien suhteeksi $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0,25$. Taittuneen aallon aallonpituus on $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{0,25} = 4,0 \cdot \lambda_1$. Aallonpituus aineessa 2 on nelinkertainen verrattuna aallonpituuteen aineessa 1.



10-9. a) Aallon nopeus on aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan $v = f\lambda$. Koska

$f = 1/T$, nopeus on $v = \frac{\lambda}{T}$, josta saadaan jakson ajaksi

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{200 \text{ km}}{710 \text{ km/h}} \approx 0,281690 \text{ h} \approx 17 \text{ min}.$$

b) Yhtälön $v = \sqrt{gh}$ perusteella meren syvyys on

$$h = \frac{v^2}{g} = \frac{\left(\frac{50 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}\right)^2}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 20 \text{ m}.$$

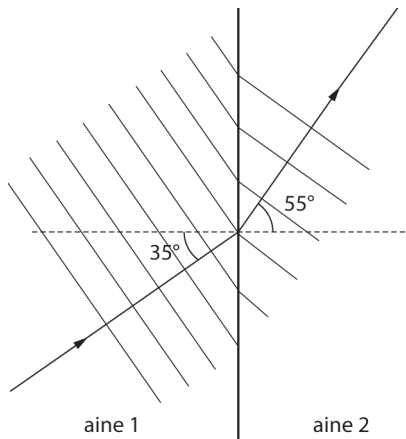
c) Koska aallonpituuden ja amplitudin tulo on vakio eli $\lambda A = \text{vakio}$, saadaan $\lambda_1 A_1 = \lambda_2 A_2$. Koska $\lambda = \frac{v}{f}$, amplitudien välille saadaan yhtälö

$$A_2 = \frac{\lambda_1 A_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} A_1 = \frac{\frac{v_1}{f}}{\frac{v_2}{f}} A_1 = \frac{v_1}{v_2} A_1.$$

Aallonpituutta $\lambda_1 = 200$ km vastaa nopeus $v_1 = 710$ km/h ja amplitudi $A_1 = 0,5$ m. Aallonpituutta $\lambda_2 = 200$ km vastaa nopeus $v_2 = 50$ km/h. Matalikolla olevan aallon amplitudi on

$$A_2 = \frac{v_1}{v_2} A_1 = \frac{710 \text{ km/h}}{50 \text{ km/h}} \cdot 0,5 \text{ m} \approx 7 \text{ m}.$$

10-10. Koska pinnan normaali on kohtisuorassa rajapintaa vastaan, piirrokseen merkitty kulma α on yhtä suuri kuin aaltorintaman tulokulma $\alpha_1 = 35^\circ$.



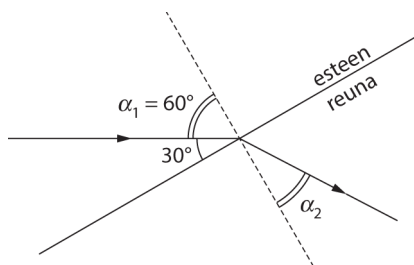
Taiteutislain mukaan on $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n_{12}$, joten taitekulman α_2 siniksi saadaan $\sin \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_1}{n_{12}} = \frac{\sin 35^\circ}{0,70} \approx 0,819395$.

Taitekulma on $\alpha_2 \approx 55^\circ$.

10-11. a) Aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaan vesiaaltojen nopeus ennen estettä on $v_1 = f\lambda_1 = 7,1 \text{ Hz} \cdot 0,032 \text{ m} \approx 0,23 \text{ m/s}$.

b) Vesiaaltojen taajuuden määrää aaltolähde, joten taajuus on sama ennen estettä ja esteen päällä eli $f = 7,1 \text{ Hz}$. Vesiaaltojen nopeus esteen päällä on $v_2 = f\lambda_2 = 7,1 \text{ Hz} \cdot 0,026 \text{ m} \approx 0,18 \text{ m/s}$.

c) Koska esteen reuna on 30° kulmassa aaltojen etenemissuuntaan nähden, aaltoliikkeen tulokulma $\alpha_1 = 60^\circ$.



Aaltoliikkeen taittumislaki $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$ saadaan muotoon

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot \sin \alpha_1 = \frac{f\lambda_2}{f\lambda_1} \cdot \sin \alpha_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \sin \alpha_1 = \frac{0,026 \text{ m}}{0,032 \text{ m}} \cdot \sin 60^\circ, \text{ josta}$$

saadaan taitekulman arvoksi on $\alpha_2 \approx 45^\circ$.

TEHTÄVIEN RATKAISUT

11-1. Kuvan 3 aalto esittää interferenssiaaltoa.

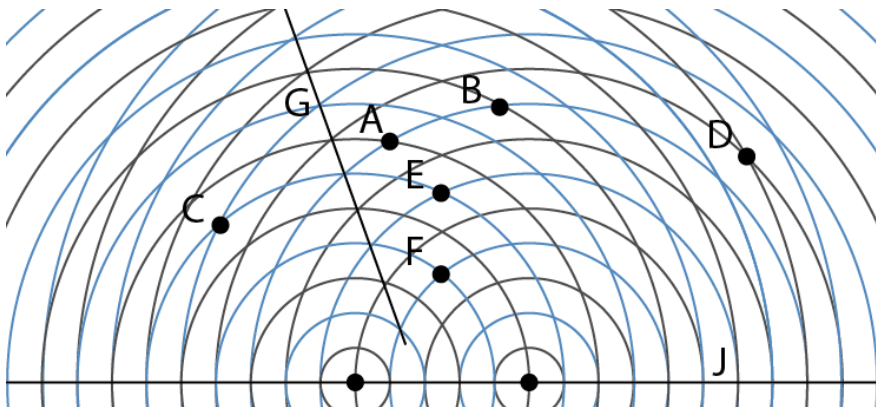
11-2. a, c, d, f

11-3. a) Kuvaan merkityt pisteet A, B, C, D, E ja F ovat esimerkkipisteitä, joissa annetut ehdot toteutuvat. Pisteissä A ja B matkaero on $\frac{1}{2}\lambda$, pisteissä C ja D 2λ ja pisteissä E ja F nolla.

b) Kuvassa siniset ympyrät kuvaavat aaltorintamien huippuja ja mustat pohjia. Aallot ovat samassa vaiheessa ja vahvistavat toisiaan kohdissa, joissa huiput kohtaavat toisensa ja samoin pohjat kohtaavat toisensa eli suora kulkee niiden pisteiden kautta, jossa samalla värillä piirretyt kaaret leikkaavat. Eräs tällainen suunta on suoran G suunta.

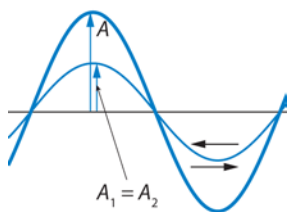
Aallot kumoavat toisensa, kun aaltojen huiput ja pohjat kohtaavat eli suora kulkee niiden pisteiden kautta, jossa eri värillä piirretyt kaaret leikkaavat. Suora J on esimerkkisuora, jonka suunnassa aallot kumoavat toisensa.

c) Aaltojen toisiaan vahvistavat ja heikentävät suunnat vaihtuvat keskenään.

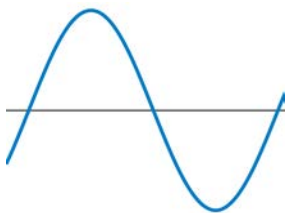


11-4. Mereltä tulevat aaltorintamat kohtaavat aallonmurtajan kapean raon. Tällöin rako toimii palloaallon lähteenä. Tällaiset aallot syövyttävät vähitellen rantaa puoliympyrän muotoiseksi. Koska puoliympyrän muotoinen rantapenger on melko korkea, voidaan päätellä, että meriveden korkeus vaihtelee vuoroveden takia.

11-5. a) Kohtaavat aallot ovat samassa vaiheessa. Ylempää kuvassa kohtaavat samanlaiset aallot ovat päällekkäin eivätkä erotu toisistaan. Kun aaltojen poikkeamia tasapainoasemasta lasketaan yhteen, saadaan interferenssiaalto, joka on kaksi kertaa niin korkea kuin kohtaavat aallot. Aallonpituus säilyy. Interferenssiaallon amplitudi on $A = A_1 + A_2 = 2A_1 = 2A_2$. Kuvaan on piirretty aaltojen amplitudit A , A_1 ja A_2 .

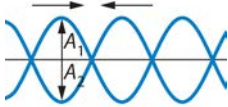


Interferenssiaalto:



b) Kaksi vastakkaisessa vaiheessa olevaa samanlaista aaltoa kohtaavat toisensa. Jokaisessa kohdassa aaltojen poikkeamat tasapainoasemasta ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset, joten poikkeamien summa on nolla. Myös aaltojen amplitudit A_1 ja A_2 ovat yhtä suuren mutta

vastakkaissuuntaiset. Jos suunta ylös on positiivinen, amplitudi $A = A_1 - A_2 = 0$. Kuvassa on esitetty kohtaavien aaltojen amplitudit.

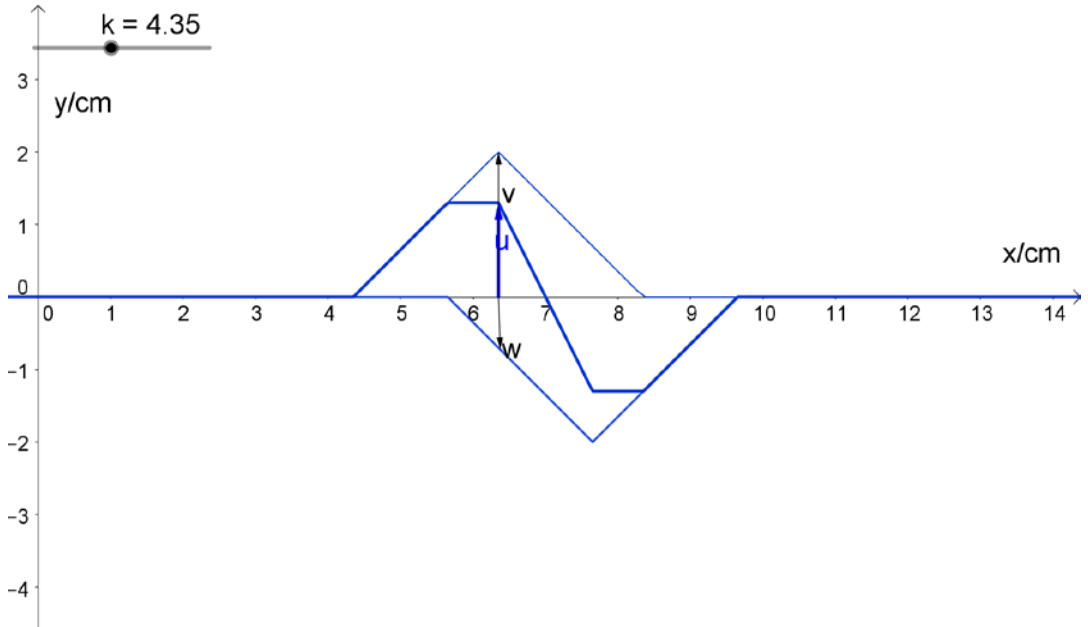


Interferenssiaalto:

11-6. a) Muuttuja k vaikuttaa pulssien paikkaan. Pulssit kohtaavat, jos $3 \leq k \leq 7$.

b) Pulseja esittävillä käyrillä asetetaan y -akselin suuntaiset nuolet (vektorit), joiden x -akselilla oleva alkupiste on kaikille nuolille sama piste, ja nuolien loppupisteet ovat kolmella eri käyrällä. Kohtaavien pulssien poikkeamien summa voidaan laskea nuolien päätepisteiden koordinaateista ja sitä verrataan interferenssiaallon poikkeamaan. Superpositioperiaate toteutuu eli kohtaavien pulssien poikkeamien summa on yhtä suuri kuin interferenssipulssin poikkeama.

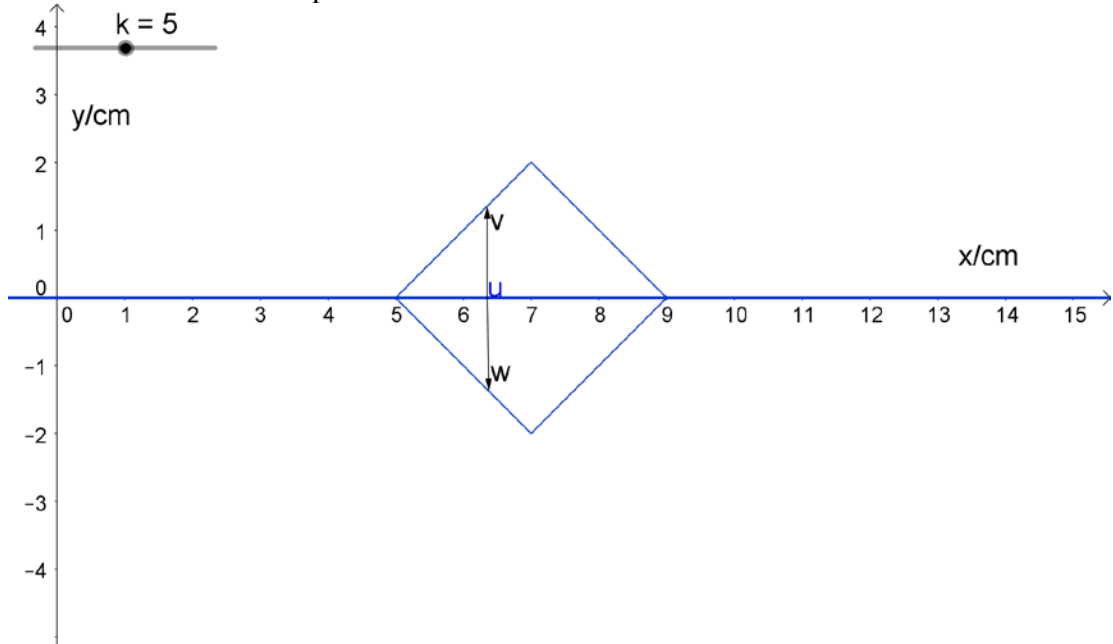
Kuvassa on esimerkkitapaus.



Kuvan esimerkkitapauksessa nuolien loppupisteiden y -koordinaatit ovat: $v = 2,0$ cm, $w = -0,7$ cm ja $u = 1,3$ cm. Koska $2,0$ cm $- 0,7$ cm $= 1,3$ cm superpositioperiaate toteutuu. Vastaava tutkimus voidaan tehdä missä kohdassa tahansa pulssien kohdatessa.

c) Kohtaavat pulssit ovat toistensa peilikuvia. Kun pulssit ovat kohdakkain, kohtaavien pulssien summa on jokaisessa pisteessä nolla. Tällöin interferenssipulssia kuvaavan funktion arvo on nolla kaikilla x :n arvoilla. Näin tapahtuu, kun $k = 5$. Toteat tämä selvimmin poistamalla kuvasta pulssit a ja b, jolloin kuvassa on vain pulssi s (vaakasuora).

Kuvassa on esimerkkitapaus.



Kuvan esimerkkitapauksessa nuolien loppupisteiden y-koordinaatit ovat: $v = 1,35$ cm, $w = -1,35$ cm ja $u = 0,0$ cm. Koska $1,35$ cm $- 1,35$ cm = $0,00$ cm superpositioperiaate toteutuu.

d) Pulssit etenevät yhtä suurilla nopeuksilla vastakkaisesti suuntiin $10,0$ cm kerrallaan. Tähän matkaan kuluneeksi ajaksi mitattiin $21,9$ s, joka saatiin viiden mittauksen keskiarvona. Huomaa, että aika voi vaihdella, kun simulaatiota tutkitaan erilaisissa laitteissa.

Pulssin nopeus mittaukseen käytetyssä laitteessa oli

$$v = \frac{s}{t} = \frac{10 \text{ cm}}{23,3 \text{ s}} = 0,43 \text{ cm/s.}$$

Huomaa myös, että mittaukset tehtiin käsiajanotolla, joten mittaajan reaktionopeus vaikuttaa mittaustulokseen ja vastaukseen.

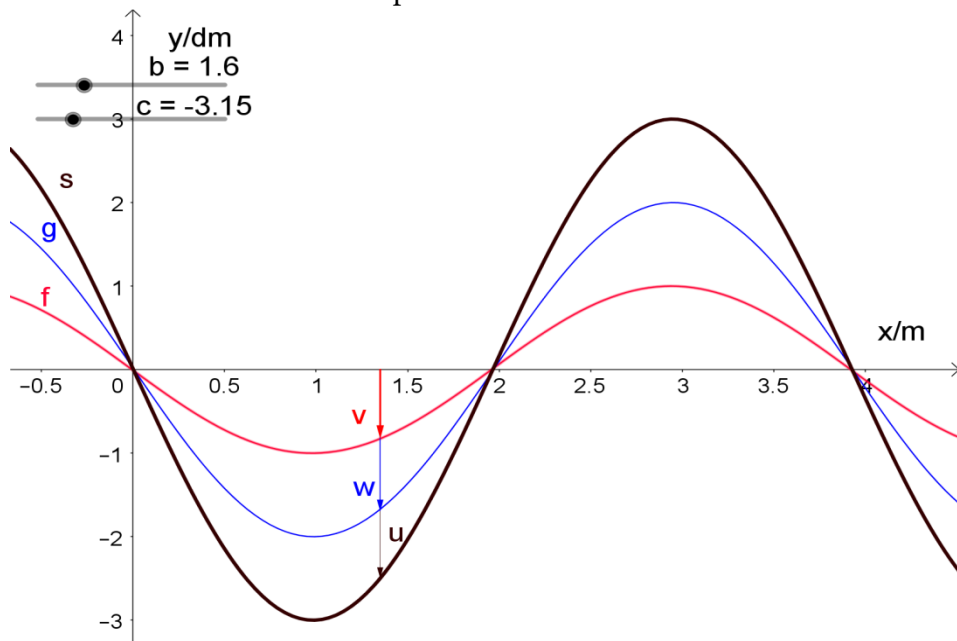
11-7. a) Jos muuttujaa b suurennetaan, aaltojen aallonpituus pienenee, ja jos b :tä pienennetään, aallonpituus kasvaa. Muuttuja c määrää interferoivien aaltojen paikan.

b) Käyrille f , g ja s asetetaan y -akselin suuntaiset nuolet (vektorit) v , w ja u , joiden vaaka-akselilla oleva alkupiste on sama ja loppupisteet ovat käyrillä f (nuoli v), g (nuoli w) ja s (nuoli u). Kohtaavien aaltojen poikkeamien summa tasapainoasemasta voidaan laskea nuolien päätepisteiden koordinaateista ja sitä verrataan interferenssiaallon poikkeamaan.

1) $b = 1,6$ ja $c = -3,15$

Interferoivien aaltojen poikkeamien summa on yhtä suuri kuin interferenssiaallon poikkeama.

Kuvassa on esimerkkitapaus.



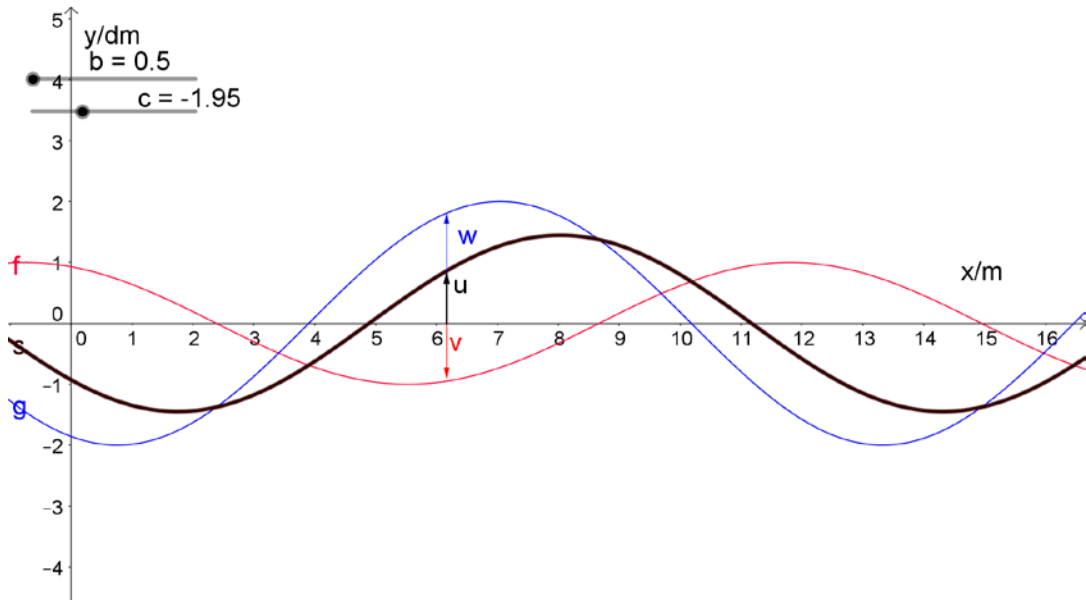
Kuvan esimerkkitapauksessa kärkipisteiden y -koordinaatit ovat:

$v = -0,8$ dm, $w = -1,7$ dm ja $u = -2,5$ dm. Koska

$-0,8$ dm $- 1,7$ dm $= -2,5$ dm superpositioperiaate toteutuu. Interferoivien aaltojen poikkeamien summa on yhtä suuri kuin interferenssiaallon poikkeama. Simulaatio-ohjelman avulla saadaan poikkeamille tarkempia arvoja kuin kuvan avulla.

2) $b = 0,5$ ja $c = -1,95$

Kuvassa on esimerkkitapaus.



Kuvan esimerkkitapauksessa kärkipisteiden y -koordinaatit ovat:

$v = -0,9$ dm, $w = 1,8$ dm ja $u = 0,9$ dm. Koska $1,8$ dm $- 0,9$ dm $= 0,9$ dm

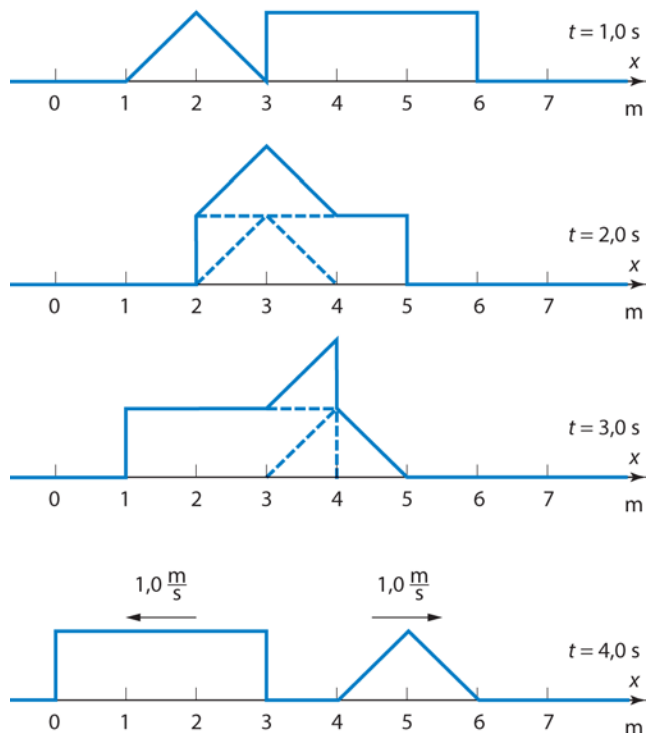
superpositioperiaate toteutuu. Interferoivien aaltojen poikkeamien summa on yhtä suuri kuin interferenssiaallon poikkeama. Simulaatio-ohjelman avulla saadaan poikkeamille tarkempia arvoja kuin kuvan avulla.

c) Kohdan b perusteella kohtaavien aaltojen poikkeamista tasapainoasemasta voidaan todeta:

* Jos ylös suuntautuva toisen aallon poikkeama tasapainoasemasta on suurempi kuin samassa kohdassa alas suuntautuva toisen aallon poikkeama, interferenssiaalto on sillä kohdalla vaaka-akselin yläpuolella. Tällöin u :n loppupisteen koordinaatti on positiivinen. Jos molemmat käyrät ovat tietyllä kohdalla vaaka-akselin yläpuolella, silloin interferenssiaalto on vaaka-akselin yläpuolella.

* Jos alas suuntautuva toisen aallon poikkeama tasapainoasemasta on suurempi kuin samassa kohdassa ylös suuntautuva toisen aallon poikkeama, interferenssiaalto on sillä kohdalla vaaka-akselin alapuolella. Tällöin u :n loppupisteen koordinaatti on negatiivinen. Jos molemmat käyrät ovat tietyllä kohdalla vaaka-akselin alapuolella, myös silloin interferenssiaalto on vaaka-akselin alapuolella.

11-8. Pulssien poikkeamat ovat samaan suuntaan tasapainoasemasta, joten pulssien kohdatessa poikkeamat lasketaan kullakin hetkellä yhteen. Huomaa, että kumpikin pulssi liikkuu yhden metrin sekunnissa ja pulssien etenemissuunnat ovat vastakkaiset toisiinsa nähden. Superpositioperiaatteen mukaisesti pulssien kohtaamisessa kumpikin pulssi säilyttää muotonsa. Kun pulssit ovat ohittaneet toisensa, kummankin pulssin muoto on alkuperäinen.



11-9. Vasemmanpuoleisessa kuvassa aukko aallonmurtaajassa toimii Huygensin periaatteen mukaisesti uusien ympyräaaltojen lähteenä.

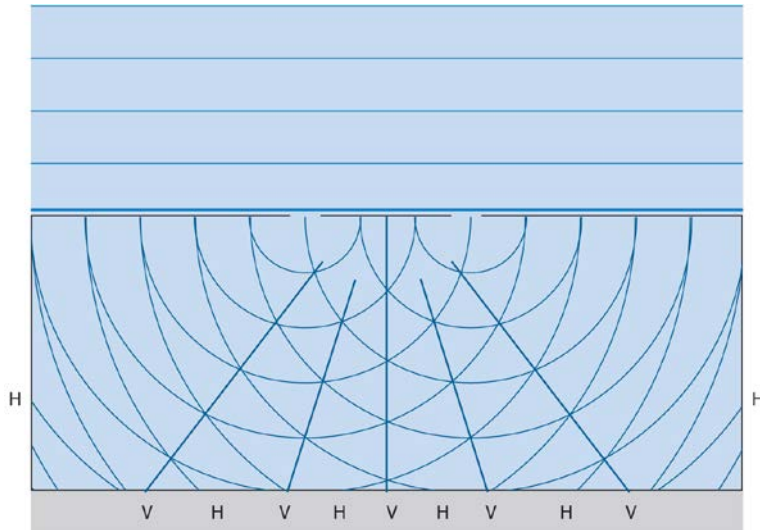
Oikeanpuoleisessa kuvassa aallonmurtaajan reunassa tapahtuu diffraktio eli aallot taipuvat aallonmurtaajan taakse. Ympyrän muotoiset aallot etenevät satama-altaaseen. Reunan oikealla puolella suorat aaltorintamat jatkavat etenemistään suoraan. Satama-altaassa ympyrän muotoiset aallot ovat heikompia kuin suorina rintamina etenevät aallot.

Kummassakin tapauksessa aaltojen muodostuminen on käytännössä on monimutkaisempi, koska satamaan saapuneet aallot myös heijastuvat kohdatessaan esteen.



- 11-10. a)** Kun tasoaaltorintamat kohtaavat aallonmurtaajassa olevat aukot, kumpikin aukko toimii Huygensin periaatteen mukaisesti ympyränmuotoisen aallon lähteenä. Näin aallot taipuvat ja etenevät myös aaltojen esteenä olevan aallonmurtaajan taakse. Kyseinen ilmiö on diffraktio. Kun diffraktoituneet aallot kohtaavat, syntyy aaltojen interferenssi. Niissä kohdissa joissa aaltojen huiput kohtaavat, aallot vahvistavat toisiaan. Niissä kohdissa joissa aaltojen huiput ja pohjat kohtaavat, aallot heikentävät toisiaan. Kohdan b kuvassa satama-altaaseen piirrettyt suorat V esittävät suuntia, joissa aallot vahvistavat toisiaan. Heijastumisia seinämistä ei ole otettu huomioon.

b) Satama-altaassa aallot etenevät puoliympyrän muotoisina aaltorintamina. Kuvassa aaltojen huippuja on kuvattu sinisillä puoliympyröillä.



c) Kun aaltorintamien huippujen leikkauskohtien kautta piirretään suorat, saadaan selville suunnat, joissa aallot vahvistavat toisiaan. Altaan reunan kohdissa V aallot ovat voimakkaimmat. Näiden kohtien väliin jäävät kohdat H, joissa aallot ovat heikoimmat. Aaltoilu ei ole yhtä voimakasta koko altaassa. Lähellä aallonmurtajaa altaan reunoilla aaltoilu on heikointa.

TEHTÄVIEN RATKAISUT

12-1. a) Väärin b) Oikein c) Väärin d) Oikein

12-2. a) Aaltoliikkeen perusyhtälö on $v = f\lambda$, joten syntyvän aallon aallonpituus on

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{6,4 \text{ m/s}}{4,0 \text{ Hz}} = 1,6 \text{ m}.$$

Kuvut ovat aallonpituuden puolikkaan välein, eli kupujen lukumäärä on

$$\frac{s}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{4,0 \text{ m}}{\frac{1,6 \text{ m}}{2}} = \frac{4,0 \text{ m}}{0,8 \text{ m}} = 5 (\text{kpl}).$$

Solmuja on 6 kpl eli yksi enemmän kuin kupuja.

b) Jos jousen pituus (4,0 m) on aallonpituuden puolikkaan kokonainen monikerta, seisova aalto voi syntyä. Aallonpituus on

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{6,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3,2 \text{ Hz}} = 2,0 \text{ m}.$$

Koska aallonpituus on 2,0 m, aallonpituuden puolikas on 1,0 m. Seisova aalto syntyy. Aallonpituuden puolikas sisältyy jousen pituuteen $\frac{4,0 \text{ m}}{1,0 \text{ m}} = 4$ kertaa. Silloin kupujen lukumäärä on 4.

12-3. a) Puolet aallonpituudesta on noin 55 cm, joten aallonpituus $\lambda \approx 110$ cm.

b) Värähtelevän langan pituus on yhtä suuri kuin aallonpituus eli 110 cm.

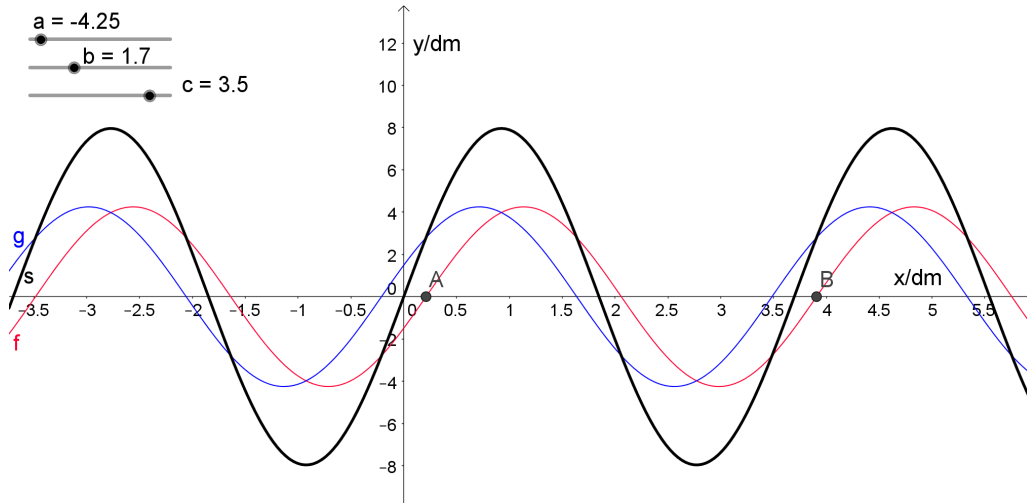
c) Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan aallon etenemisnopeus langassa

$$\text{on } v = \lambda f = 110 \text{ cm} \cdot 24 \frac{1}{\text{s}} = 2640 \text{ cm/s} \approx 26 \text{ m/s}.$$

12-4. a) Muuttujat a , b ja c vaikuttavat aaltojen ominaisuuksiin. Jos muuttujan a itseisarvoa suurennetaan, aaltojen amplitudit kasvavat. Jos a :n itseisarvoa pienennetään, aaltojen amplitudit pienenevät. Jos muuttujaa b suurennetaan, aaltojen aallonpituus pienenee. Jos b :tä pienennetään, aallonpituus kasvaa. Jos muuttujaa c suurennetaan tai pienennetään, interferoivat aallot liikkuvat vasemmalle ja oikealle vastakkaisiin suuntiin.

b) Seisova aalto ilmenee simulaatiossa siten, että kaksi aaltoa liikkuu vastakkaisiin suuntiin ja interferoi keskenään. Tällöin havaitaan, että aaltojen interferenssistä syntyy seisova aalto, jossa kuvut eivät liiku interferoivien aaltojen suunnassa, mutta värähtelyn voimakkuus muuttuu jaksollisesti kupujen kohdalla. Vastaavasti interferenssiaallon nollakohdat pysyvät paikallaan sekä pysty- että vaakasuunnissa. Näissä kohdissa on seisovan aallon solmut.

c)



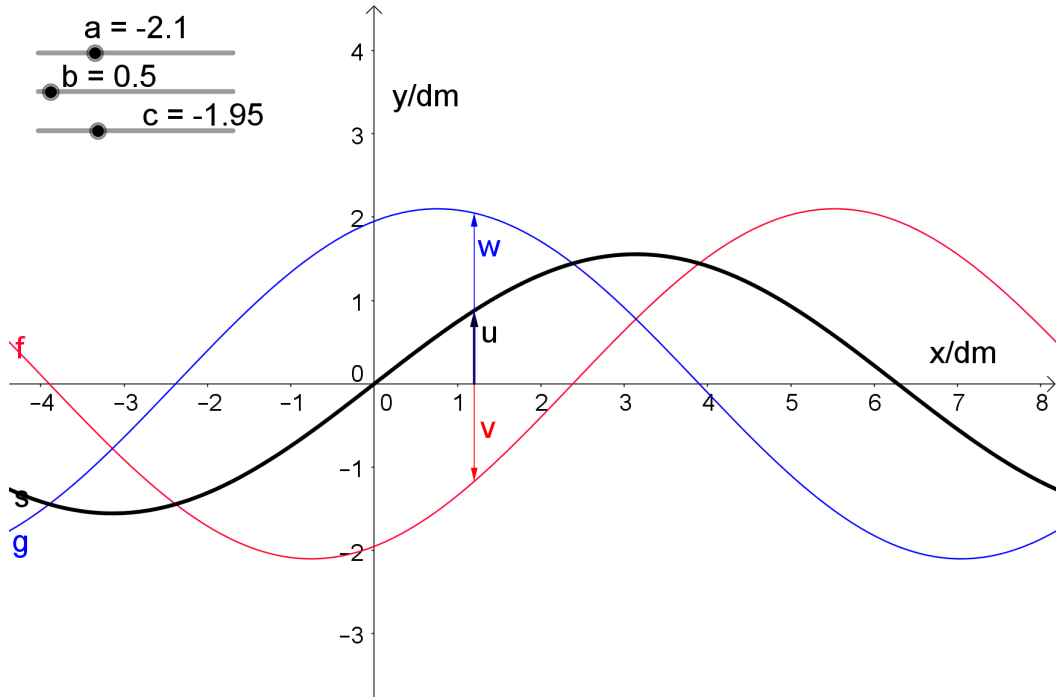
Asetetaan pisteet funktioiden nollakohtiin aallonpituuden välein (kuvassa pisteet A ja B). Nollakohtien erotuksina saadaan aallonpituudet.

Esimerkkipisteiden avulla saadaan

$\lambda \approx 3,9 \text{ dm} - 0,2 \text{ dm} = 3,7 \text{ dm}$. Kaikkien funktioiden aallonpituudet ovat likimain 3,7 dm. Simulaatio-ohjelman avulla aallonpituudelle voidaan saada tarkempi arvo kuin kuvaajan avulla.

d) Käyrille f , g ja s asetetaan y -akselin suuntaiset nuolet (vektorit), joiden x -akselilla oleva alkupiste on sama ja loppupisteet ovat käyrillä f , g ja s . Kohtaavien aaltojen poikkeamien summa voidaan laskea nuolien päätepisteiden koordinaateista ja sitä verrataan interferenssiaallon poikkeamaan. Superpositioperiaate toteutuu eli kohtaavien pulssien poikkeamien summa on yhtä suuri kuin interferenssipulssin poikkeama.

Esimerkkitapaus amplitudeista kohdassa $x = 1,2 \text{ dm}$.



Kuvan esimerkkitapauksessa nuolien loppupisteiden y -koordinaatit ovat: $v = -1,17 \text{ dm}$, $w = 2,05 \text{ dm}$ ja $u = 0,88 \text{ dm}$. Koska $2,05 \text{ dm} - 1,17 \text{ dm} = 0,88 \text{ dm}$ superpositioperiaate toteutuu. (Huomaa: Poikkeamien arvot saadaan simulaatio-ohjelmasta tarkemmin kuin kuvista.)

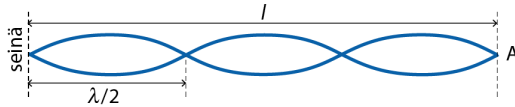
e) Seisovan aallon jakson aika mitattiin 5 kertaa, ja mittausten keskiarvoksi saatiin $7,5 \text{ s}$. (Huomaa, että aika voi saada erilaisia arvoja, kun simulaatiota tutkitaan eri laitteissa.)

Seisovan aallon taajuus mittaukseen käytetyssä laitteessa on

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{7,5 \text{ s}} = 0,13 \text{ Hz}.$$

Myös ihmisen reaktioajan takia mittaukseen tulee virhettä.

- 12-5. a)** Seinässä ja pisteessä A on solmukohta ja lisäksi seinän ja pisteen A välillä on kaksi solmua. Seinän ja pisteen A välillä on kolme kupua ja siis kolme aallonpituuden puolikasta.



Letkun pituus on sama kuin puolitoista aallonpituutta eli

$$l = \frac{3}{2} \lambda, \text{ josta saadaan aallonpituudeksi}$$

$$\lambda = \frac{2}{3} l = \frac{2}{3} \cdot 5,7 \text{ m} \approx 3,8 \text{ m}.$$

- b)** Aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaan aallon etenemisnopeus on

$$v = f\lambda = \frac{24}{10 \text{ s}} \cdot 3,8 \text{ m} \approx 9,1 \text{ m/s}.$$

- 12-6. a)** Kukin kahden solmun väli on puolen aallonpituuden mittainen, joten langassa on 2,5 aallonpituutta.

- b)** 1,5 aallonpituutta on noin 0,70 m, joten aallonpituus on

$$\lambda = 0,70 \text{ m} / 1,5 = 0,466667 \text{ m} \approx 0,47 \text{ m}$$

- c)** Jos langassa on kaksi solmua, kyseessä on perusvärähtely, jos kolme solmua ensimmäinen ylävärähtely, jos neljä solmua toinen ylävärähtely jne. Langassa on 6 solmua, joten kyseessä on neljäs ylävärähtely.

d) Aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaan aallon nopeus on

$$v = f_4 \lambda_4 = 52 \text{ Hz} \cdot 0,466667 \text{ m} = 24,2667 \text{ m/s} \approx 24 \text{ m/s}.$$

e) Kun lanka värähtelee perustaajuudellaan, langassa on yksi kupu. Langan pituus $l = 2,5 \cdot \lambda_4 = 2,5 \cdot 0,466667 \text{ m} = 1,16667 \text{ m}$, joten perusvärähtelyn aallonpituus on $\lambda_0 = 2l = 2 \cdot 1,16667 \text{ m} = 2,33334 \text{ m}$.

Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ ratkaistaan värähtelyn perustaajuus:

$$f_0 = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{24,2667 \text{ m/s}}{2,33334 \text{ m}} = 10,4000 \text{ Hz} \approx 10 \text{ Hz}.$$

12-7. a) Ensimmäinen merkki vasemmalta on lähimpänä solmukohtaa.

b) Jousessa havaitaan kahden aallonpituuden mittainen värähtely. Tämä voidaan nähdä esimerkiksi tutkimalla muutamia pysäytyskuvia.

c) Mitataan 20:een edestakaiseen käden heilautukseen kuluva aika, joksi saadaan noin 6,7 s, joten värähdysaika on

$$T = 6,7 \text{ s} / 20 = 0,335 \text{ s}.$$

Värähtelyn taajuus on

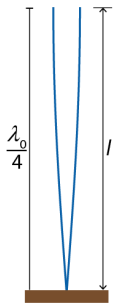
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,335 \text{ s}} = 2,98507 \text{ Hz} \approx 3,0 \text{ Hz}.$$

d) Koska jousen pituus $l = 1,5 \text{ m}$ ja jousessa on kahden aallonpituuden mittainen värähtely, aallonpituus on $\lambda = l/2 = 1,5 \text{ m}/2 = 0,75 \text{ m}$.

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan aallon etenemisnopeus on $v = f\lambda = 2,98507 \text{ Hz} \cdot 0,75 \text{ m} \approx 2,2 \text{ m/s}$. (Huomaa: Mittaajan reaktioaika vaikuttaa mittaustulokseen.)

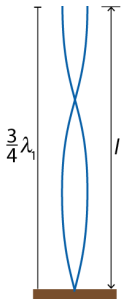
- 12-8. a)** Sauvaan syntyy seisova aalto. Sauvan puualustalle kiinnitetyssä alapäässä on solmu ja avoimessa yläpäässä kupu. Solmun ja kuvun välinen etäisyys on neljäsosa aallonpituudesta.

Perusvärähtely



Perustaajuutta lähinnä oleva ensimmäinen ylävärähtely syntyy, kun sauvan pituus on $l = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1}{4} = \frac{3}{4}\lambda_1$.

Ensimmäinen ylävärähtely



b) Perustaajuus f_0 saadaan, kun sauvan pituus on $l = \lambda_0/4$.

$$\text{Perusvärähtelyn taajuus on } f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{13,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 74,0741 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\text{Aallonpituus on } \lambda_0 = 4 l = 4 \cdot 0,125 \text{ m} = 0,50 \text{ m}.$$

Aallon nopeus on aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaan

$$v = f_0 \lambda_0 = 74,0741 \text{ Hz} \cdot 0,50 \text{ m} = 37,0371 \text{ m/s} \approx 37 \text{ m/s}.$$

c) Koska ensimmäinen ylävärähtely syntyy, kun sauvan pituus on

$$l = \frac{3}{4} \lambda_1, \text{ ensimmäisen ylävärähtelyn aallonpituus on}$$

$$\lambda_1 = \frac{4}{3} l = \frac{4}{3} \cdot 0,125 \text{ m} \approx 0,166667 \text{ m}.$$

$$\text{Taajuus on } f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{37,0371 \text{ m/s}}{0,166667 \text{ m}} \approx 220 \text{ Hz}.$$

12-9. a) Aaltoliikkeen perusyhtälö on $v = f\lambda$. Kieli on molemmista päistä kiinnitetty, joten kielen päissä on solmut ja keskellä kupu. Aallonpituus on kaksinkertainen värähtelevän kielen pituuteen verrattuna eli $\lambda = 2 l$.

$$\text{Aallon etenemisnopeus on } v = f\lambda = f \cdot 2l = 82,4 \frac{1}{\text{s}} \cdot 2 \cdot 0,65 \text{ m} \approx 110 \text{ m/s}.$$

b) Kielen perusvärähtelyssä on kaksi solmua ja yksi kupu, ensimmäisessä ylävärähtelyssä on kolme solmua ja kaksi kupua, joten toisessa on neljä solmua ja kolme kupua.



c) Kupuja on b-kohdan päättelyn mukaan aina yksi enemmän kuin ylävärähtelyn järjestysluku, joten neljännessä ylävärähtelyssä on viisi kupua. Siksi kielen pituuteen mahtuu 2,5 aallonpituutta, eli neljännen

ylävärähtelyn aallonpituus on $\lambda = \frac{65 \text{ cm}}{2,5} = 26 \text{ cm}$.



12-10. a) Kumilangan perustaajuus on Mersennen kaavan mukaan

$f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}}$, jossa L on kielen värähtelevän osan pituus, T voima, jolla kieltä jännitetään, ja m kielen massa pituusyksikköä kohden.

$$f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2 \cdot 1,12 \text{ m}} \cdot \sqrt{\frac{2,4 \text{ N}}{0,0038 \frac{\text{kg}}{\text{m}}}} \approx 11 \text{ Hz}.$$

b) Langan pituus on taajuuden yhtälön nimittäjässä, joten taajuus on kääntäen verrannollinen langan pituuteen. Jos langan pituus kasvaa, värähtelytaajuus pienenee, ja jos langan pituus pienenee, taajuus kasvaa. Lankaa jännittävä voima on osoittajassa neliöjuuren alla, joten taajuus on suoraan verrannollinen värähdysajan neliöjuureen. Jos lankaa jännittävä voima kasvaa, niin taajuus kasvaa, tai jos lankaa jännittävä voima pienenee, niin taajuus pienenee.

Langan massa pituusyksikköä kohti (m) on neliöjuuren alla nimittäjässä, joten taajuus on kääntäen verrannollinen $\sqrt{m}$:ään. Jos langan massa pituusyksikköä kohti kasvaa, niin taajuus pienenee, tai jos langan massa pituusyksikköä kohti pienenee, niin taajuus kasvaa.

12-11. a) Koska kiinnityskohdissa lanka ei pääse vapaasti värähtelemään, kiinnityskohtiin muodostuu solmut.

b) Perustaajuus $f = f_0$ vastaa yksinkertaisinta mahdollista seisovan aallon tilannetta. Silloin lankaan muodostuu yksi kupu ja molempiin päihin solmut. Langan pituus on aallonpituuden puolikas: $l = \lambda/2$, josta aallonpituudeksi saadaan $\lambda = 2l = 2 \cdot 0,50 \text{ m} = 1,0 \text{ m}$.

c) Värähtelytaajuus on perustaajuuteen verrattuna 4-kertainen eli $f = 4 \cdot f_0$. Lankaan muodostuu 4 aallonpituuden puolikasta ja siksi 4 kupua ja 5 solmua. Langan pituus on $l = 4 \cdot \frac{\lambda}{2} = 2\lambda$, josta aallonpituudeksi saadaan $\lambda = \frac{l}{2} = \frac{50 \text{ cm}}{2} = 25 \text{ cm}$.

TESTAA, OSAATKO S 117

1. c 2. a c 3. c 4. b 5. a b c 6. c 7. b d 8. a c 9. b 10. a b c

TEHTÄVIEN RATKAISUT

13-1. Ihmisen puheääni syntyy värähtelevissä äänihuulissa. Naisen äänihuulten limakalvo värähtelee normaalin puheen aikana 180–220 kertaa sekunnissa. Miehen äänihuulet ovat paksummat ja pidemmät, ja ne värähtelevät harvempaan, noin 120–130 kertaa sekunnissa. Siksi miesten puheääni on matalampi kuin naisten puheääni. Äänen muodostamiseen tarvittava energia on peräisin pallealihaksesta, joka liikuttaa keuhkoja niin, että ilma liikkuu kohti äänihuulia. Suu ja nenäontelo vahvistavat äänihuulten muodostamaa ääntä. Suulla ja huulilla ääni muokataan äänteiksi ja sanoiksi. Nielun ja suun onteloiden koko ja aukkojen suuruudet vahvistavat tiettyjä taajuuksia ja muodostavat näin meille kullekin luonteenomaisen puheään.

13-2. Koska 10 s:ssä voidaan erottaa noin kymmenen erillistä ääntä, kaksi peräkkäistä ääntä voidaan erottaa erillisinä, jos niiden aikaero on

$$t = \frac{1,0\text{ s}}{10} = 0,10\text{ s} . \text{ Jos äänen nopeus on } v = 343\text{ m/s, edestakainen matka}$$

käsistä seinään on $s = vt = 343\text{ m/s} \cdot 0,10\text{ s} = 34,3\text{ m}$. Seinän etäisyys

$$\text{taputtajasta on vähintään } \frac{34,3\text{ m}}{2} \approx 17\text{ m} .$$

13-3. a) Aallonpituudet ovat

$$\lambda_{\text{ilma}} = \frac{v}{f} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1000 \frac{1}{\text{s}}} = 0,34\text{ m}$$

ja

$$\lambda_{\text{hiilidioksidi}} = \frac{v}{f} = \frac{260 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1000 \frac{1}{\text{s}}} = 0,26\text{ m} .$$

b) Taitesuhde on $n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{260 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 1,3.$

Sama tulos saadaan aallonpituuksien suhteena.

c) Taittumislain $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$ saadaan

$$\begin{aligned} \sin \alpha_2 &= \frac{v_2}{v_1} \sin \alpha_1 \\ &= \frac{260 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot \sin 45^\circ = 0,540729. \end{aligned}$$

Taitteikulma on $\alpha_2 = 32,7333^\circ$. Suunnan muutos on $45^\circ - 32,7333^\circ \approx 12^\circ$

- 13-4.** Kun paukahduksia kuuluu kolme, ääni kulkee ensimmäisen ja kolmannen paukahduksen välissä kaksi kertaa edestakaisin rinteiden välillä. Saadaan yhtälö $4s = vt$, jossa s on rinteiden välimatka, v on äänen nopeus $v = 343 \text{ m/s}$ ja t on ensimmäisen ja kolmannen paukahduksen välinen aika $t = 9,3 \text{ s}$. Rinteiden välimatka on

$$s = \frac{vt}{4} = \frac{343 \text{ m/s} \cdot 9,3 \text{ s}}{4} \approx 800 \text{ m}.$$

- 13-5. a)** Äänisignaalin aikadiagrammista havaitaan, että ääni syntyy hetkellä $3,4 \text{ s}$ ja voimakas kaiku, jonka voi olettaa tulevan vastarannasta, alkaa kuulua hetkellä $4,0 \text{ s}$. Äänen edestakainen matka vastarannalle kestää siis $\Delta t = 4,0 \text{ s} - 3,4 \text{ s} = 0,6 \text{ s}$. Tästä saadaan äänen nopeudeksi

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 105 \text{ m}}{0,6 \text{ s}} \approx 350 \text{ m/s}.$$

b) Äänen nopeus kaasussa riippuu kaasun lämpötilasta yhtälön

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \text{ mukaisesti. Äänen nopeus on sitä suurempi, mitä korkeampi}$$

lämpötila on, joten ääni kulkee talvella hitaammin kuin kesällä eli äänen palaamiseen kuluu talvella pitempi aika kuin kesällä.

c) Äänellä kuluu edestakaiseen matkaan saareen ja takaisin aika

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 320 \text{ m}}{350 \text{ m/s}} = 1,82857 \text{ s.}$$

Kaiusta pitäisi näkyä äänisignaali diagrammissa noin hetken $3,4 \text{ s} + 1,8 \text{ s} = 5,2 \text{ s}$ kohdalla. Äänidiagrammissa on noin hetkellä $5,3 \text{ s}$ heikko signaali, joka voi olla peräisin saaresta kaikuna tulevasta äänestä.

13-6. a) Sukellusveneen potkuri lähettää koko ajan 45 Hz :n ääntä, joten äänen taajuus ei muutu. Aaltoliikkeen perusyhtälö on $v = f\lambda$. Koska äänen nopeus v pienenee ja taajuus f ei muutu rajapinnan ylittämisen jälkeen, ääniaallon aallonpituuden λ täytyy pienentyä.

b) Koska äänen nopeus pienenee rajapinnan ylityksen jälkeen, ääniaaltojen etenemissuunta kääntyy normaaliin päin. Siten kokonaisheijastuminen ei ole mahdollinen. Näin ääniaallolle ovat mahdollisia kaikki tulokulman α_1 arvot $0 \leq \alpha_1 < 90^\circ$, ja ääni läpäisee veden ja ilman rajapinnan.

13-7. Äänen kulkema matka vedessä on $s = vt = 1484 \text{ m/s} \cdot t$. Ilmassa ääneltä kuluu samaan matkaan $8,0 \text{ s}$ kauemmin eli $s = 343 \text{ m/s} \cdot (t + 8,0 \text{ s})$. Koska äänen kulkema matka on molemmissa tapauksissa sama, saadaan yhtälö

$$1484 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t = 343 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t + 8,0 \text{ s}).$$

Ratkaistaan yhtälöstä aika t :

$$1484 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 343 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t = 343 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 8,0 \text{ s eli}$$

$$1141 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t = 2744 \text{ m,}$$

$$\text{josta saadaan } t = \frac{2744 \text{ m}}{1141 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2,40491 \text{ s.}$$

Äänen kulkema matka on

$$s = vt = 1484 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2,40491 \text{ s} = 3568,88 \text{ m} \approx 3,6 \text{ km.}$$

13-8. Videon kysymykset:

Miksi vesi alkaa pärskyä?

Kun soivan ääniraudan laittaa veteen, sen varsien värähtelyt saavat veden värähtelemään niin voimakkaasti, että syntyy pärskeistä.

Miksi ääni muuttuu matalammaksi?

Vesi vaikuttaa äänirautaan niin, että ääniraudan ominaistajuus muuttuu. Kun ääniraudan laittaa veteen, värähtelevä systeemi ei ole enää äänirauta vaan äänirauta ja vesi.

13-9. a) Äänilähde (juna) lähestyy havaitsijaa nopeudella $v_1 = 170 \text{ km/h}$, ja sen lähettämän äänen taajuus on $f_0 = 405 \text{ Hz}$. Dopplerin yhtälöstä saadaan havaituksi taajuudeksi

$$f = f_0 \frac{v}{v - v_1} = 405 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - \frac{170}{3,6} \text{ m/s}} \approx 470 \text{ Hz.}$$

b) Äänilähde loittonee, joten Dopplerin yhtälöstä saadaan havaituksi taajuuudeksi

$$f = f_0 \frac{v}{v + v_1} = 405 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + \frac{170}{3,6} \text{ m/s}} \approx 360 \text{ Hz}.$$

13-10. Äänennopeus riippuu lämpötilasta yhtälön $v_2 = v_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$ mukaisesti.

Taulukkokirjan mukaan äänennopeus lämpötilassa 273,15 K on

331,4 m/s. Äänennopeus lämpötilassa $(29 + 273,15) \text{ K} = 302,15 \text{ K}$ on

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} = 331,4 \text{ m/s} \cdot \sqrt{\frac{302,15 \text{ K}}{273,15 \text{ K}}} = 348,548 \text{ m/s}.$$

Koska ääneltä kuluu kesäpäivänä matkaan vastarannalle ja takaisin aika $\Delta t_1 = 4,70 \text{ s}$, on etäisyys vastarannalle

$$\Delta x = \frac{1}{2} v_1 \Delta t_1 = \frac{1}{2} \cdot 348,548 \text{ m/s} \cdot 4,70 \text{ s} = 819,088 \text{ m}.$$

Talvipäivänä matkaan kuluva aika on $\Delta t_2 = 5,30 \text{ s}$, joten äänennopeus silloin on

$$v_2 = \frac{2\Delta x}{\Delta t_2} = \frac{2 \cdot 819,088 \text{ m}}{5,30 \text{ s}} = 309,090 \text{ m/s}.$$

Yhtälöstä $v_2 = v_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$ seuraa $\frac{T_2}{T_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2}$, ja siitä saadaan lämpötilalle T_2 yhtälö

$$T_2 = T_1 \frac{v_2^2}{v_1^2} = 302,15 \text{ K} \cdot \frac{(309,090 \text{ m/s})^2}{(348,548 \text{ m/s})^2} = 237,611 \text{ K}.$$

Talvipäivän lämpötila on celsiusasteina $(237,611 - 273,15) \text{ K} \approx -36 \text{ }^\circ\text{C}$.

13-11. a) a. Kun äänilähde loittonee kuulijasta, ääni kuuluu Dopplerin yhtälön

$$f = f_0 \frac{v}{v + v_1} \text{ mukaan matalampana (pienempitaajuisena) kuin}$$

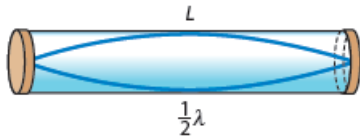
alkuperäinen ääni. Koska auton liike on tasaista, on lähestyvän auton äänellä koko ajan sama taajuus, samoin loittonevan auton äänellä eli taajuuden kuvaajat ovat vaakasuoria suoria.

b) e. Kun auto lähestyy kiihtyvällä nopeudella, äänen taajuus kasvaa (kuvaaja nouseva suora), ja kun auto loittonee kiihtyvällä nopeudella, taajuus pienenee (kuvaaja laskeva suora).

TEHTÄVIEN RATKAISUT

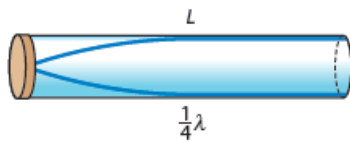
14-1. Mallinnetaan poikkihuilua molemmista päistä suljetulla putkella.

Perussävel syntyy, kun on voimassa yhtälö $L = \frac{1}{2}\lambda$, jossa L on putken pituus.



Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan poikkihuiluun syntyvän perussävelen taajuudeksi $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L}$.

Mallinnetaan klarinettia toisesta päästä avoimella putkella. Perussävel syntyy, kun on voimassa yhtälö $L = \frac{1}{4}\lambda$.

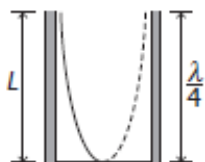


Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan klarinettiin syntyvän perussävelen taajuudeksi $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4L}$.

Huilun perussävelen taajuus on $\frac{v}{2L}$ ja klarinetin $\frac{v}{4L}$, joten huilun perussävelen korkeus (taajuus) on kaksinkertainen klarinetin perussävelen korkeuteen verrattuna.

14-2. a) Limsapulloa voidaan mallintaa toisesta päästä suljetulla putkella.

Perussävel syntyy, kun on voimassa ehto $L = \frac{1}{4}\lambda$, jossa L on putken pituus. Perussävelen aallonpituus on $\lambda = 4L = 4 \cdot 0,210 \text{ m} = 0,840 \text{ m}$.



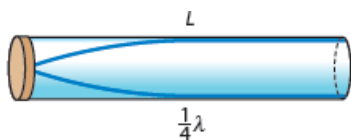
Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan taajuudeksi

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{0,840 \text{ m}} \approx 400 \text{ Hz}.$$

b) Kun pullon suuhun puhalttaa vinosti, pullon suun reuna synnyttää ilmavirtaan säännöllisesti toistuvia värähtelyjä (turbulensseja). Kun näiden taajuus vastaa pullossa olevan ilmapatsaan ominaistaajuutta, pulloon syntyy seisova aalto eli pullon ilmapatsas resonoi pullon suuhun syntyvien värähtelyjen kanssa.

c) Kun pullo on puolillaan vettä, ilmapatsaan korkeus L puolittuu eli seisovan aallon taajuus kaksinkertaistuu.

14-3. Bassoklarinetia voidaan mallintaa toisesta päästä suljetulla putkella.

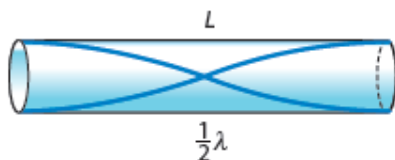


Matalin taajuus syntyy, kun $L = \frac{1}{4}\lambda$, jolloin äänen aallonpituus on

$\lambda = 4L$. Aaltoliikkeen perusyhtälö $v = f\lambda$ saadaan muotoon $v = f \cdot 4L$.

Bassoklarinetin pituudeksi saadaan $L = \frac{v}{4f} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \cdot 69,3 \frac{1}{\text{s}}} \approx 1,2 \text{ m}$.

14-4. a) Kun urkupilliä mallinnetaan molemmista päistä avoimella putkella, perussävel syntyy, kun putken pituus on $L = \frac{1}{2}\lambda$.

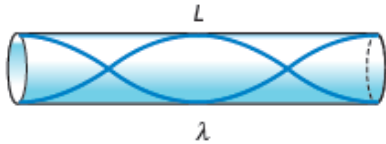


Tällöin perussävelen aallonpituus on $\lambda = 2L = 2 \cdot 1,24 \text{ m} = 2,48 \text{ m}$.

Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan perussävelen taajuudeksi

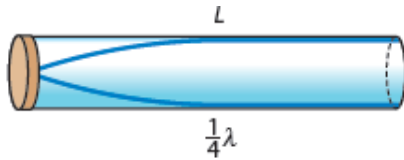
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,48 \text{ m}} \approx 138 \text{ Hz}.$$

Ensimmäinen yläsävel syntyy, kun putken pituus on $L = \lambda$. Tällöin aallonpituus on $\lambda = 1,24 \text{ m}$.



Ensimmäisen yläsäveln taajuus on $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343 \text{ m/s}}{1,24 \text{ m}} \approx 277 \text{ Hz}$.

b) Kun urkupilliä mallintaa toisesta päästä suljetulla putkella, perussäveln aallonpituus on $\lambda = 4L = 4 \cdot 1,24 \text{ m} = 4,96 \text{ m}$.

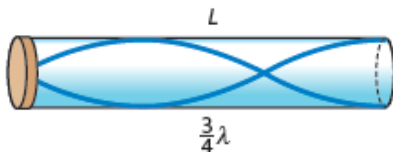


Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan perussäveln taajuudeksi

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4,96 \text{ m}} \approx 69,2 \text{ Hz}.$$

Ensimmäinen yläsävel syntyy, kun putken pituus on $L = \frac{3}{4}\lambda$ ja

$$\text{aallonpituus } \lambda = \frac{4L}{3} = \frac{4 \cdot 1,24 \text{ m}}{3} = 1,65333 \text{ m}.$$



Ensimmäisen yläsävelen taajuus on $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343 \text{ m/s}}{1,65333 \text{ m}} \approx 207 \text{ Hz}$.

- 14-5.** Huojuntataajuus on $f = |f_2 - f_1|$, joten saadaan yhtälö
 $2,00 \text{ Hz} = |440,0 \text{ Hz} - f_1|$ eli

$$2,00 \text{ Hz} = 440,0 \text{ Hz} - f_1 \text{ tai } 2,00 \text{ Hz} = -(440,0 \text{ Hz} - f_1).$$

Toisen ääniraudan taajuus on

$$f_1 = 440,0 \text{ Hz} - 2,00 \text{ Hz} = 438,0 \text{ Hz} \text{ tai}$$

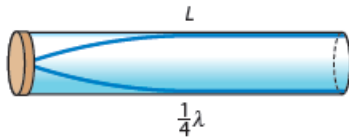
$$f_1 = 440,0 \text{ Hz} + 2,00 \text{ Hz} = 442,0 \text{ Hz}.$$

- 14-6.** Sinitarra hidastaa ääniraudan värähtelyjä eli alentaa taajuutta. Huojuntataajuus kasvaa, kun äänirautojen taajuusero kasvaa. Taajuusero kasvaa, jos pienempitaajuisten ääniraudan taajuutta pienennetään ja pienenee, jos suurempitaajuisten ääniraudan taajuutta pienennetään. Koska havainnon mukaan huojuntataajuus kasvoi, sinitarra kiinnitettiin pienempitaajuiseen äänirautaan.

- 14-7.** Paineen poikkeamien pienimmät arvot esiintyvät likimain hetkillä 1,5 ms ja 4,6 ms. Näin jaksonaika on $T = 4,6 \text{ ms} - 1,5 \text{ ms} = 3,1 \text{ ms}$.

$$\text{Huojuntataajuus on } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,1 \text{ ms}} \approx 0,32 \text{ kHz}.$$

- 14-8. a)** Perustaajuus on matalin taajuus, joten pillin pituus on $L = \frac{\lambda}{4}$ ja aallonpituus $\lambda = 4L = 4 \cdot 0,60 \text{ m} = 2,4 \text{ m}$.



Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan pillin ominaisvärähtelyjen

$$\text{perustaajuuksi } f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{2,4 \text{ m}} \approx 140 \text{ Hz}.$$

b) Äänen nopeus heliumissa on 965 m/s. Näin ollen perustaajuus on

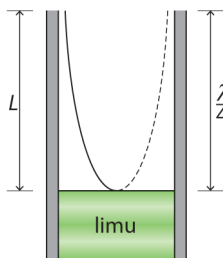
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{965 \text{ m/s}}{2,4 \text{ m}} \approx 400 \text{ Hz}.$$

14-9. Äänen nopeus kaasussa riippuu kaasun lämpötilasta yhtälön $v_1 = v_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$

mukaisesti. Äänennopeus ilmassa lämpötilassa 20 °C on taulukkokirjan mukaan 343 m/s, joten lämpötilassa 30,0 °C äänennopeus on

$$v_1 = v_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = 343 \text{ m/s} \cdot \sqrt{\frac{(30,0 + 273,15) \text{ K}}{(20,0 + 273,15) \text{ K}}} = 348,801 \text{ m/s}.$$

Pullossa olevan ilman korkeus on $\frac{21 \text{ cm}}{2} = 10,5 \text{ cm} = 0,105 \text{ m}.$



Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan pulloihin syntyvien perussävelten taajuuksiksi

$$f_{20} = \frac{v_{20}}{\lambda_{20}} = \frac{v_{20}}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{4 \cdot 0,105 \text{ m}} \approx 816,667 \text{ Hz ja}$$

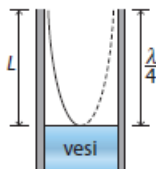
$$f_{30} = \frac{v_{30}}{\lambda_{30}} = \frac{v_{30}}{4L} = \frac{348,801 \text{ m/s}}{4 \cdot 0,105 \text{ m}} \approx 830,479 \text{ Hz}.$$

Huojuntataajuus on $f = |f_{20} - f_{30}| = 830,479 \text{ Hz} - 816,667 \text{ Hz} \approx 14 \text{ Hz}$.

14-10. a) Laulaessa syntyvät ääniaallot synnyttävät kaikukoppaan seisovan aallon, jos niiden taajuus on jokin kaikukopan ilmapatsaan ominaistaajuuksista eli seisovien aaltojen taajuuksista.

b) Akustisessa kitarassa kielet synnyttävät kaikukoppaan seisovan aallon, josta siirtyy kaikureiän kautta ääniaaltoja ympäristöön. Nämä äänet ovat paljon voimakkaampia, eli kuljettavat enemmän energiaa, kuin kielten synnyttämät ääniaallot. Sähkökitarassa ei ole kaikukoppaa, joten siitä siirtyy ympäristöön energiaa paljon hitaammin kuin akustisesta kitarasta ja sen takia sen kielet värähtelevät pitemmän aikaa kuin akustisen kitaran kielet.

14-11. Äänen voimakkuuden maksimi syntyy, kun ilmapatsas resonoi ääniraudan kanssa. Ilmapatsaaseen syntyvän seisovan aaltoliikkeen taajuus on sama kuin ääniraudan. Veden pinnassa on aallon solmu.

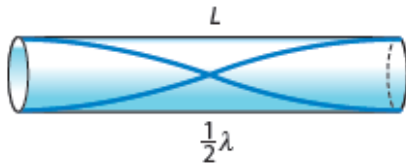


Ensimmäinen äänen voimakkuuden maksimi syntyy, kun ilmapatsaan pituus on aallonpituuden neljännes. Tällöin aallonpituus on

$$\lambda = 4L = 4 \cdot 0,195 \text{ m} = 0,78 \text{ m.} \text{ Äänen nopeus ilmassa on}$$

$$v = f\lambda = 440 \text{ 1/s} \cdot 0,78 \text{ m} \approx 340 \text{ m/s.}$$

14-12. Alikulkukäytävää voi mallintaa molemmista päistä avoimella putkella.



Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan käytävään syntyvän matalataajuisimman seisovan aallon taajuudeksi

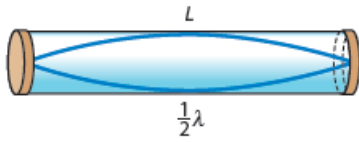
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L} = \frac{340 \text{ m/s}}{2 \cdot 8,0 \text{ m}} \approx 21 \text{ Hz.}$$

Tämän on käytävässä olevan ilmapatsaan matalin ominaistaajuus ja matalin taajuus, jonka kanssa ilmapatsas resonoi.

14-13. Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan aallonpituudeksi

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{260 \text{ m/s}}{440 \text{ 1/s}} \approx 0,591 \text{ m.}$$

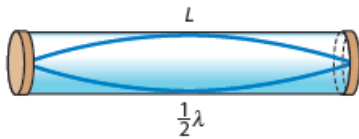
Molemmista päistä suljetun putken kumpaankin päähän muodostuu solmu.



Tällöin putken pituus (hiilidioksidipatsaan pituus) on sama kuin puolet aallonpituudesta.

Putken pituus $L = \lambda/2 \approx 30 \text{ cm}$.

14-14. Huonetta voi mallintaa molemmista päistä suljetulla putkella.



Seisovalla aallolla on solmu huoneen molemmissa päissä. Matalin taajuus vastaa tilannetta, jossa nämä ovat ainoat solmukohdat. Seisovan aallon aallonpituus on $\lambda = 2L = 2 \cdot 4,0 \text{ m} = 8,0 \text{ m}$. Matalin taajuus, jolla huone

resonoi, on $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{339 \text{ m/s}}{8,0 \text{ m}} \approx 42 \text{ Hz}$.

Liikennetärinän taajuus on 5–20 Hz, joten huone ei resonoi liikennetärinän kanssa.

14-15. a) Kuvassa a on 0,19 s:n aikana 3 huojuntajaksoa, joten taajuus on

$$f = \frac{3}{0,19 \text{ s}} \approx 16 \text{ Hz}.$$

Kuvassa b yhden jakson kesto on noin 0,13 s, joten taajuus on

$$f = \frac{1}{0,13 \text{ s}} \approx 7,7 \text{ Hz}.$$

b) Koska huojuntataajuus on $f = |f_1 - f_2|$, alkuperäisten aaltojen taajuudet ovat lähempänä toisiaan (taajuuksien ero 7,7 Hz) kuvan b tapauksessa.

TEHTÄVIEN RATKAISUT

15-1. a) Oikein

b) Väärin. Tinnitus on korvien soimista.

c) Oikein

d) Väärin. Kuulolle vaaralliseksi luokitellaan äänet, joiden intensiteettitaso ylittää 85 dB.

e) Väärin

f) Oikein.

15-2. Kuulokäyrää esittävän kuvaajan (s. 140) mukaan 60 dB:n intensiteettitasoa vastaa intensiteetti $I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$. Äänen intensiteetin yhtälöstä $I = \frac{P}{A}$ saadaan kuulokkeeseen tulevan äänen tehoksi

$$P = IA = 10^{-6} \text{ W/m}^2 \cdot \pi \cdot (0,0042 \text{ m})^2 \approx 5,5 \cdot 10^{-11} \text{ W}.$$

Äänen teho on $5,5 \cdot 10^{-11} \text{ W}$.

15-3. Äänen intensiteetti pienenee $\frac{1}{r^2}$ -lain mukaisesti. Kun etäisyys kaksinkertaistuu 15 m:stä 30 m:iin, intensiteetti pienenee neljäsosaan eli arvosta 36 nW/m^2 arvoon $9,0 \text{ nW/m}^2$.

- 15-4.** Äänen intensiteettien suhde on $\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{r_2^2}{r_1^2}$. Kipukynnystä vastaava intensiteetti saavutetaan etäisyydellä

$$r_2 = r_1 \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = 12 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{1,0 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2}{1,0 \text{ W/m}^2}} = 0,12 \text{ m}.$$

- 15-5.** Kaiuttimen voi olettaa olevan maanpinnan tasolla. Jos lisäksi oletetaan, että maahan osuneet aallot heijastuvat, silloin äänen energia jakautuu puolipallon pinnalle. 20 metrin etäisyydellä tämän puolipallon pinta-ala on $A = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot (20,0 \text{ m})^2 = 2513,27 \text{ m}^2$. Koska äänen teho neliömetriä kohti on 1,0 W, lähettää kaiutin ääntä teholla

$$P = IA = 1,0 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 2513,27 \text{ m}^2 \approx 2500 \text{ W}.$$

- 15-6.** Kun äänen intensiteetti on kuulokynnysarvon suuruinen eli $I = I_0$, on äänen intensiteettitaso

$$L = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{I_0}{I_0} = 10 \text{ dB} \cdot \log 1 = 0 \text{ dB}.$$

Kun intensiteetti on $I = 10I_0$, intensiteettitaso on

$$L = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{10I_0}{I_0} = 10 \text{ dB} \cdot \log 10 = 10 \text{ dB} \cdot 1 = 10 \text{ dB}.$$

Kun intensiteetti on $I = 100I_0$, intensiteettitaso on

$$L = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{100I_0}{I_0} = 10 \text{ dB} \cdot \log 10^2 = 10 \text{ dB} \cdot 2 = 20 \text{ dB}.$$

- 15-7.** Kuuloaluepiirroksen (s. 140) mukaan 100 dB:n intensiteettitasoa vastaava intensiteetti on $I_1 = 10^{-2} \text{ W/m}^2$. Kymmenen lehtipuhaltimen äänen intensiteetti on $I = 10 I_1 = 10^{-1} \text{ W/m}^2$. Kymmenen lehtipuhaltimen äänen intensiteettitaso on silloin

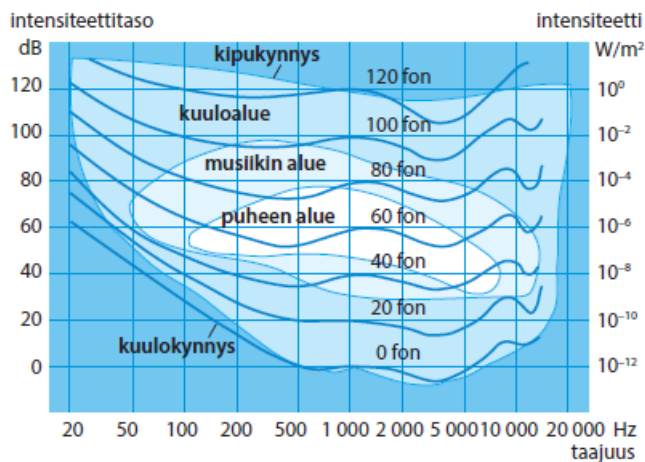
$$L = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{10^{-1} \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 10 \text{ dB} \cdot \log 10^{11} = 11 \cdot 10 \text{ dB} = 110 \text{ dB}.$$

- 15-8. a)** Asuinalueella keskimääräisen melutason tulisi päiväsaikaan pysyä piha-alueilla pienempänä kuin 55 dB. Melutasoa voidaan alentaa vaikuttamalla lähtömelutasoon eli liikenteestä syntyvän äänen voimakkuuteen ja estämällä äänen etenemistä. Lähtömelutasoa voidaan alentaa nopeusrajoituksilla, liikennemäärän pienentämisellä, vähentämällä raskaiden ajoneuvojen osuutta ajoväylällä, huolehtimalla liikenteen sujumisesta eli siitä, että autojen välimatkat ovat pitkiä, ja käyttämällä vähän melua tuottavaa päällystettä. Äänen etenemistä voidaan estää ja rajoittaa rakentamalla meluaitoja, -kaiteita ja -valleja sekä tunneleita ja istuttamalla tien ja asuinalueen väliin kasvillisuutta. Asuntoja rakennettaessa voidaan kiinnittää huomiota mm. talojen sijaintiin tiehen nähden ja ikkunoiden, ovien ja seinämateriaalien äänieristykseen.
- b)** Vastamelukuulokkeilla tarkoitetaan kuulokkeita, jotka vaimentavat ulkopuolista melua. Vastamelukuulokkeissa on pienet mikrofoniit. Ne vastaanottavat ulkopuolista ääntä, ja niihin kytketty elektroniikka mittaa tasaisen melun osuuden äänestä. Melu syötetään kuulokkeisiin vastakkaisvaiheisena yhdessä toistettavan musiikin kanssa. Ulkopuolinen melu ja kuulokkeiden tuottama vastamelu interferoivat ja kumoavat toisensa, ja melu vaimenee. Kuulokkeilla kuunneltavaan musiikkiin vaimennus ei vaikuta. Vastamelukuulokkeita käytettäessä kuunteluvoimakkuus voidaan laskea sellaiselle tasolle, ettei tarvitse pelätä kuulovaurioita meluisissakaan olosuhteissa, kuten kadulla.

- 15-9.** Kuuloaluepiirroksen (s 140) intensiteettitaso 120 dB vastaa intensiteettiä 10^0 W/m^2 eli $I_1 = 1 \text{ W/m}^2$. Kuuloaluepiirroksista voidaan havaita, että 130 Hz:n ääni on kuultavissa, jos äänen intensiteetti on noin $I_2 = 10^{-9} \text{ W/m}^2$. Intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden äänilähteeseen neliöön, joten intensiteettien suhde on $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$, josta saadaan yhtälö etäisyydelle r_2 , jolla ääni on vielä kuultavissa:

$$r_2 = r_1 \cdot \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = 1 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{1 \text{ W/m}^2}{10^{-9} \text{ W/m}^2}} \approx 32 \text{ km}.$$

- 15-10. a)** Ääntä ei voida kuulla, sillä se on kuulokynnyksen (noin 27 dB) alapuolella.
- b)** Ihminen kuulee 20 kHz:n äänen, jos äänen intensiteettitaso on suurempi kuin noin 90 dB.
- c)** Ihminen kuulee herkimmin äänet, joiden taajuus on noin 3000 Hz.
- d)** Matalia ääniä eli pienitaajuisia ääniä voimistetaan, koska ihmisen kuulo ei ole niille yhtä herkkä kuin korkeataajuisille äänille.



15-11. Tyhjän salin äänen intensiteetti I_1 saadaan yhtälöstä

$$L_1 = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{I_1}{I_0}, \text{ kun } L_1 = 41 \text{ dB, eli}$$

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{L_1/(10 \text{ dB})} = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \cdot 10^{(41 \text{ dB})/(10 \text{ dB})} = 1,25893 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2.$$

Täyden salin äänen intensiteetti on

$$L_2 = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{I_2}{I_0}, \text{ kun } L_2 = 65 \text{ dB eli}$$

$$I_2 = I_0 \cdot 10^{L_2/(10 \text{ dB})} = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \cdot 10^{(65 \text{ dB})/(10 \text{ dB})} = 3,16228 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2.$$

Sadan oppilaan aiheuttaman äänen intensiteetti on

$$I_{100} = 3,16228 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2 - 1,25893 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 = 3,14969 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2.$$

50 oppilaan aiheuttaman äänen intensiteetti on puolet tästä eli

$I_{50} = 1,57485 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$, joten salissa olevan äänen intensiteetti on silloin

$$I = 1,57485 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2 + 1,25893 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 = 1,58744 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2.$$

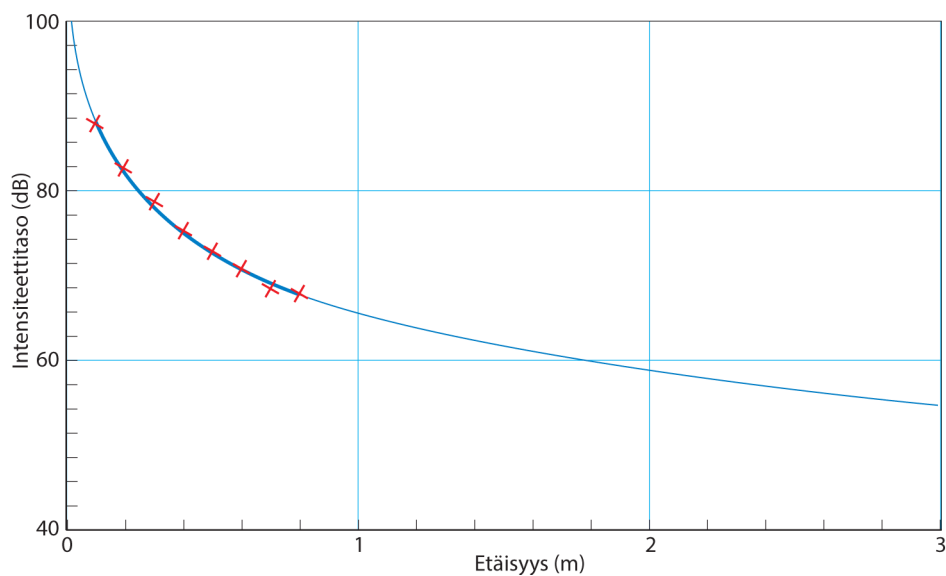
Puoliksi täyden salin intensiteettitaso on silloin

$$L = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{1,58744 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} \approx 62 \text{ dB}.$$

15-12. a) Mittausdata palvelimella olevasta tiedostosta:

Äänen intensiteettitaso	
Etäisyys x (m)	Intensiteettitaso L (dB)
0,10	88
0,20	82,6
0,30	78,7
0,40	75,3
0,50	72,9
0,60	70,7
0,70	68,4
0,80	67,9

Sovitetaan mittauspisteisiin käyrä $L = a \log \frac{b}{x^2}$. Koska intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön x^2 , havaitaan intensiteettitason yhtälöstä $L = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{I}{I_0}$, että L :n riippuvuus etäisyydestä on muotoa $\log \frac{1}{x^2}$.



b) Käyrästä voidaan nähdä, että intensiteettitaso on 60 dB noin etäisyydellä 1,8 m.

15-13. a) Samanarvoisella jatkuvalla A-äänitasolla (LAeq) tarkoitetaan tietyllä tarkasteluajalla, esimerkiksi työpäivän aikana, vallinnutta keskimääräistä äänen intensiteettitasoa. Sen määrittämiseksi mitataan tarkasteluajana melun kokonaisäänienenergia ja jaetaan se tasaisesti koko tarkasteluajalle ja lasketaan sitä vastaava intensiteettitaso. Tämä on piirretty kuvaan vaakasuoralla viivalla.

b) Kipukynnys vastaa intensiteettitasoa noin 120 dB. Kuvaajasta nähdään, että ääni ei ylitä kipukynnystä päivän aikana.

c) Koska keskimääräinen äänen intensiteettitaso ylittää työskentelyn aikana 85 dB, työnantaja on ollut velvollinen antamaan työntekijälle henkilökohtaisen kuulosuojaimen.

d) Alentuneesta äänen intensiteettitasosta voidaan päätellä, että työntekijä on poissa työpisteeltään, todennäköisesti ruokatuntia viettämässä, kello 11 ja 12 välisen ajan.

15-14. Tiivistelmässä mainittavia asioita:

* WHO (Maailman terveysjärjestö) on selvittänyt kannettavien kuulolaitteiden vaaroja nuorten kuulolle. Selvitys perustuu 46:een eri puolilla maailmaa tehtyyn väestötutkimukseen.

* Selvityksen mukaan yli miljardin teini-ikäisen ja nuoren aikuisen kuulo on vaarassa. Kuulovaurioiden määrä on lisääntynyt voimakkaasti kannettavien musiikkilaitteiden yleistyessä.

* Yhtä mieltä ollaan siitä, että huonokuuloisten määrä on lisääntynyt sen takia, että musiikkia kuunnellaan liian suurella äänenpaineella.

Nappikuulokkeissa ja isoimmissa kuulokkeissa käytetään usein noin 100 dB:n voimakkuutta, kun melun turvarajana pidetään 85 dB:iä.

* Yli puolet kuulovaurioista voitaisiin estää, jos kuuntelutottumukset muuttuisivat.

* Syy, miksi nuoret eivät kiinnitä huomiota asiaan, on tietämättömyys. Kuulon heikkenemisen riski aliarvioidaan. Kovalle äänelle altistutaan, vaikka siltä suojautuminen olisi helppoa.

TEHTÄVIEN RATKAISUT

16-1. Vääriä väitteitä ovat

- a; ääni ei etene tyhjössä,
- c; ultraäänellä ei voi tutkia luustoa; ultraäänen Dopplerin ilmiötä käytetään mm. veren virtauksen tutkimiseen,
- f; jälkikaiku kestää tyypillisesti 1-2 s.

16-2. a) Infraääntä ovat ääniaallot, joiden taajuus on alle 20 Hz.

b) Ultraääntä on ääniaallot, joiden taajuus on yli 20 kHz.

c) Ultraäänellä tapahtuva vedenalaisten kohteiden havainnointi, jossa lähetetään lyhyitä äänipulsseja ja rekisteröidään heijastuneita paluupulsseja. Koska äänen nopeus vedessä tiedetään, saadaan kohteen etäisyys selville lähtö- ja paluupulssien aikaerosta.

d) Shokkiaalto syntyy, kun äänilähde etenee nopeammin kuin ääni. Silloin ”eteenpäin” lähtevät paineaallot pakkautuvat pieneen tilaan, ja niiden interferoidessa syntyy hyvin voimakas painevaihtelu.

16-3. Äänen kulku meren pohjaan kestää $\frac{0,88 \text{ s}}{2} = 0,44 \text{ s}$. Meren syvyys on

$$s = vt = 1\,500 \text{ m/s} \cdot 0,44 \text{ s} = 660 \text{ m}.$$

16-4. Seinämän paksuus (pulssi 3): äänen kulkema edestakainen matka on

$$s_1 = vt_1 = 5250 \text{ m/s} \cdot 8 \cdot 2,0 \mu\text{s} = 0,084 \text{ m, joten seinämän paksuus on}$$

$$\frac{0,084 \text{ m}}{2} = 0,042 \text{ m} = 42 \text{ mm.}$$

Rakennevirheen paikka (pulssi 2): edestakainen matka on

$$s_2 = vt_2 = 5250 \text{ m/s} \cdot 2,2 \cdot 2,0 \mu\text{s} = 0,0231 \text{ m, joten rakennevirhe on}$$

$$\text{etäisyydellä } \frac{0,0231 \text{ m}}{2} \approx 12 \text{ mm seinämän pinnasta.}$$

16-5. Kohta 2) on oikein.

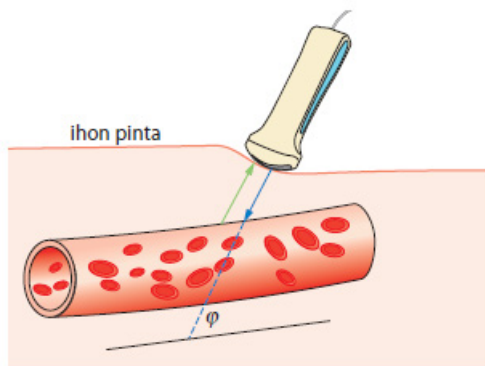
Käytetyn ultraäänen nopeus kudoksetksessa on

$$v = f\lambda = 2,0 \text{ MHz} \cdot 770 \mu\text{m} = 1540 \text{ m/s.}$$

Ultraäänen edestakainen matka kudoksessa on

$$s = vt = 1540 \text{ m/s} \cdot 42 \mu\text{s} = 64,68 \text{ mm. Kudoksen paksuus on siis}$$

$$\frac{64,68 \text{ mm}}{2} \approx 3,2 \text{ cm.}$$



a) Dopplerin ilmiön takia havaitsijaa kohti liikkuvasta kohteesta heijastuneen aallon taajuus on suurempi kuin alkuperäisen aallon taajuus, koska peräkkäisten aallonharjojen kulkema matka kohteesta havaitsijaan lyhenee kohteen liikkeen takia. Koska mittauksessa havaittiin taajuuden kasvavan, veri oli liikkeessä anturin suuntaan.

b) Tehtävässä annetusta yhtälöstä $f = f_0 \left(1 + 2 \cos \varphi \cdot \frac{v_{\text{veri}}}{v_{\text{ääni}}} \right)$ saadaan taajuuden muutokselle yhtälö $f - f_0 = 2 f_0 \cos \varphi \cdot \frac{v_{\text{veri}}}{v_{\text{ääni}}}$. Veren nopeudeksi saadaan

$$v_{\text{veri}} = \frac{v_{\text{ääni}}}{2 f_0 \cos \varphi} (f - f_0) = \frac{1550 \text{ m/s}}{2 \cdot 5,0 \cdot 10^6 \text{ Hz} \cdot \cos 48^\circ} \cdot 2,7 \cdot 10^3 \text{ Hz} \approx 0,63 \text{ m/s}.$$