

Esimerkki: MAA5/itseisarvoyhtälö 4/2014 (lyhyempi versio)

Ratkaise itseisarvoyhtälö

$$||x| - |x - 1|| = 1.$$

Aluksi $1 \geq 0$, joten on olemassa ratkaisu.

havaitaan itseisarvoyhtälön olevan muotoa $|\text{"jotain"}| = \text{"vakio"}$. Tälle ratkaisu oli muotoa

$$\begin{cases} \text{"jotain"} = \text{"vakio"} \\ \text{"jotain"} = -\text{"vakio"} \end{cases}.$$

Siis,

$$\begin{cases} |x| - |x - 1| = 1 \\ |x| - |x - 1| = -1 \end{cases}.$$

Ratkaistaan molemmat itseisarvoyhtälöt, merkitään ylempää 1:llä ja alempaa 2:lla. Koska yhtälössä on kaksi itseisarvoa, käytetään lokerointimenetelmää. Sitä varten kirjoitetaan itseisarvot auki.

$$|x| = |x - 0| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0 \end{cases}, \quad |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{kun } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{kun } x < 1 \end{cases}.$$

Yhtälö 1

$$|x| - |x - 1| = 1$$

Kun $x < 0$:

$$(-x) - (1 - x) = 1 \quad \Rightarrow \quad -1 = 1, \quad \text{RR, ei ratk., kun } x < 0.$$

Kun $0 \leq x < 1$:

$$(x) - (1 - x) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1, \quad \text{RR, } x = 1 \notin [0, 1).$$

Kun $1 \leq x$:

$$(x) - (x - 1) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1, \quad \text{, tosi, eli } \forall x \geq 1 \text{ käy.}$$

Yhtälö 2

$$|x| - |x - 1| = -1$$

Kun $x < 0$:

$$(-x) - (1 - x) = -1 \quad \Rightarrow \quad -1 = -1, \quad \text{tosi, eli } \forall x < 0 \text{ käy.}$$

Kun $0 \leq x < 1$:

$$(x) - (1 - x) = -1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad \text{OK.}$$

Kun $1 \leq x$:

$$(x) - (x - 1) = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 = -1, \quad , \mathbb{R}, \text{ ei ratk. , kun } x \geq 1 .$$

Tästä nähdään (yhdistämällä tiedot yhtälöstä 1 ja 2), että itseisarvoyhtälön

$$||x| - |x - 1|| = 1$$

ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$$