13.16 Mihin paraabelin $y = 9 - x^2$ pisteeseen piirretty tangentti rajaa koordinaattiakselien kanssa pinta-alaltaan pienimmän kolmion?

13.4 Suoran ympyrälieriön muotoisen säilyketölkin tilavuus on 4,0 litraa. Miten säilyketölkin korkeus ja pohjan säde on valittava, jotta sen valmistamiseen kuluu mahdollisimman vähän peltiä? Anna vastaukset millimetrin tarkkuudella.

Halutut asiat ja ehdot:

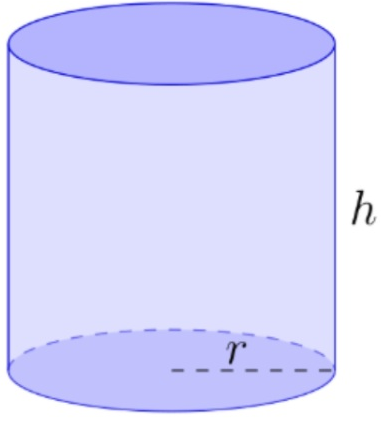
-Tilavuus on 4 l $l = dm^3$ (Mitat tulevat nyt desimetreinä)

$V = A_{\text{pohja}}h = \pi r^2 h$

$4 = \pi r^2 h$

$-> \; h = \frac{4}{\pi r^2}$ sijoitetaan tämä pinta-alaan

-Suora ympyrälieriö



MAFY

pohjan säde	r
korkeus	h
pohjan pinta-ala	$A_{\text{pohja}} = \pi r^2$
pohjan piiri	$p = 2\pi r$
vaipan pinta-ala	$A_{\text{vaippa}} = ph = 2\pi rh$
tilavuus	$V = A_{\text{pohja}}h = \pi r^2 h$

-Pinta-ala mahdollisimman pieni

Pinta-ala koostuu pohjasta, kannesta ja vaipasta

$$A = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi rh = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \frac{4}{\pi r^2} = 2 \cdot \pi r^2 + \frac{8}{r}$$

$$-> \ f(x) = 2 \cdot \pi x^2 + \frac{8}{x} = 2 \cdot \pi x^2 + 8 \cdot x^{-1}$$

Määrittelyjoukko:

$x \neq 0$

$$f'(x) = 4\pi x - 8x^{-2} = 4\pi x - \frac{8}{x^2}$$

Derivaatan nollakohdat

$4\pi x - \frac{8}{x^2} = 0$ Lavennetaan samannimisiksi

$$\frac{4\pi x^3}{x^2} - \frac{8}{x^2} = 0$$

$$\frac{4\pi x^3 - 8}{x^2} = 0$$

$$-> \ 4\pi x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = \frac{2}{\pi}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \approx 0{,}86$$

Lasketaan derivaatan arvot molemmilta puolilta

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4\pi \cdot \frac{1}{2} - \frac{8}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2\pi - 32 \quad (neg -> \ vähenevä)$$

$$f'(1) = 4\pi \cdot 1 - \frac{8}{1^2} = 4\pi - 8 \quad (pos -> kasvava)$$

-> Derivaatan nollakohta antaa funktiolle pienimmän arvon.

Tällöin pohjan säde $r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \approx 0{,}86 \ dm = 86 \ mm$

ja korkeus $h = \frac{4}{\pi r^2} = \frac{4}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\right)^2} \approx 1{,}72 \ dm = 172 \ mm$