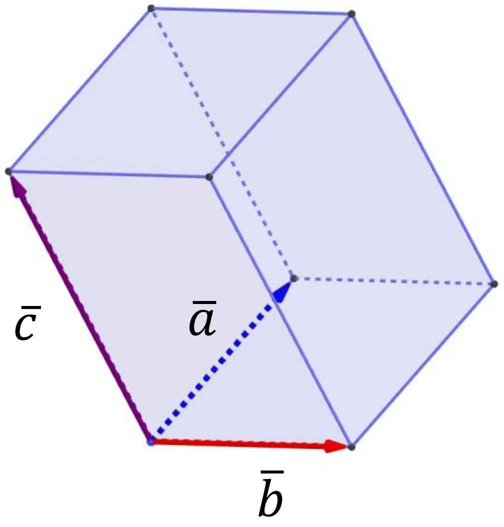
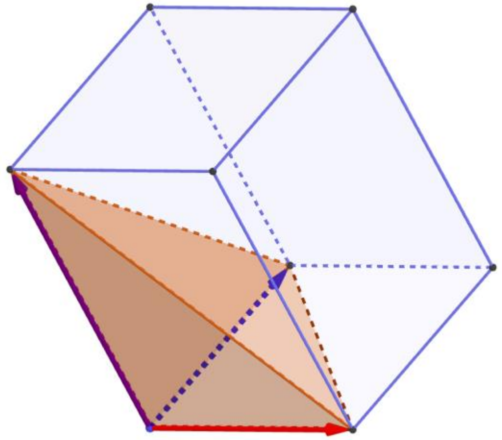
Skalaarikolmitulo

- Vektorien $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ skalaarikolmitulo on tulo $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$
- Skalaarikolmitulon avulla voidaan laskea kolmen vektorin virittämän *suuntaissärmiön* tai sitä vastaavan tetraedrin tilavuus.
- Suuntaissärmiö on lieriö, jonka kaikki tahkot ovat suunnikkaita.



$$V = \left|(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}\right|$$

”Tavallinen” itseisarvo, koska $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$ on skalaari eli reaaliluku.



$$V = \frac{1}{6}\left|(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}\right|$$

Tilavuus on kuudesosa suuntaissärmiön tilavuudesta, koska pohjan pinta-ala on puolet särmiön pohjan pinta-alasta ja lisäksi kartion tilavuus on kolmasosa vastaavasta lieriöstä.

- Vektorien $\bar{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$ ja $\bar{c} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix}$ skalaarikolmitulo voidaan laskea suoraan determinantin avulla, jolloin ristituloa ja pistetuloa ei tarvitse erikseen laskea:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \left\| \begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{matrix} \right\|$$

Eräs determinantin ominaisuus on se, että sen arvo pysyy samana, vaikka matriisin rivit vaihdetaan sarakkeiksi ja päinvastoin (ns. transponointi)

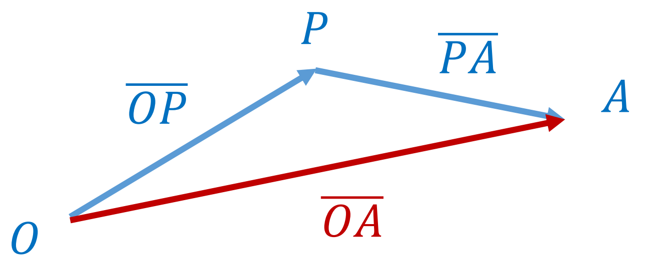
Determinantin itseisarvo

Esim. t. 351, s. 99

a) $\bar{a} = \overline{PA} = 2\bar{\imath} - 6\bar{k} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \overline{PB} = 2\bar{\jmath} - 6\bar{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\bar{c} = \overline{PC} = -2\bar{\jmath} - 6\bar{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$

Määritetään pisteet A, B ja C paikkavektorien avulla.

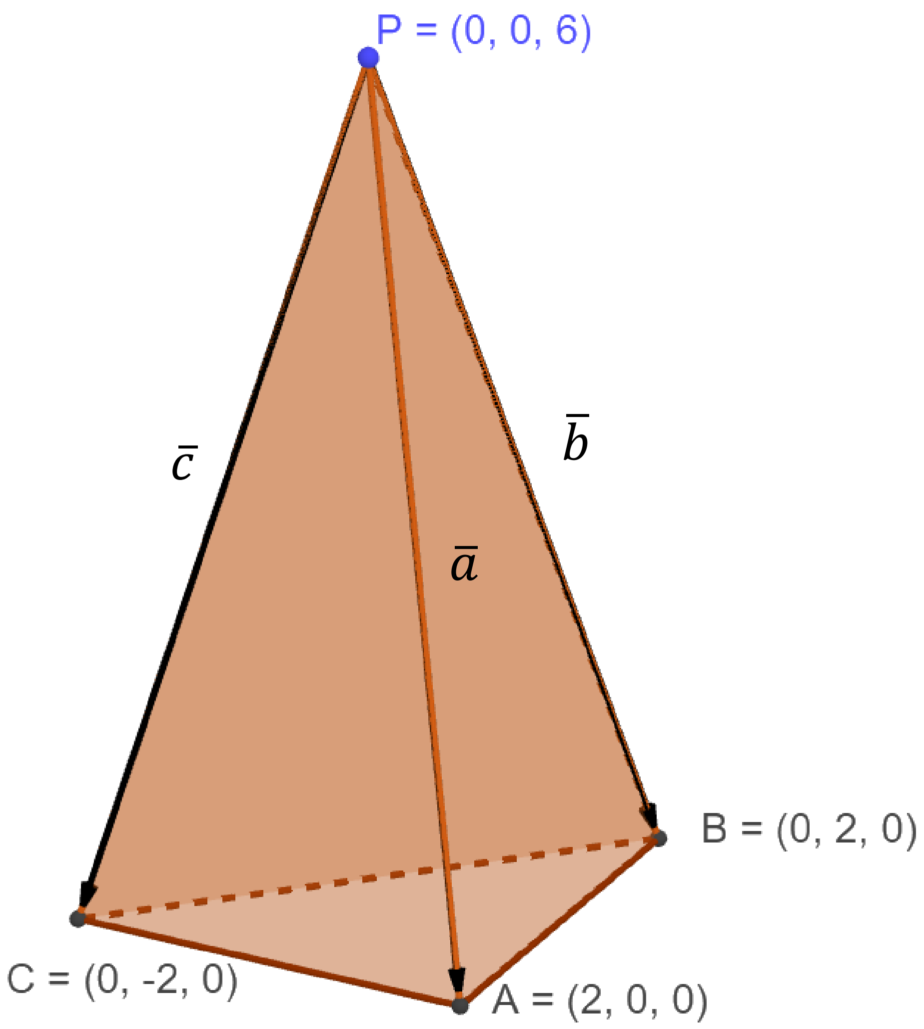
$$\overline{OA} = \overline{OP} + \overline{PA} = \overline{OP} + \bar{a}$$



$$\overline{OA} = \overline{OP} + \bar{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow A = (2, 0, 0)$$

$$\overline{OB} = \overline{OP} + \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow B = (0, 2, 0)$$

$$\overline{OC} = \overline{OP} + \bar{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow C = (0, -2, 0)$$



b) Pyramidi on tetraedri, jonka vektorit $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ virittävät.

Pyramidin tilavuus saadaan skalaarikolmitulosta

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c}\right|$$

$$V = \frac{1}{6}\left|(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & -6 \end{matrix}\right\|$$

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix},\quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix},\quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & -6 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{matrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-6) - (-2) \cdot (-6) \cdot 2 = -24 - 24 = -48$$

Riittää laskea vain ne vinorivit, joissa ei ole nollia.

Sama tulos saataisiin myös laskemalla determinantti $\left|\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -6 & -6 & -6 \end{matrix}\right|$.

Pyramidin tilavuus on $V = \frac{1}{6}\left||-48|\right| = 8.$

TI-Nspire:

$$a:=\begin{bmatrix}2\\0\\-6\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}2\\0\\-6\end{bmatrix}$$

$$b:=\begin{bmatrix}0\\2\\-6\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\2\\-6\end{bmatrix}$$

$$c:=\begin{bmatrix}0\\-2\\-6\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\-2\\-6\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{dotP}(\mathrm{crossP}(a,b),c) \qquad -48$$

$$\frac{1}{6}\cdot|-48| \qquad 8$$

tai

$$\det\left(\begin{bmatrix}2 & 0 & -6\\0 & 2 & -6\\0 & -2 & -6\end{bmatrix}\right) \qquad -48$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & -2\\-6 & -6 & -6\end{bmatrix}\right) \qquad -48$$

c) Vektorien $\overline{PA} = \bar{a}$ ja $\overline{PB} = \bar{b}$ välisen kulman kosini saadaan pistetulon ja vektorien pituuksien avulla:

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$|\bar{a}| = |\bar{b}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (-6) \cdot (-6) = 36$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \cos\alpha = \frac{36}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{9}{10}$$

Sivusärmien välinen kulma on $\alpha = \arccos\frac{9}{10} \approx 25{,}8°$.