

13.17 Funktioiden $f(x) = e^{2x}$ ja $g(x) = 4e^x - 3$



kuvaajat rajaavat suljetun alueen.

a) Ratkaise funktion kuvaajien leikkauskohdat.

b) Päättele, kumman funktion kuvaaja on ylempänä leikkauskohtien välissä ja hahmottele alueen kuva.

c) Laske alueen pinta-ala.

$$a) e^{2x} = 4e^x - 3$$
$$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$$

$$(e^x)^2 - 4e^x + 3 = 0 \text{ (toisenaasteen yhtälö)}$$

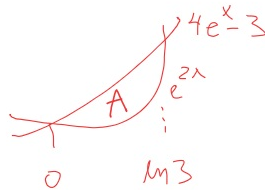
$$e^x = \frac{(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$e^x = 3 \quad \vee \quad e^x = 1$$

$$x = \ln 3 \approx 1,09 \quad x = 0$$

$$f(0,5) = e^{2 \cdot 0,5} \approx 2,71$$

$$g(0,5) = 4e^{0,5} - 3 \approx 3,59$$



$$A = \int_0^{\ln 3} (4e^x - 3 - e^{2x}) dx =$$

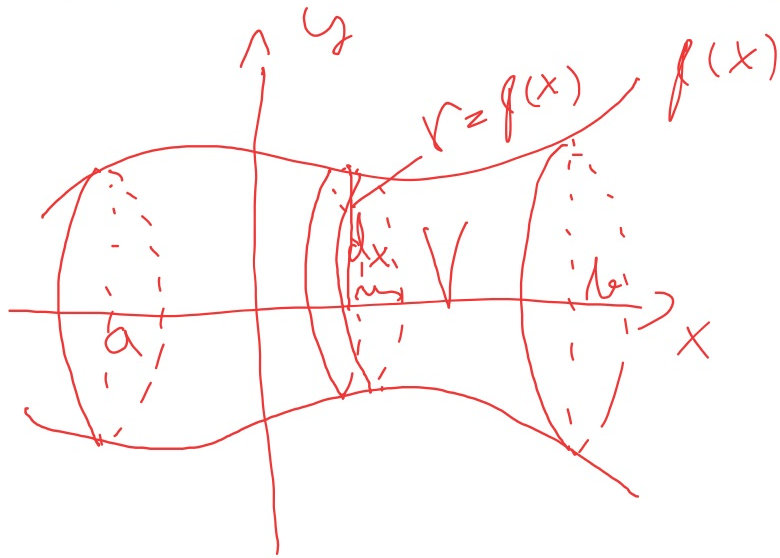
$$\left[4e^x - 3x - \frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^{\ln 3}$$

$$4e^{\ln 3} - 3 \ln 3 - \frac{1}{2}e^{2 \ln 3} - \left(4e^0 - 3 \cdot 0 - \frac{1}{2}e^{2 \cdot 0} \right) =$$

$$4 \cdot 3 - 3 \ln 3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \left(4 \cdot 1 - 0 - \frac{1}{2} \right) =$$

$$\underline{\underline{4 - 3 \ln 3}}$$

Pöytälehden kappaleen tilavuus



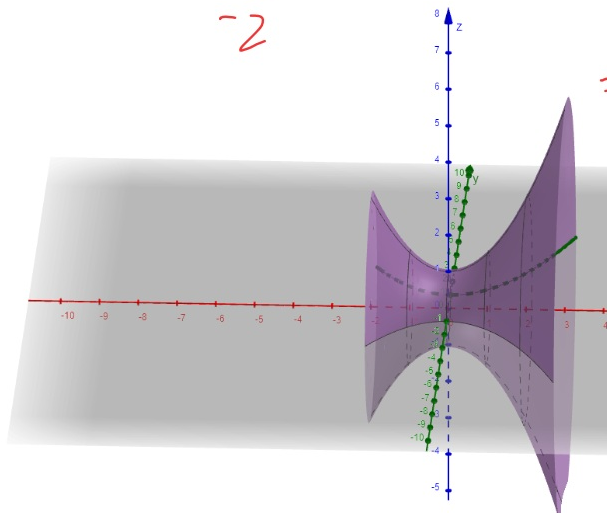
$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$
$$= \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Esim. Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, kun $-2 \leq x \leq 3$ rajoittaa x -akselin ympäri. Mikä on kappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_{-2}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)^2 dx = \pi \int_{-2}^3 \left(\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1\right) dx$$

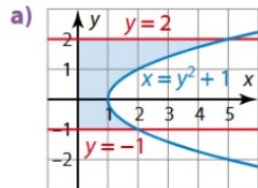
$$= \pi \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-2}^3 = \frac{365}{12}\pi$$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1, (-2 < x < 3)$ $\equiv \mathcal{N}$
 $a = \text{Pinta}(f, 2\pi, x\text{Akseli})$
 $= \begin{cases} \text{Jos } (-2 < u < 3, \frac{1}{2}u^2 + 1) \cos(v) \\ \text{Jos } (-2 < u < 3, \frac{1}{2}u^2 + 1) \sin(v) \end{cases}$
 Syöttökenttä...



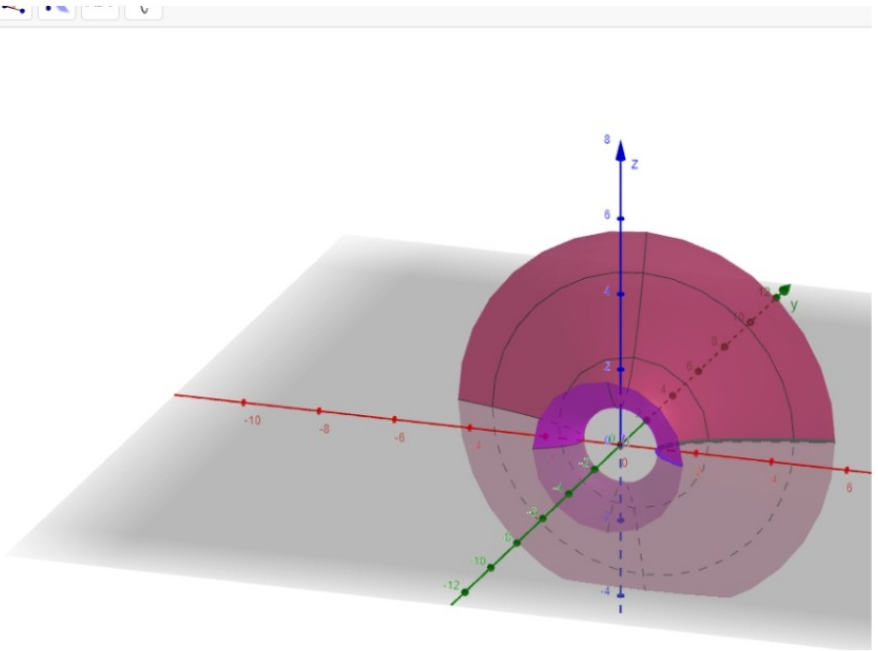
$$\int_{-2}^3 \pi \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)^2 dx$$

14.15 Kuvan väritetty alue pyörähtää y -akselin ympäri. Piirrä muodostuva pyörähdyskappale ja laske sen tilavuus.



Ratk. y
 $y^2 = x + 1 \quad || \sqrt{\quad}$
 $y = \pm \sqrt{x+1}$

$f(x) = -\sqrt{x-1}, \quad (1 < x < 2)$
 $g(x) = \sqrt{x-1}, \quad (1 < x < 5)$
 $a = \text{Pinta}(f, 2\pi, y\text{Akseli})$
 $= \begin{pmatrix} u \cos(v) \\ \text{Jos}(1 < u < 2, -\sqrt{u-1}) \\ u (-\sin(v)) \end{pmatrix}$
 $b = \text{Pinta}(g, 2\pi, y\text{Akseli})$
 $= \begin{pmatrix} u \cos(v) \\ \text{Jos}(1 < u < 5, \sqrt{u-1}) \\ u (-\sin(v)) \end{pmatrix}$



$$\int_{-1}^2 \pi(y^2+1)^2 dy$$

$$\frac{78 \cdot \pi}{5}$$