

$$\text{a) } x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = (x + 4)^2$$

$$\text{b) } 25 + 10y + y^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot y + y^2 = (5 + y)^2$$

$$\text{c) } 4z^2 + 4z + 1 = (2z)^2 + 2 \cdot 2z \cdot 1 + 1^2 = (2z + 1)^2$$

$$\text{Vastaus: a) } (x + 4)^2 \quad \text{b) } (5 + y)^2 \quad \text{c) } (2z + 1)^2$$

$$\text{a) } x^2 - 12x + 36 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-6) + (-6)^2 = (x - 6)^2$$

$$\text{b) } 4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-5) + (-5)^2 = (2x - 5)^2$$

$$\text{c) } z^4 - 2x^2 + 1 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (-1) + (-1)^2$$

$$= (x^2 - 1)^2$$

$$= (x^2 - 1^2)^2$$

$$= ((x+1)(x-1))^2$$

$$= (x+1)^2(x-1)^2$$

$$\text{Vastaus: a) } (x - 6)^2 \quad \text{b) } (2x - 5)^2 \quad \text{c) } (x + 1)^2(x - 1)^2$$

$$\text{a) } z^2 - 9 = z^2 - 3^2 = (z + 3)(z - 3)$$

$$\begin{aligned}\text{b) } x^4 - 81 &= (x^2)^2 - 9^2 \\ &= (x^2 + 9)(x^2 - 9) \\ &= (x^2 + 9)(x^2 - 3^2) \\ &= (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } 1 - y^4 &= 1^2 - (y^2)^2 \\ &= (1 - y^2)(1 + y^2) \\ &= (1 - y)(1 + y)(1 + y^2)\end{aligned}$$

Vastaus:

$$\text{a) } (z + 3)(z - 3)$$

$$\text{b) } (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$$

$$\text{c) } (1 - y)(1 + y)(1 + y^2)$$

269

a) $x^3 - 25x^2 = x^2(x - 25)$

b) $32x^5 + 8x^4 = 8x^4(4x + 1)$

c) $z^{10} + z^9 = z^9(z + 1)$

Vastaus:

a) $x^2(x - 25)$

b) $8x^4(4x + 1)$

c) $z^9(z + 1)$

$$\text{a) } x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = x(x^2 - 4^2) = x(x + 4)(x - 4)$$

$$\text{b) } 16x^3 - x = x(16x^2 - 1) = x((4x)^2 - 1^2) = x(4x + 1)(4x - 1)$$

$$\text{c) } x^5 - x = x(x^4 - 1)$$

$$= x((x^2)^2 - 1)^2$$

$$= x(x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$= x(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

Vastaus:

$$\text{a) } x(x + 4)(x - 4)$$

$$\text{b) } x(4x + 1)(4x - 1)$$

$$\text{c) } x(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

$$\text{a) } y^3 + 2y^2 + y = y(y^2 + 2y + 1) = y(y + 1)^2$$

$$\begin{aligned}\text{b) } y^3 - 4y^2 + 4y &= y(y^2 - 4y + 4) \\ &= y(y^2 + 2 \cdot y \cdot (-2) + (-2)^2) \\ &= y(y - 2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } 9y^3 + 6y^2 + y &= y(9y^2 + 6y + 1) \\ &= y((3y)^2 + 2 \cdot 3y \cdot 1 + 1^2) \\ &= y(3y + 1)^2\end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: a) } y(y + 1)^2 \quad \text{b) } y(y - 2)^2 \quad \text{c) } y(3y + 1)^2$$

$$\text{a) } x(7x+2) - 5(7x+2) = (x-5)(7x+2)$$

$$\text{b) } y(y^2-1) + (y^2-1) = y(y^2-1) + 1 \cdot (y^2-1)$$

$$= (y+1)(y^2-1)$$

$$= (y+1)(y+1)(y-1)$$

$$\text{c) } z(2+z) - (2+z) = z(2+z) - 1 \cdot (2+z) = (z-1)(2+z)$$

Vastaus:

$$\text{a) } (x-5)(7x+2)$$

$$\text{b) } (y+1)(y+1)(y-1)$$

$$\text{c) } (z-1)(2+z)$$

$$\text{a) } x^3 - 5x^2 + 3x - 15 = x^2(x - 5) + 3(x - 5) = (x^2 + 3)(x - 5)$$

$$\text{b) } x^5 + x^3 - x^2 - 1 = x^3(x^2 + 1) - 1 \cdot (x^2 + 1) = (x^3 - 1)(x^2 + 1)$$

$$\text{c) } 5x^3 + x^2 - 5x - 1 = x^2(5x + 1) - 1 \cdot (5x + 1)$$

$$= (x^2 - 1)(5x + 1)$$

$$= (x + 1)(x - 1)(5x + 1)$$

Vastaus:

$$\text{a) } (x^2 + 3)(x - 5)$$

$$\text{b) } (x^3 - 1)(x^2 + 1)$$

$$\text{c) } (x + 1)(x - 1)(5x + 1)$$

$$\text{a) } x^4 - 7x^3 - 9x^2 + 63x = x^3(x - 7) - 9x(x - 7)$$

$$= (x^3 - 9x)(x - 7)$$

$$= x(x^2 - 9)(x - 7)$$

$$= x(x + 3)(x - 3)(x - 7)$$

$$\text{b) } x^7 - x^5 + x^2 - 1 = x^5(x^2 - 1) + 1 \cdot (x^2 - 1)$$

$$= (x^5 + 1)(x^2 - 1)$$

$$= (x^5 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

$$\text{c) } -3x^3 + 4x^2 + 3x - 4 = -x^2(3x - 4) + 1 \cdot (3x - 4)$$

$$= (-x^2 + 1)(3x - 4)$$

$$= (1 - x^2)(3x - 4)$$

$$= (1 + x)(1 - x)(3x - 4)$$

Toiselta riviltä ratkaisua voi jatkaa myös seuraavasti:

$$(-x^2 + 1)(3x - 4) = -(x^2 - 1)(3x - 4) = -(x + 1)(x - 1)(3x - 4)$$

Vastaus:

$$\text{a) } x(x + 3)(x - 3)(x - 7)$$

$$\text{b) } (x^5 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

$$\text{c) } (1 + x)(1 - x)(3x - 4) \text{ eli } -(x + 1)(x - 1)(3x - 4)$$

$$\begin{aligned}\text{a) } x^2 - 6x - 7 &= x^2 - 7x + x - 7 \\ &= x(x - 7) + 1 \cdot (x - 7) \\ &= (x + 1)(x - 7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } y^2 + 7y + 10 &= y^2 + 2y + 5y + 10 \\ &= y(y + 2) + 5(y + 2) \\ &= (y + 5)(y + 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } 2z^2 - 8z + 6 &= 2z^2 - 2z - 6z + 6 \\ &= 2z(z - 1) - 6(z - 1) \\ &= (2z - 6)(z - 1) \\ &= 2(z - 3)(z - 1)\end{aligned}$$

Vastaus:

a) $(x + 1)(x - 7)$

b) $(y + 5)(y + 2)$

c) $2(z - 3)(z - 1)$

$$\text{a) } 36x^2 + 60x + 25 = (6x)^2 + 2 \cdot 6x \cdot 5 + 5^2 = (6x + 5)^2$$

$$\text{b) } 9x^2 + 3x + \frac{1}{4} = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(3x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{c) } x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{Vastaus: a) } (6x + 5)^2 \quad \text{b) } \left(3x + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{c) } \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{a) } z^2 - 81 = z^2 - 9^2 = (z + 9)(z - 9)$$

$$\text{b) } 9t^2 - s^2 = (3t)^2 - s^2 = (3t + s)(3t - s)$$

$$\begin{aligned}\text{c) } 16 - x^4 &= 4^2 - (x^2)^2 \\ &= (4 + x^2)(4 - x^2) \\ &= (4 + x^2)(2^2 - x^2) \\ &= (4 + x^2)(2 + x)(2 - x)\end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: a) } (z + 9)(z - 9) \text{ b) } (3t + s)(3t - s) \text{ c) } (4 + x^2)(2 + x)(2 - x)$$

$$\text{a) } \frac{x^2 - 9}{2x - 6} = \frac{x^2 - 3^2}{2(x - 3)} = \frac{(x + 3) \overset{1}{\cancel{(x - 3)}}}{2 \underset{1}{\cancel{(x - 3)}}} = \frac{x + 3}{2}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x} = \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + (-3)^2}{x(x - 3)} = \frac{(x - 3) \overset{1}{\cancel{x}}}{x \underset{1}{\cancel{(x - 3)}}} = \frac{x - 3}{x}$$

$$\text{c) } \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{(x - 3) \overset{1}{\cancel{x}}}{(x + 3) \underset{1}{\cancel{(x - 3)}}} = \frac{x - 3}{x + 3}$$

Vastaus: a) $\frac{x + 3}{2}$ b) $\frac{x - 3}{x}$ c) $\frac{x - 3}{x + 3}$

$$\text{a) } \frac{x^3 - x}{x+1} = \frac{x(x^2 - 1)}{x+1} = \frac{x(x-1)(\cancel{x+1})}{\cancel{x+1}} = x(x-1)$$

$$\text{b) } \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2 - 1} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$\text{c) } \frac{x^3 + 10x^2 + 25x}{2x+10} = \frac{x(x^2 + 10x + 25)}{2(x+5)} = \frac{x(x+5)^{\cancel{2}}}{2\cancel{x+5}} = \frac{x(x+5)}{2}$$

Vastaus: a) $x(x-1)$ b) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ c) $\frac{x(x+5)}{2}$

$$\begin{aligned}\text{a) } x + 3x^2 + 3x + 1 &= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1 + 1^3 \\ &= (x + 1)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 &= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2x \cdot (-1)^2 + (-1)^3 \\ &= (2x - 1)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } x^3 + 6x^2 + 12x + 8 &= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 \\ &= (x + 2)^3\end{aligned}$$

Vastaus: a) $(x + 1)^3$ b) $(2x - 1)^3$ c) $(x + 2)^3$

$$\begin{aligned}\text{a) } 3x^3 + x^2 + 12x + 4 &= x^2(3x + 1) + 4(3x + 1) \\ &= (3x + 1)(x^2 + 4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } 2x^4 + x^3 - 10x - 5 &= x^3(2x + 1) - 5(2x + 1) \\ &= (2x + 1)(x^3 - 5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } 7x^5 - 35x^3 + x^2 - 5 &= 7x^3(x^2 - 5) + 1 \cdot (x^2 - 5) \\ &= (x^2 - 5)(7x^3 + 1)\end{aligned}$$

Vastaus: a) $(3x + 1)(x^2 + 4)$ b) $(2x + 1)(x^3 - 5)$ c) $(x^2 - 5)(7x^3 + 1)$

$$\begin{aligned}\text{a) } 6x^2 - x - 1 &= 6x^2 - 3x + 2x - 1 \\ &= 3x(2x - 1) + 1 \cdot (2x - 1) \\ &= (2x - 1)(3x + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } y^2 - 10y + 21 &= y^2 - 3y - 7y + 21 \\ &= y(y - 3) - 7(y - 3) \\ &= (y - 3)(y - 7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } 3z^2 + 13z + 4 &= 3z^2 + z + 12z + 4 \\ &= z(3z + 1) + 4(3z + 1) \\ &= (3z + 1)(z + 4)\end{aligned}$$

Vastaus: a) $(2x - 1)(3x + 1)$ b) $(y - 3)(y - 7)$ c) $(3z + 1)(z + 4)$

$$\begin{aligned}\text{a) } (x+1)(x^2+2x)-(x+1)(x+6) &= (x+1)(x^2+2x-(x+6)) \\ &= (x+1)(x^2+x-6) \\ &= (x+1)(x^2+3x-2x-6) \\ &= (x+1)(x(x+3)-2(x+3)) \\ &= (x+1)(x+3)(x-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } 3x(3x^2-2x-1)-3x^2+2x+1 &= 3x(3x^2-2x-1)-1 \cdot (3x^2-2x-1) \\ &= (3x^2-2x-1)(3x-1) \\ &= (3x^2-3x+x-1)(3x-1) \\ &= (3x(x-1)+1 \cdot (x-1))(3x-1) \\ &= (x-1)(3x+1)(3x-1)\end{aligned}$$

Vastaus: a) $(x+1)(x+3)(x-2)$ b) $(x-1)(3x+1)(3x-1)$

$$\begin{aligned}x^4 - 10x^2 + 9 &= x^4 - x^2 - 9x^2 + 9 \\&= x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1) \\&= (x^2 - 1)(x^2 - 9) \\&= (x^2 - 1^2)(x^2 - 3^2) \\&= (x + 1)(x - 1)(x + 3)(x - 3)\end{aligned}$$

Vastaus: $(x + 1)(x - 1)(x + 3)(x - 3)$

$$\begin{aligned}\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 4} &= \frac{x^4 - x^2 - 4x^2 + 4}{x^2 - 4} \\&= \frac{x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1)}{x^2 - 4} \\&= \frac{(x^2 - 1) \cancel{(x^2 - 4)}}{\cancel{x^2 - 4}} \\&= x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)\end{aligned}$$

Vastaus: $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

286

Muodostetaan lukujen erotus.

$$\begin{aligned}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - ab &= a^2 - ab + \frac{1}{2}b^2 \\&= a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^2 \\&= a^2 + 2 \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}b\right) + \left(-\frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{1}{4}b^2 \\&= \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{1}{4}b^2\end{aligned}$$

Havaitaan, että $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0$ aina, ja $\frac{1}{4}b^2 > 0$, koska $b \neq 0$.

Siis $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{1}{4}b^2 > 0$

eli

$$a^2 + \frac{1}{2}b^2 - ab > 0$$

$$a^2 + \frac{1}{2}b^2 > ab, \quad \text{kun } a \neq 0 \text{ ja } b \neq 0.$$

Vastaus: $a^2 + \frac{1}{2}b^2$ on suurempi

287

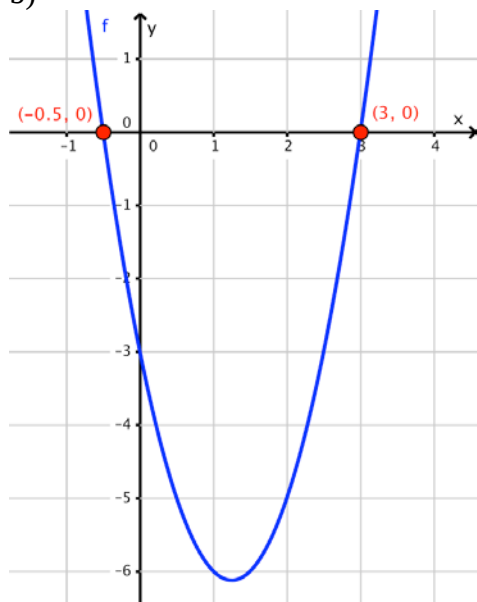
a) $(2x+1)(x-3)=0$

$2x+1=0$ tai $x-3=0$

$2x=-1$ $x=3$

$x=-\frac{1}{2}$

b)



Vastaus: $x=-\frac{1}{2}$ tai $x=3$

$$\text{a) } -x^2 + 14x = 0$$

$$x(-x + 14) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad -x + 14 = 0$$

$$x = 14$$

$$\text{b) } 7x^2 + 56x = 0$$

$$7x(x + 8) = 0$$

$$7x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 8 = 0$$

$$x = 0 \quad \quad \quad x = -8$$

$$\text{c) } \quad \quad x = 9x^2$$

$$x - 9x^2 = 0$$

$$x(1 - 9x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 1 - 9x = 0$$

$$-9x = -1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

Vastaus: a) $x = 0$ tai $x = 14$ b) $x = -8$ tai $x = 0$ c) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{9}$

289

a) $x^3 - 49x = 0$

$$x(x^2 - 49) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 49 = 0$$

$$x^2 = 49$$

$$x = 7 \quad \text{tai} \quad x = -7$$

b) $x^3 + 4x = 0$

$$x(x^2 + 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

ei ratkaisua

c) $x^3 - x = 0$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

Vastaus:

a) $x = -7, x = 0$ tai $x = 7$ b) $x = 0$ c) $x = -1, x = 0$ tai $x = 1$

$$\text{a) } (x+1)(7x+1) = 0$$

$$x+1=0 \quad \text{tai} \quad 7x+1=0$$

$$x=-1 \quad 7x=-1$$

$$x = -\frac{1}{7}$$

$$\text{b) } (x+1)(7x+1) = 1$$

$$7x^2 + x + 7x + 1 = 1$$

$$7x^2 + 8x = 0$$

$$x(7x+8) = 0$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad 7x+8=0$$

$$7x = -8$$

$$x = -\frac{8}{7}$$

$$\text{Vastaus: a) } x = -1 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{7} \quad \text{b) } x = -\frac{8}{7} \quad \text{tai} \quad x = 0$$

$$\text{a) } x^3 + 3x^2 - 4x = 0$$

$$x(x^2 + 3x - 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-3-5}{2} = -4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3+5}{2} = 1$$

$$\text{b) } x^3 - 2x^2 - 24x = 0$$

$$x(x^2 - 2x - 24) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai}$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{2 \pm 10}{2}$$

$$x = \frac{2-10}{2} = -4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2+10}{2} = 6$$

Vastaus: a) $x = -4$, $x = 0$ tai $x = 1$ b) $x = -4$, $x = 0$ tai $x = 6$

$$\text{a)} \quad x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$x^2(x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + (-3)^2) = 0$$

Voit myös käyttää toisen
asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

$$x^2(x - 3)^2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$\text{b)} \quad 16x^3 = 8x^2 - x$$

$$16x^3 - 8x^2 + x = 0$$

$$x(16x^2 - 8x + 1) = 0$$

$$x((4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot (-1) + (-1)^2) = 0$$

$$x(4x - 1)^2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 4x - 1 = 0$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Vastaus: a) $x = 0$ tai $x = 3$ b) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{4}$

$$\text{a)} \quad x^4 - 7x^3 - x + 7 = 0$$

$$x^3(x-7) - 1 \cdot (x-7) = 0$$

$$(x^3 - 1)(x - 7) = 0$$

$$x^3 - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x - 7 = 0$$

$$x^3 = 1 \quad \quad \quad x = 7$$

$$x = 1$$

$$\text{b)} \quad x^5 + x^3 - x^2 - 1 = 0$$

$$x^3(x^2 + 1) - 1 \cdot (x^2 + 1) = 0$$

$$(x^3 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$x^3 - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 1 = 0$$

$$x^3 = 1 \quad \quad \quad x^2 = -1$$

$$x = 1 \quad \quad \quad \text{ei ratkaisua}$$

Vastaus: a) $x = 1$ tai $x = 7$ b) $x = 1$

$$\text{a)} \quad 4x^2 + 4 = 3x^3 + 3x$$

$$-3x^3 + 4x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$x^2(-3x + 4) + 1 \cdot (-3x + 4) = 0$$

$$(x^2 + 1)(-3x + 4) = 0$$

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{tai} \quad -3x + 4 = 0$$

$$x^2 = -1 \quad -3x = -4$$

$$\text{ei ratkaisua} \quad x = \frac{4}{3}$$

$$\text{b)} \quad x^7 - x^5 = 1 - x^2$$

$$x^7 - x^5 + x^2 - 1 = 0$$

$$x^5(x^2 - 1) + 1 \cdot (x^2 - 1) = 0$$

$$(x^5 + 1)(x^2 - 1) = 0$$

$$x^5 + 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 1 = 0$$

$$x^5 = -1 \quad x^2 = 1$$

$$x = -1 \quad x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

$$\text{Vastaus: a) } x = \frac{4}{3} \quad \text{b) } x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

a)

Luvun x viides potenssi: x^5 Luvun x kolmas potenssi: x^3

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x^5 = x^3$$

$$x = -1, x = 0 \text{ tai } x = 1$$

b)

Luvun x kuutio: x^3 Luvun x neliö: x^2 Luvun x kuution ja neliön keskiarvo: $\frac{x^3 + x^2}{2}$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$\frac{x^3 + x^2}{2} = x$$

$$x = -2, x = 0 \text{ tai } x = 1$$

Vastaus: a) Luvut $-1, 0$ ja 1 b) Luvut $-2, 0$ ja 1

$$5x^3 + ax^2 - 30x = 0$$

$$x(5x^2 + ax - 30) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 5x^2 + ax - 30 = 0$$

Koska $x = 0$ on aina yhtälön juuri, niin yhtälöllä on kolme juurta, kun toisen asteen yhtälöllä $5x^2 + ax - 30 = 0$ on kaksi juurta ($x = 0$ ei ole yhtälön $5x^2 + ax - 30 = 0$ juuri millään a :n arvolla).

Muodostetaan diskriminantin lauseke.

$$D = a^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-30) = a^2 + 600$$

Koska $a^2 + 600 > 0$ aina, niin yhtälöllä $5x^2 + ax - 30 = 0$ on kaksi juurta kaikilla a :n arvoilla.

Siis yhtälöllä $5x^3 + ax^2 - 30x = 0$ on kolme juurta kaikilla a :n arvoilla.

Vastaus: Luvun a kaikilla arvoilla.

$$\text{a) } x(x-1)^2(3x+1)=0$$

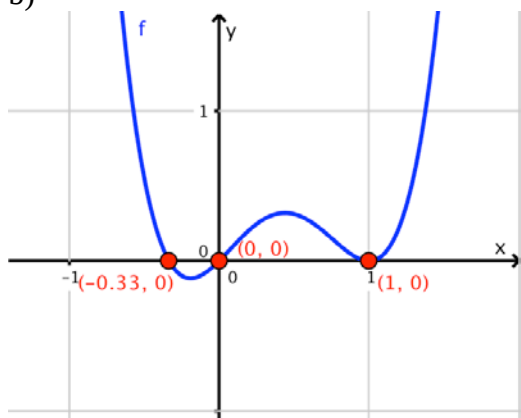
$$x=0 \quad \text{tai} \quad x-1=0 \quad \text{tai} \quad 3x+1=0$$

$$x=1$$

$$3x=-1$$

$$x=-\frac{1}{3}$$

b)



$$\text{Vastaus: } x=-\frac{1}{3}, \quad x=0 \quad \text{tai} \quad x=1$$

298

$$\text{a) } -14x^2 - 8x = 0$$

$$2x(-7x - 4) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad -7x - 4 = 0$$

$$x = 0 \quad \quad \quad -7x = 4$$

$$x = -\frac{4}{7}$$

$$\text{b) } 6x^2 = x$$

$$6x^2 - x = 0$$

$$x(6x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 6x - 1 = 0$$

$$6x = 1$$

$$x = \frac{1}{6}$$

$$c) \quad x^3 - 16x = 0$$

$$x(x^2 - 16) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = -4 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

$$d) \quad 36x^6 = x^4$$

$$36x^6 - x^4 = 0$$

$$x^4(36x^2 - 1) = 0$$

$$x^4 = 0 \quad \text{tai} \quad 36x^2 - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad 36x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{36}$$

$$x = -\frac{1}{6} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{6}$$

$$\text{Vastaus: a) } x = -\frac{4}{7} \quad \text{tai} \quad x = 0$$

$$\text{b) } x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{6}$$

$$\text{c) } x = -4, x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 4 \quad \text{d) } x = -\frac{1}{6}, x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{6}$$

$$\text{a) } x^3 + 3x^2 - 28x = 0$$

$$x(x^2 + 3x - 28) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-3 \pm 11}{2}$$

$$x = \frac{-3 - 11}{2} = -7 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 + 11}{2} = 4$$

$$\text{b) } 4x^3 - x^2 = 5x$$

$$4x^3 - x^2 - 5x = 0$$

$$x(4x^2 - x - 5) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 4x^2 - x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{1 \pm 9}{8}$$

$$x = \frac{1 - 9}{8} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1 + 9}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Vastaus: a) $x = -7$, $x = 0$ tai $x = 4$ b) $x = -1$, $x = 0$ tai $x = \frac{5}{4}$

300

$$\text{a)} \quad 5x^3 - 3x = 18 - 30x^2$$

$$5x^3 + 30x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$5x^2(x+6) - 3(x+6) = 0$$

$$(5x^2 - 3)(x+6) = 0$$

$$5x^2 - 3 = 0$$

tai

$$x + 6 = 0$$

$$5x^2 = 3$$

$$x = -6$$

$$x^2 = \frac{3}{5}$$

$$x = -\sqrt{\frac{3}{5}} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\text{b)} \quad x^9 - 3x^5 + x^4 - 3 = 0$$

$$x^5(x^4 - 3) + 1 \cdot (x^4 - 3) = 0$$

$$(x^5 + 1)(x^4 - 3) = 0$$

$$x^5 + 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x^4 - 3 = 0$$

$$x^5 = -1 \quad \quad \quad x^4 = 0$$

$$x = -1 \quad \quad \quad x = \sqrt[4]{3} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt[4]{3}$$

$$\text{Vastaus: a) } x = -6, \quad x = -\sqrt{\frac{3}{5}} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad x = 4$$

$$\text{b) } x = -\sqrt[4]{3}, \quad x = -1 \quad \text{tai} \quad x = \sqrt[4]{3}$$

301

$$x^4 + 5x^2 - 6 = 0$$

$$(x^2)^2 + 5x^2 - 6 = 0 \quad \left| \text{ sijoitetaan } x^2 = t \right.$$

$$t^2 + 5t - 6 = 0$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$t = \frac{-5-7}{2} = -6 \quad \text{tai} \quad t = \frac{-5+7}{2} = 1$$

Ratkaistaan muuttuja x .

$$x^2 = -6 \quad \text{tai} \quad x^2 = 1$$

$$\text{ei ratkaisua} \quad x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

Vastaus: $x = -1$ tai $x = 1$

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ | sijoitetaan $x^2 = t$

$$4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$t = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

tai

$$t = \frac{5+3}{8} = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \text{ tai } x = -1$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ tai } x = -\frac{1}{2}$$

b) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ | Sijoitetaan $x^2 = t$.

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$t = \frac{7-1}{2} = 3$$

tai

$$t = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$x^2 = 3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{3} \text{ tai } x = -\sqrt{3}$$

$$x = 2 \text{ tai } x = -2$$

c) $x^4 + 6x^2 + 16 = 0$ | Sijoitetaan $x^2 = t$.

$$t^2 + 6t + 16 = 0$$

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{-28}}{2}$$

Ei ratkaisua.

Vastaus: a) $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ tai $x = 1$

b) $x = -2$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ tai $x = 2$

c) ei ratkaisua

a) Luvun x neljäs potenssi: x^4

Luvun x neliö: x^2

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x^4 = 3x^2$$

$$x = -\sqrt{3}, \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{3}$$

b) Luvun x viides potenssi: x^5

Luvun x kuutio: x^3

Luvun x kuution ja itse luvun keskiarvo: $\frac{x^3 + x}{2}$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x^5 = \frac{x^3 + x}{2}$$

$$x = -1, \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Vastaus: a) Luvut $\sqrt{3}$, 0 ja $\sqrt{3}$

b) Luvut -1 , 0 ja 1

Merkitään ensimmäistä lukua kirjaimella x . Kaksi seuraavaa kokonaislukua ovat $x + 1$ ja $x + 2$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x(x+1)(x+2) = x + (x+1) + (x+2)$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 3x + 3$$

$$x = -3, \quad x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Koska ensimmäisen luvun täytyy olla positiivinen, on $x = 1$.
Siis luvut ovat 1, 2 ja 3.

Vastaus: Luvut 1, 2 ja 3.

HUOM:

Yhtälöä ei välttämättä tarvitse sieventää ennen ratkaisemista.

- a) Aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenien erotus on vakio.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$(x^2 + 1) - x = x^3 - (x^2 + 1)$$

$$x^2 + 1 - x = x^3 - x^2 - 1$$

$$-x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$x = 2$$

- b) Geometrisen jonon peräkkäisten jäsenien suhde on vakio.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{x^3 + 3}{x^2 + 1}$$

$$x(x^3 + 3) = (x^2 + 1)^2$$

$$x^4 + 3x = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x = \frac{1}{2}$ tai $x = 1$

HUOM:

Yhtälöä ei välttämättä tarvitse sieventää ennen ratkaisemista.

Määritetään lukujonon 4 ensimmäisen jäsenen lausekkeet.

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = q \cdot 6 - 3 = 6q - 3$$

$$a_3 = q \cdot (6q - 3) - 3 = 6q^2 - 3q - 3$$

$$a_4 = q \cdot (6q^2 - 3q - 3) - 3 = 6q^3 - 3q^2 - 3q - 3$$

Toisaalta $a_4 = -3$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$6q^3 - 3q^2 - 3q - 3 = -3$$

$$6q^3 - 3q^2 - 3q = 0$$

$$q = -\frac{1}{2}, \quad q = 0 \quad \text{tai} \quad q = 1$$

Ratkaistaan jokaista q :n arvoa vastaava jonon 5. jäsen.

$$q = -\frac{1}{2}: \quad a_5 = -\frac{1}{2} \cdot (-3) - 3 = -\frac{3}{2}$$

$$q = 0: \quad a_5 = 0 \cdot (-3) - 3 = -3$$

$$q = 1: \quad a_5 = 1 \cdot (-3) - 3 = -6$$

Vastaus: $q = -\frac{1}{2}, \quad a_5 = -\frac{3}{2}$

$$q = 0, \quad a_5 = -3$$

$$q = 1, \quad a_5 = -6$$

Määritetään lukujonon 4 ensimmäisen jäsenen lausekkeet.

$$a_1 = -12,6$$

$$a_2 = q^2 \cdot (-12,6) + 5,2 = -12,6q^2 + 5,2$$

$$a_3 = q^2 \cdot (-12,6q^2 + 5,2) + 5,2 = -12,6q^4 + 5,2q^2 + 5,2$$

$$a_4 = q^2 \cdot (-12,6q^4 + 5,2q^2 + 5,2) + 5,2 = -12,6q^6 + 5,2q^4 + 5,2q^2 + 5,2$$

Toisaalta $a_4 = 5,2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$-12,6q^6 + 5,2q^4 + 5,2q^2 + 5,2 = 5,2$$

$$-12,6q^6 + 5,2q^4 + 5,2q^2 = 0$$

$$q = -0,9386... \approx -0,94, \quad q = 0 \quad \text{tai} \quad q = 0,9386... \approx 0,94$$

Vastaus: $q \approx -0,94, \quad q = 0 \quad \text{tai} \quad q \approx 0,94$

$$36x^3 + ax^2 + 16x = 0$$

$$x(36x^2 + ax + 16) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 36x^2 + ax + 16 = 0$$

Koska $x = 0$ on aina yhtälön juuri, niin yhtälöllä on tasan kaksi juurta, kun toisen asteen yhtälöllä $36x^2 + ax + 16 = 0$ on tasan yksi juuri ($x = 0$ ei ole yhtälön $36x^2 + ax + 16 = 0$ juuri millään a :n arvolla).

Muodostetaan diskriminantin lauseke.

$$D = a^2 - 4 \cdot 36 \cdot 16 = a^2 - 2304$$

Toisen asteen yhtälöllä on tasan yksi juuri, kun $D = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$a^2 - 2304 = 0$$

$$a = -48 \quad \text{tai} \quad a = 48$$

Muodostetaan saatuja a :n arvoja vastaavat yhtälöt ja ratkaistaan juuret.

$$a = -48: \quad 36x^2 - 48x + 16 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2}{3}$$

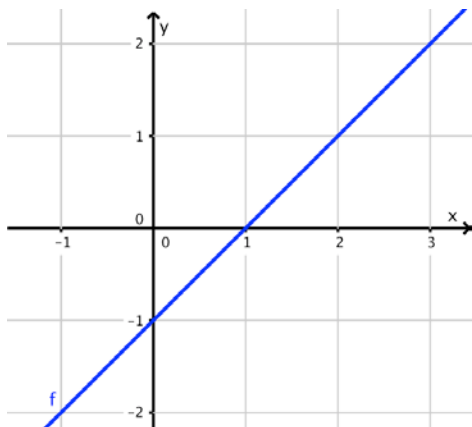
$$a = 48: \quad 36x^2 + 48x + 16 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2}{3}$$

Vastaus: Kun $a = -48$ juuret ovat $x = 0$ tai $x = \frac{2}{3}$.

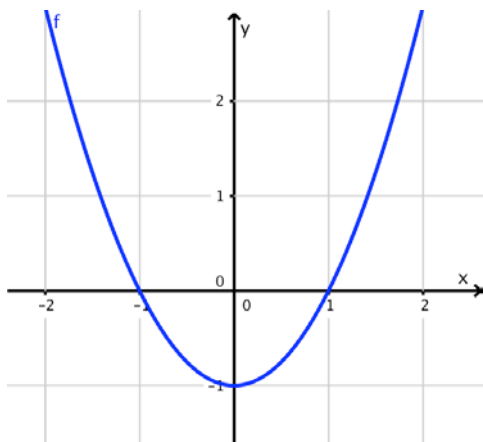
Kun $a = 48$, $x = -\frac{2}{3}$ tai $x = 0$.

a)



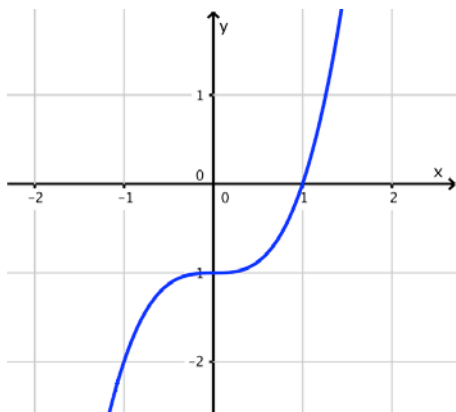
Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x > 1$.

b)



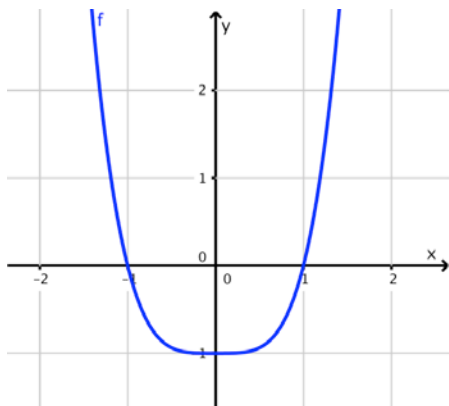
Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

c)



Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x > 1$.

d)



Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

Vastaus:

a) $x > 1$

b) $x < -1$ tai $x > 1$

c) $x > 1$

d) $x < -1$ tai $x > 1$

a)



Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $-1 < x < 0$ tai $x > 3$.

b)



Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $-2 < x < -1$ tai $0 < x < 2$.

Vastaus: a) $-1 < x < 0$ tai $x > 3$ b) $-2 < x < -1$ tai $0 < x < 2$

a) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$x^3 + x^2 - 6x > 0$$

$$x(x^2 + x - 6) > 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x :

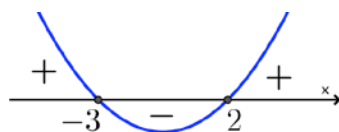
Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

Tekijä $x^2 + x - 6$: Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+5}{2} = 2$$



Laaditaan polynomifunktion $x^3 + x^2 - 6x$ merkkikaavio.

x	—	—	+	+
$x^2 + x - 6$	+	—	—	+
$x(x^2 + x - 6)$	—	+	—	+
	—3	0	2	

Epäyhtälö $x^3 + x^2 - 6x > 0$ toteutuu, kun $-3 < x < 0$ tai $x > 2$.

b) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

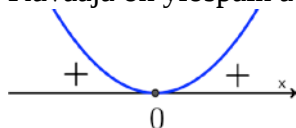
$$x^3 - 5x^2 > 0$$

$$x^2(x - 5) > 0$$

Tekijä x^2 :

Nollakohta $x = 0$.

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

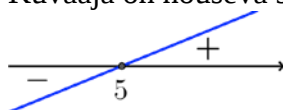


Tekijä $x - 5$:

$$x - 5 = 0$$

Kuvaaja on nouseva suora.

$$x = 5$$



Laaditaan polynomifunktion $x^3 - 5x^2$ merkkikaavio.

x^2	+	+	+
$x - 5$	-	-	+
$x^2(x - 5)$	-	-	+
	0	5	

Epäyhtälö $x^3 - 5x^2 > 0$ toteutuu, kun $x > 5$.

Vastaus: a) $-3 < x < 0$ tai $x > 2$ b) $x > 5$

a) Muodostetaan epäyhtälö ja jaetaan vasen puoli tekijöihin.

$$x^3 + 7x^2 - 8x < 0$$

$$x(x^2 + 7x - 8) < 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x :

Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

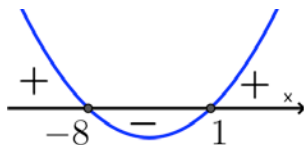
Tekijä $x^2 + 7x - 8$:

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 9}{2}$$

$$x = \frac{-7 - 9}{2} = -8 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-7 + 9}{2} = 1$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Laaditaan polynomifunktion $x^3 + 7x^2 - 8x$ merkkikaavio.

x	-	-	+	+
$x^2 + 7x - 8$	+	-	-	+
$x(x^2 + 7x - 8)$	-	+	-	+
	-8	0	1	

Epäyhtälö $x^3 + 7x^2 - 8x < 0$ toteutuu, kun $x < -8$ tai $0 < x < 1$.

b) Muodostetaan epähtälö ja jaetaan vasen puoli tekijöihin.

$$-3x^4 + 12x^2 < 0$$

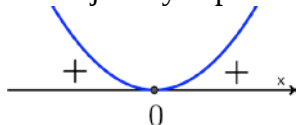
$$3x^2(-x^2 + 4) < 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä $3x^2$:

Nollakohta $x = 0$.

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



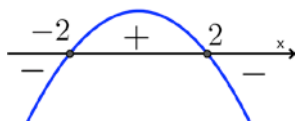
Tekijä $-x^2 + 4$:

$$-x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Laaditaan polynomifunktion $-3x^4 + 12x^2$ merkkikaavio.

$3x^2$	+	+	+	+
$-x^2 + 4$	-	+	+	-
$3x^2(-x^2 + 4)$	-	+	+	-
	-2	0	2	

Epähtälö $-3x^4 + 12x^2 < 0$ toteutuu, kun $x < -2$ tai $x > 2$.

Vastaus: a) $x < -8$ tai $0 < x < 1$ b) $x < -2$ tai $x > 2$

313

- a) Siirretään epäyhtälön termit vasemmalle puolelle ja jaetaan vasen puoli tekijöihin.

$$8x^3 - 2x^2 > x$$

$$8x^3 - 2x^2 - x > 0$$

$$x(8x^2 - 2x - 1) > 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x :

Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

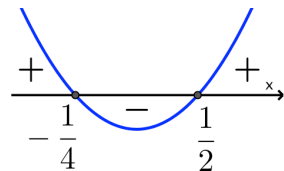
Tekijä $8x^2 - 2x - 1$:

$$8x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)}}{2 \cdot 8} = \frac{2 \pm 6}{16}$$

$$x = \frac{2-6}{16} = -\frac{1}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{2+6}{16} = \frac{1}{2}$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Laaditaan polynomifunktion $8x^3 - 2x^2 - x$ merkkikaavio.

x	—	—	+	+
$8x^2 - 2x - 1$	+	—	—	+
$x(8x^2 - 2x - 1)$	—	+	—	+
	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	

Epäyhtälö $8x^3 - 2x^2 - x > 0$ toteutuu, kun $-\frac{1}{4} < x < 0$ tai $x > \frac{1}{2}$.

b) Siirretään epäyhtälön termit vasemmalle puolelle ja jaetaan vasen puoli tekijöihin.

$$x^4 + 2x^3 \geq -x^2$$

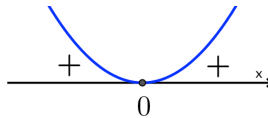
$$x^4 + 2x^3 + x^2 \geq 0$$

$$x^2(x^2 + 2x + 1) \geq 0$$

Tekijä x^2 :

Nollakohta $x = 0$.

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Tekijä $x^2 + 2x + 1$:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-2}{2} = -1$$

Laaditaan polynomifunktion $x^4 + 2x^3 + x^2$ merkkikaavio.

x^2	+	+	+
$x^2 + 2x + 1$	+	+	+
$x^2(x^2 + 2x + 1)$	+	+	+
	-1	0	

x 

Epäyhtälö $x^4 + 2x^3 + x^2 \geq 0$ toteutuu kaikilla x :n arvoilla.

Vastaus: a) $-\frac{1}{4} < x < 0$ tai $x > \frac{1}{2}$

b) Epäyhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla.

a) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$-x^3 + 3x^2 + 4x - 12 > 0$$

$$-x^2(x-3) + 4(x-3) > 0$$

$$(-x^2 + 4)(x-3) > 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

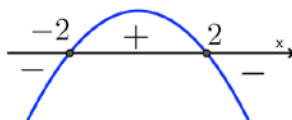
Tekijä $-x^2 + 4$:

$$-x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

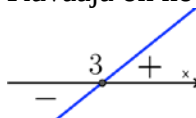


Tekijä $x - 3$:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Kuvaaja on nouseva suora.



Laaditaan polynomifunktion $-x^3 + 3x^2 + 4x - 12$ merkkikaavio.

$-x^2 + 4$	-	+	-	-
$x - 3$	-	-	-	+
$(-x^2 + 4)(x - 3)$	+	-	+	-
	-2	2	3	

x →

Epäyhtälö $-x^3 + 3x^2 + 4x - 12 > 0$ toteutuu, kun
 $x < -2$ tai $2 < x < 3$.

b) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$2x^3 + 6x^2 < 2x + 6$$

$$2x^3 + 6x^2 - 2x - 6 < 0$$

$$2x^2(x+3) - 2(x+3) < 0$$

$$(2x^2 - 2)(x+3) < 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

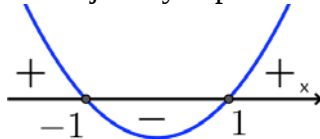
Tekijä $2x^2 - 2$:

$$2x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

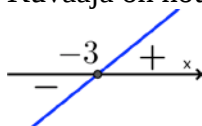


Tekijä $x + 3$:

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Kuvaaja on nouseva suora.



Laaditaan polynomifunktion $2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$ merkkikaavio.

$2x^2 - 2$	+	+	-	+
$x + 3$	-	+	+	+
$(2x^2 - 2)(x + 3)$	-	+	-	+
	-3	-1	1	

Epäyhtälö $2x^3 + 6x^2 - 2x - 6 < 0$ toteutuu,
kun $x < -3$ tai $-1 < x < 1$.

Vastaus: a) $x < -2$ tai $2 < x < 3$ b) $x < -3$ tai $-1 < x < 1$

a) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$x^3 - 6x^2 \leq 3x - 18$$

$$x^3 - 6x^2 - 3x + 18 \leq 0$$

$$x^2(x - 6) - 3(x - 6) \leq 0$$

$$(x^2 - 3)(x - 6) \leq 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

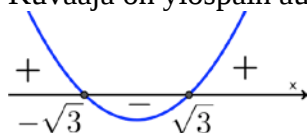
Tekijä $x^2 - 3$:

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

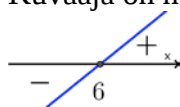


Tekijä $x - 6$:

$$x - 6 = 0$$

$$x = 6$$

Kuvaaja on nouseva suora.



Laaditaan polynomifunktion $x^3 - 6x^2 - 3x + 18$ merkkikaavio.

$x^2 - 3$	+	-	+	+
$x - 6$	-	-	-	+
$(x^2 - 3)(x - 6)$	-	+	-	+
	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	6	

Epäyhtälö $x^3 - 6x^2 - 3x + 18 \leq 0$ toteutuu,

kun $x \leq -\sqrt{3}$ tai $\sqrt{3} \leq x \leq 6$

b) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$5x^3 + 5x \geq 6x^2 + 6$$

$$5x^3 - 6x^2 + 5x - 6 \geq 0$$

$$x^2(5x - 6) + 1 \cdot (5x - 6) \geq 0$$

$$(x^2 + 1)(5x - 6) \geq 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

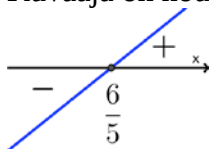
Tekijä $x^2 + 1 > 0$ aina.

Tekijä $5x - 6$:

$$5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{6}{5}$$

Kuvaaja on nouseva suora.



Laaditaan polynomifunktion $5x^3 - 6x^2 + 5x - 6$ merkkikaavio.

$x^2 + 1$	+	+
$5x - 6$	-	+
$(x^2 + 1)(5x - 6)$	-	+
	$\frac{6}{5}$	

Epäyhtälö $5x^3 - 6x^2 + 5x - 6 \geq 0$ toteutuu, $x \geq \frac{6}{5}$.

Vastaus: a) $x \leq -\sqrt{3}$ tai $\sqrt{3} \leq x \leq 6$

b) $x \geq \frac{6}{5}$

a) Ratkaistaan funktion $f(x) = x^4 + 8x$ nollakohdat.

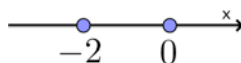
$$x^4 + 8x = 0$$

$$x(x^3 + 8) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^3 + 8 = 0$$

$$x^3 = -8$$

$$x = \sqrt[3]{-8} = -2$$



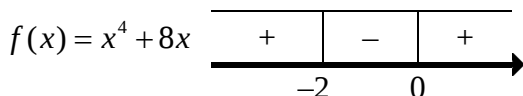
Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion f arvo.

$$f(-10) = (-10)^4 + 8 \cdot (-10) = 10\,000 - 80 = 9920 > 0$$

$$f(-1) = (-1)^4 + 8 \cdot (-1) = 1 - 8 = -6 < 0$$

$$f(1) = 1^4 + 8 \cdot 1 = 9 > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.



Epäyhtälö $x^4 + 8x < 0$ toteutuu, kun $-2 < x < 0$.

b) Ratkaistaan funktion $g(x) = x^5 - 3x^4$ nollakohdat.

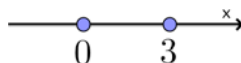
$$x^5 - 3x^4 = 0$$

$$x^4(x - 3) = 0$$

$$x^4 = 0 \quad \text{tai} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 3$$



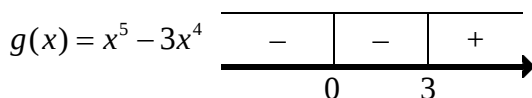
Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion g arvo.

$$g(-1) = (-1)^5 - 3 \cdot (-1)^4 = -1 - 3 = -4 < 0$$

$$g(1) = 1^5 - 3 \cdot 1^4 = 1 - 3 = -2 < 0$$

$$g(10) = 10^5 - 3 \cdot 10^4 = 100\,000 - 30\,000 = 70\,000 > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.



Epäyhtälö $x^5 - 3x^4 < 0$ toteutuu, kun $x < 0$ tai $0 < x < 3$.

c) Ratkaistaan funktion $h(x) = x^6 - 9x^4$ nollakohdat.

$$x^6 - 9x^4 = 0$$

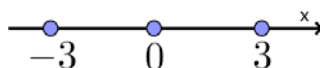
$$x^4(x^2 - 9) = 0$$

$$x^4 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 9 = 0$$

$$x = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$



Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion h arvo.

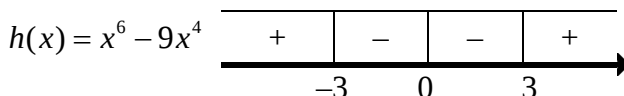
$$h(-10) = (-10)^6 - 9 \cdot (-10)^4 = 1\,000\,000 - 90\,000 = 910\,000 > 0$$

$$h(-1) = (-1)^6 - 9 \cdot (-1)^4 = 1 - 9 = -8 < 0$$

$$h(1) = 1^6 - 9 \cdot 1^4 = 1 - 9 = -8 < 0$$

$$h(10) = 10^6 - 9 \cdot 10^4 = 1\,000\,000 - 90\,000 = 910\,000 > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.



Epäyhtälö $x^6 - 9x^4 > 0$ toteutuu, kun $x < -3$ tai $x > 3$.

Vastaus: a) $-2 < x < 0$ b) $x < 0$ tai $0 < x < 3$ c) $x < -3$ tai $x > 3$

317

Luvun x kuutio: x^3

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x^3 > x$$

$$x^3 - x > 0$$

$$-1 < x < 0 \quad \text{tai} \quad x > 1$$

Vastaus: Luvut, jotka toteuttavat ehdon $-1 < x < 0$ tai $x > 1$.

Luvun x kuutio: x^3

Luvun x neliö: x^2

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x^3 < x^2$$

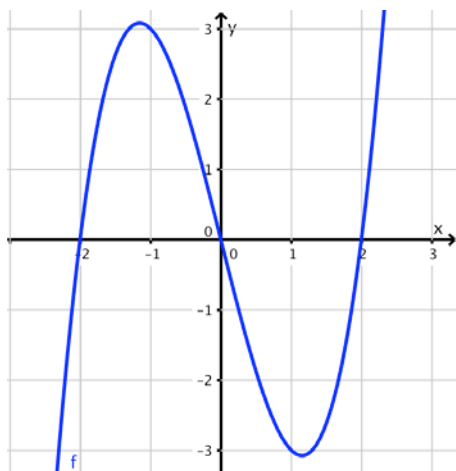
$$x^3 - x^2 < 0$$

$$x < 0 \quad \text{tai} \quad 0 < x < 1$$

Vastaus: Luvut, jotka toteuttavat ehdon $x < 0$ tai $0 < x < 1$.

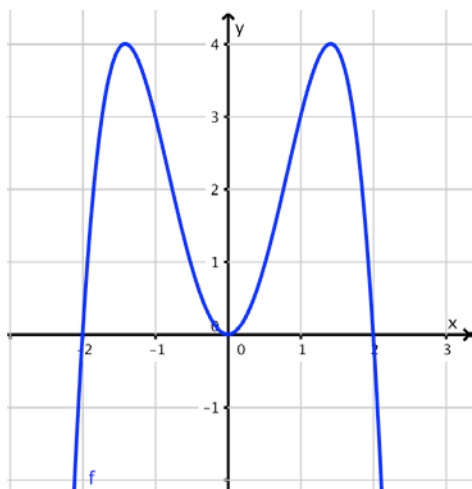
319

a)



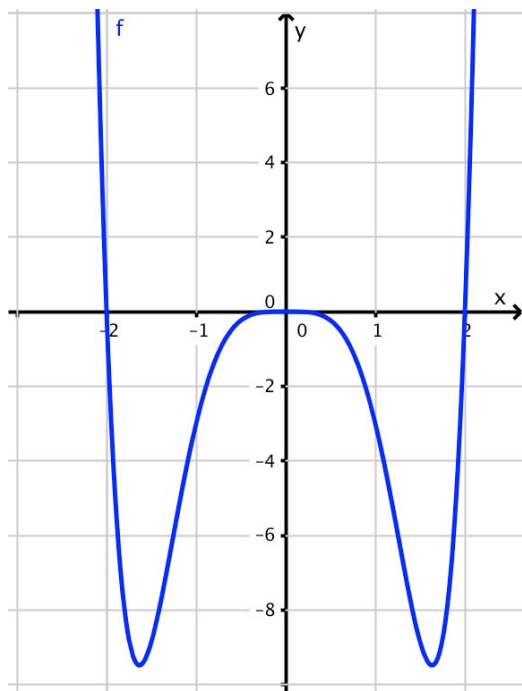
Funktion arvot ovat epänegatiivisia, kun $-2 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 2$.

b)



Funktion arvot ovat epänegatiivisia, kun $-2 \leq x \leq 2$.

c)



Funktion arvot ovat epänegatiivisia, kun $x \leq -2$, $x = 0$ tai $x \geq 2$.

Vastaus: a) $-2 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 2$
b) $-2 \leq x \leq 2$
c) $x \leq -2$, $x = 0$ tai $x \geq 2$

320

a) Muodostetaan epäyhtälö ja jaetaan vasen puoli tekijöihin.

$$2x^3 - 9x^2 - 11x < 0$$

$$x(2x^2 - 9x - 11) < 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x :

Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

Tekijä $2x^2 - 9x - 11$:

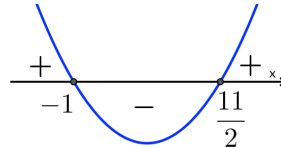
$$2x^2 - 9x - 11 = 0$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-11)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{9 \pm 13}{4}$$

$$x = \frac{9-13}{4} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{9+13}{4} = \frac{11}{2}$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Laaditaan polynomifunktion $2x^3 - 9x^2 - 11x$ merkkikaavio.

x	-	-	+	+
$2x^2 - 9x - 11$	+	-	-	+
$x(2x^2 - 9x - 11)$	-	+	-	+
	-1	0	$\frac{11}{2}$	

Epäyhtälö $2x^3 - 9x^2 - 11x < 0$ toteutuu,

kun $x < -1$ tai $0 < x < \frac{11}{2}$

b) Muodostetaan epäyhtälö ja jaetaan vasen puoli tekijöihin.

$$x^4 - 5x^3 < 0$$

$$x^3(x - 5) < 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x^3 :

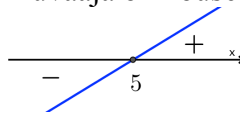
Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

Tekijä $x - 5$:

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

Kuvaaja on nouseva suora.



Laaditaan polynomifunktion $x^4 - 5x^3$ merkkikaavio.

x^3	—	+	+
$x - 5$	—	—	+
$x^3(x - 5)$	+	—	+
	0	5	

Epäyhtälö $x^4 - 5x^3 < 0$ toteutuu, kun $0 < x < 5$.

Vastaus: a) $x < -1$ tai $0 < x < \frac{11}{2}$

b) $0 < x < 5$

a) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$x^5 - 8x^2 \geq 0$$

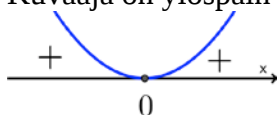
$$x^2(x^3 - 8) \geq 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x^2 :

Nollakohta on $x = 0$.

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



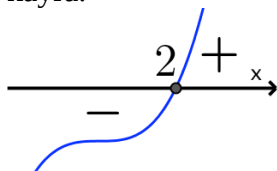
Tekijä $x^3 - 8$:

Kuvaaja on nouseva kolmannen asteen käyrä.

$$x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$



Laaditaan polynomifunktion $x^5 - 8x^2$ merkkikaavio.

x^2	+	+	+
$x^3 - 8$	-	-	+
$x(x^3 - 8)$	-	-	+
	0	2	

Epäyhtälö $x^5 - 8x^2 \geq 0$ toteutuu, kun $x = 0$ tai $x \geq 2$.

b) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$2x^2 + 9x \geq x^3$$

$$-x^3 + 2x^2 + 9x \geq 0$$

$$x(-x^2 + 2x + 9) \geq 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x :

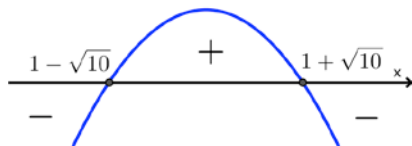
Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

Tekijä $-x^2 + 2x + 9$:

$$-x^2 + 2x + 9 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 9}}{2 \cdot (-1)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 10}}{-2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{-2} = 1 \pm \sqrt{10} \end{aligned}$$

Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Laaditaan polynomifunktion $x^4 - 5x^3$ merkkikaavio.

x	—	—	+	+
$-x^2 + 2x + 9$	—	+	+	—
$x^3(x - 5)$	+	—	+	—
	$1 - \sqrt{10}$	0	$1 + \sqrt{10}$	

Epäyhtälö $-x^3 + 2x^2 + 9x \geq 0$ toteutuu,
kun $x \leq 1 - \sqrt{10}$ tai $0 \leq x \leq 1 + \sqrt{10}$.

Vastaus: a) $x = 0$ tai $x \geq 2$
b) $x \leq 1 - \sqrt{10}$ tai $0 \leq x \leq 1 + \sqrt{10}$

a) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$-x^3 + 7x^2 + 18x \leq 0$$

$$x(-x^2 + 7x + 18) \leq 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x :

Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

Tekijä $-x^2 + 7x + 18$:

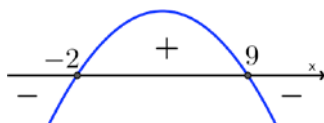
$$-x^2 + 7x + 18 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 18}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{-2} = \frac{-7 \pm 11}{-2}$$

$$x = \frac{-7 - 11}{-2} = 9 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-7 + 11}{-2} = -2$$

Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Laaditaan polynomifunktion $-x^3 + 7x^2 + 18x$ merkkikaavio.

x	—	—	+	+
$-x^2 + 7x + 18$	—	+	+	—
$x(-x^2 + 7x + 18)$	+	—	+	—
	—2	0	9	

Epäyhtälö $-x^3 + 7x^2 + 18x \leq 0$ toteutuu, kun $-2 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 9$.

b) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$x^7 - 25x^5 > 0$$

$$x^5(x^2 - 25) > 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x^5 :

Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

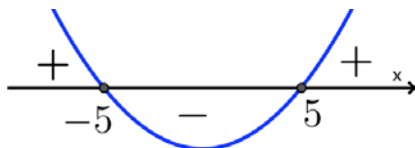
Tekijä $x^2 - 25$:

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$



Laaditaan polynomifunktion $x^7 - 25x^5$ merkkikaavio.

x^5	-	-	+	+
$x^2 - 25$	+	-	-	+
$x^5(x^2 - 25)$	-	+	-	+
	-5	0	5	

Epäyhtälö $x^7 - 25x^5 > 0$ toteutuu, kun $-5 < x < 0$ tai $x > 5$.

b-kohta toisin:

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^7 - 25x^5$ nollakohdat.

$$x^7 - 25x^5 = 0$$

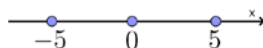
$$x^5(x^2 - 25) = 0$$

$$x^5 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 25 = 0$$

$$x = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \quad \text{tai} \quad x = -5$$



Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion f arvo.

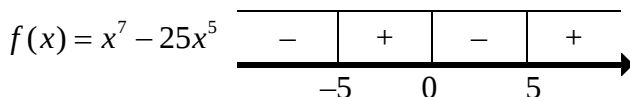
$$f(-10) = (-10)^7 - 25 \cdot (-10)^5 = -10\,000\,000 + 2\,500\,000 = -7\,500\,000 < 0$$

$$f(-1) = (-1)^7 - 25 \cdot (-1)^5 = -1 + 25 = 24 > 0$$

$$f(1) = 1^7 - 25 \cdot 1^5 = 1 - 25 = -24 < 0$$

$$f(10) = 10^7 - 25 \cdot 10^5 = 10\,000\,000 - 2\,500\,000 = 7\,500\,000 > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.



Epäyhtälö $x^7 - 25x^5 > 0$ toteutuu, kun $-5 < x < 0$ tai $x > 5$.

Vastaus: a) $-2 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 9$ b) $-5 < x < 0$ tai $x > 5$

a) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$9x^3 - 45x^2 < x - 5$$

$$9x^3 - 45x^2 - x + 5 < 0$$

$$9x^2(x - 5) - 1 \cdot (x - 5) < 0$$

$$(9x^2 - 1)(x - 5) < 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

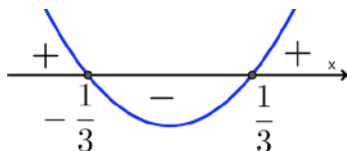
Tekijä $9x^2 - 1$:

$$9x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{9}$$

$$x = \pm \frac{1}{3}$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

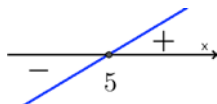


Tekijä $x - 5$:

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

Kuvaaja on nouseva suora.



Laaditaan polynomifunktion $9x^3 - 45x^2 - x + 5$ merkkikaavio.

$9x^2 - 1$	+	-	+	+
$x - 5$	-	-	-	+
$(9x^2 - 1)(x - 5)$	-	+	-	+
	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	5	

Epäyhtälö $9x^3 - 45x^2 - x + 5 < 0$ toteutuu,

kun $x < -\frac{1}{3}$ tai $\frac{1}{3} < x < 5$.

b) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$3x^4 - 18x^3 - 3x + 18 \geq 0$$

$$3x^3(x-6) - 3(x-6) \geq 0$$

$$(3x^3 - 3)(x-6) \geq 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

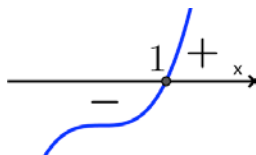
Tekijä $3x^3 - 3$: Kuvaaja on nouseva kolmannen asteen käyrä.

$$3x^3 - 3 = 0$$

$$3x^3 = 3$$

$$x^3 = 1$$

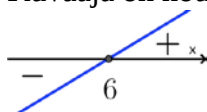
$$x = 1$$



Tekijä $x - 6$: Kuvaaja on nouseva suora.

$$x - 6 = 0$$

$$x = 6$$



Laaditaan polynomifunktion $3x^4 - 18x^3 - 3x + 18$ merkkikaavio.

$3x^3 - 3$	-	+	+
$x - 6$	-	-	+
$(3x^3 - 3)(x - 6)$	+	-	+
	1	6	

Epäyhtälö $3x^4 - 18x^3 - 3x + 18 \geq 0$ toteutuu, kun $x \leq 1$ tai $x \geq 6$.

Vastaus: a) $x < -\frac{1}{3}$ tai $\frac{1}{3} < x < 5$ b) $x \leq 1$ tai $x \geq 6$

324

a) $(x-10)(x^2-9)(x^3-8)=0$

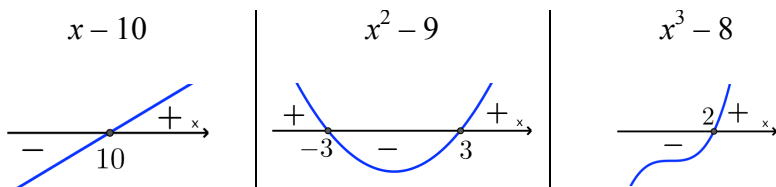
$$x-10=0 \quad \text{tai} \quad x^2-9=0 \quad \text{tai} \quad x^3-8=0$$

$$x=10 \quad \quad \quad x^2=9 \quad \quad \quad x^3=8$$

$$x=3 \quad \text{tai} \quad x=-3 \quad \quad \quad x=\sqrt[3]{8}=2$$

Siis $x=-3$, $x=2$, $x=3$ tai $x=10$.

b) Päättellään tekijöiden merkit hahmottelemalla niiden kuvaajat.



Laaditaan funktion $(x-10)(x^2-9)(x^3-8)$ merkkikaavio.

$x-10$	-	-	-	-	+
x^2-9	+	-	-	+	+
x^3-8	-	-	+	+	+
$(x-10)(x^2-9)(x^3-8)$	+	-	+	-	+
	-3	2	3	10	

Epäyhtälö $(x-10)(x^2-9)(x^3-8) < 0$ toteutuu,
kun $-3 < x < 2$ tai $3 < x < 10$.

Vastaus: a) $x=-3$, $x=2$, $x=3$ tai $x=10$
b) $-3 < x < 2$ tai $3 < x < 10$

325

a) $x^2(3x^2 + x - 2) = 3x^2 + x - 2$

$$x^2(3x^2 + x - 2) - (3x^2 + x - 2) = 0$$

$$(x^2 - 1)(3x^2 + x - 2) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad 3x^2 + x - 2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

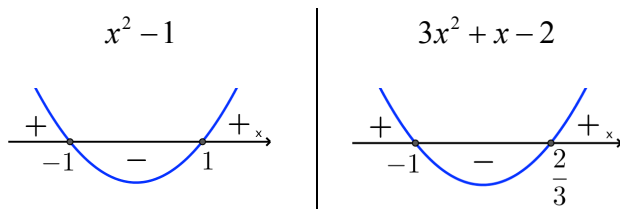
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

$$x = \frac{-1 - 5}{6} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{2}{3}$$

Siis $x = -1$, $x = \frac{2}{3}$ tai $x = 1$.

b) Epäyhtälö $x^2(3x^2 + x - 2) > 3x^2 + x - 2$ on yhtä pitävä epäyhtälön $(x^2 - 1)(3x^2 + x - 2) > 0$ kanssa a-kohdan perusteella.

Päätellään tekijöiden merkit hahmottelemalla niiden kuvaajat.



Laaditaan funktion $(x^2 - 1)(3x^2 + x - 2)$ merkkikaavio.

$x^2 - 1$	+	-	-	+
$3x^2 + x - 2$	+	-	+	+
$(x^2 - 1)(3x^2 + x - 2)$	+	+	-	+
	-1	$\frac{2}{3}$	1	

Epäyhtälö $(x^2 - 1)(3x^2 + x - 2) > 0$ toteutuu,

kun $x < -1$, $-1 < x < \frac{2}{3}$ tai $x > 1$.

Vastaus: a) $x = -1$, $x = \frac{2}{3}$ tai $x = 1$

b) $x < -1$ tai $-1 < x < \frac{2}{3}$ tai $x > 1$

326

a) Ratkaistaan funktion $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ nollakohdat.

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \left| \text{sijoitetaan } x^2 = t \right.$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

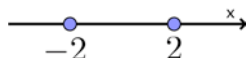
$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$t = \frac{3-5}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad t = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$x^2 = -1 \quad \text{tai} \quad x^2 = 4$$

ei ratkaisua

$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = -2$$



Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion f arvo.

$$f(-10) = (-10)^4 - 3 \cdot (-10)^2 - 4 = 10\,000 - 300 - 4 = 9696 > 0$$

$$f(0) = 0^4 - 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0$$

$$f(10) = 10^4 - 3 \cdot 10^2 - 4 = 10\,000 - 300 - 4 = 9696 > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & - & + \\ \hline \end{array}$$

-2 2

Epäyhtälö $x^4 - 3x^2 - 4 > 0$ toteutuu, kun $x < -2$ tai $x > 2$.

b) Ratkaistaan funktion $g(x) = 3x^4 - 5x^2 - 2$ nollakohdat.

$$3x^4 - 5x^2 - 2 = 0 \quad \left| \text{sijoitetaan } x^2 = t \right.$$

$$3t^2 - 5t - 2 = 0$$

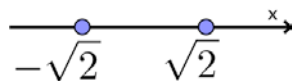
$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

$$t = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad t = \frac{5+7}{6} = 2$$

$$x^2 = -\frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x^2 = 2$$

ei ratkaisua

$$x = \sqrt{2} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{2}$$



Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion g arvo.

$$g(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^2 - 2 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot 4 - 2 = 48 - 20 - 2 = 26 > 0$$

$$g(0) = 3 \cdot 0^4 - 5 \cdot 0^2 - 2 = -2 < 0$$

$$g(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^2 - 2 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot 4 - 2 = 48 - 20 - 2 = 26 > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.

$$g(x) = 3x^4 - 5x^2 - 2 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & - & + \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ -\sqrt{2} \qquad \sqrt{2} \end{array}$$

Epäyhtälö $3x^4 - 5x^2 - 2 \leq 0$ toteutuu, kun $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

c) Ratkaistaan funktion $h(x) = x^6 - 2x^4 - 3x^2$ nollakohdat.

$$x^6 - 2x^4 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x^4 - 2x^2 - 3) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \quad \left| \text{sijoitetaan } x = t^2 \right.$$

$$x = 0 \quad t^2 - 2t - 3 = 0$$

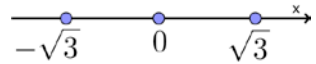
$$t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$t = \frac{2-4}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad t = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$x^2 = -1 \quad \text{tai} \quad x^2 = 3$$

$$\text{ei ratkaisua} \quad x = \sqrt{3} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{3}$$

Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion h arvo.



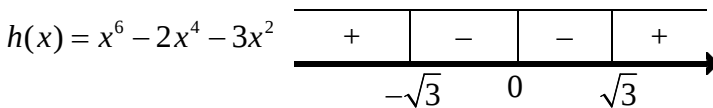
$$\begin{aligned} h(-10) &= (-10)^6 - 2 \cdot (-10)^4 - 3 \cdot (-10)^2 \\ &= 1\,000\,000 - 20\,000 - 300 = 979\,700 > 0 \end{aligned}$$

$$h(-1) = (-1)^6 - 2 \cdot (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^2 = 1 - 2 - 3 = -4 < 0$$

$$h(1) = 1^6 - 2 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 = 1 - 2 - 3 = -4 < 0$$

$$\begin{aligned} h(10) &= 10^6 - 2 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^2 \\ &= 1\,000\,000 - 20\,000 - 300 = 979\,700 > 0 \end{aligned}$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.



Epäyhtälö $x^6 - 2x^4 - 3x^2 < 0$ toteutuu, kun
 $-\sqrt{3} < x < 0$ tai $0 < x < \sqrt{3}$

- Vastaus:
- a) $x < -2$ tai $x > 2$
 - b) $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$
 - c) $-\sqrt{3} < x < 0$ tai $0 < x < \sqrt{3}$

Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt laskimella.

$$4x^2 - 1 < 0$$

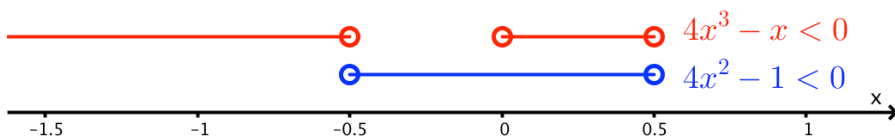
$$4x^3 - x < 0$$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$x < -\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad 0 < x < \frac{1}{2}$$

Esimerkiksi luku $x = -\frac{1}{4}$ toteuttaa epäyhtälön $4x^2 - 1 < 0$ mutta ei toteuta epäyhtälöä $4x^3 - x < 0$. Siis kaikki epäyhtälön $4x^2 - 1 < 0$ ratkaisut eivät toteuta epäyhtälöä $4x^3 - x < 0$.

Tilannetta voidaan havainnollistaa piirtämällä epäyhtälöiden ratkaisujoukot lukusuoralle näkyviin.



Vastaus: Eivät toteuta

Kirjoitetaan lukujonon kolmen ensimmäisen jäsenen lausekkeet.

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = k^2 \cdot (-2) + 1 = -2k^2 + 1$$

$$a_3 = k^2(-2k^2 + 1) + 1 = -2k^3 + k^2 + 1$$

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan millä kertoimen k arvoilla kolmas jäsen on positiivinen.

$$a_3 > 0$$

$$-2k^3 + k^2 + 1 > 0$$

$$-1 < k < 1$$

Vastaus: $-1 < k < 1$

Kirjoitetaan lukujonon kolmen ensimmäisen jäsenen lausekkeet.

$$a_1 = k$$

$$a_2 = k$$

$$a_3 = \frac{a_2^3 + a_1^2}{2} = \frac{k^3 + k^2}{2}$$

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$a_3 > k^4$$

$$\frac{k^3 + k^2}{2} > k^4 \quad | \cdot 2$$

$$k^3 + k^2 > 2k^4$$

$$-2k^4 + k^3 + k^2 > 0$$

$$-\frac{1}{2} < k < 0 \quad \text{tai} \quad 0 < k < 1$$

$$\text{Vastaus:} \quad -\frac{1}{2} < k < 0 \quad \text{tai} \quad 0 < k < 1$$

HUOM:

Epäyhtälö ei välttämättä tarvitse sieventää ennen ratkaisemista.

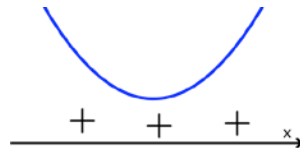
$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 + ax^2 + (a^2 + 1)x \\
 &= x(x^2 + ax + a^2 + 1)
 \end{aligned}$$

Tekijän $x^2 + ax + a^2 + 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Lasketaan toisen asteen polynomifunktion diskriminantti ja päätellään nollakohtien lukumäärä.

$$\begin{aligned}
 D &= b^2 - 4ac && a = 1, \quad b = a \quad \text{ja} \quad c = a^2 + 1 \\
 &= a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 + 1) \\
 &= -3a^2 - 4
 \end{aligned}$$

Koska diskriminantti $-3a^2 - 4 < 0$ kaikilla vakion a arvoilla, polynomilla $x^2 + ax + a^2 + 1$ ei ole yhtään nollakohtaa.

Siten tekijä $x^2 + ax + a^2 + 1$ on aina positiivinen



Koska tekijä $x^2 + ax + a^2 + 1$ on aina positiivinen määrää tekijä x funktion merkin.

Tekijän x arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$. Siten $f(x) < 0$, kun $x < 0$ ja $f(x) > 0$, kun $x > 0$. $\square$

a) Ratkaistaan nollakohdat.

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+5}{2} = 2$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$x^2 + x - 6 = 1 \cdot (x - (-3))(x - 2) = (x + 3)(x - 2)$$

b) Ratkaistaan nollakohdat.

$$x^2 + x - 30 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2}$$

$$x = \frac{-1-11}{2} = -6 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+11}{2} = 5$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$x^2 + x - 30 = 1 \cdot (x - (-6))(x - 5) = (x + 6)(x - 5)$$

c) Ratkaistaan nollakohdat.

$$-3x^2 + 6x - 3 = 0 \quad | :(-3)$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$-3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)(x-1) = -3(x-1)^2$$

Vastaus:

- a) $(x+3)(x-2)$
- b) $(x+6)(x-5)$
- c) $-3(x-1)^2$

a) Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$25x^2 - 20x + 4 = 0$$

$$x = \frac{2}{5}$$

b) Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$25x^2 - 20x + 4 = 25\left(x - \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right)$$

$$= 5^2 \left(x - \frac{2}{5}\right)^2$$

$$= \left(5\left(x - \frac{2}{5}\right)\right)^2$$

$$= (5x - 2)^2$$

Vastaus: a) $x = \frac{2}{5}$ b) $25\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = (5x - 2)^2$

Toisen asteen polynomilla voi olla enintään kaksi nollakohtaa. Polynomin nollakohdat ovat $x_1 = -2$ ja $x_2 = 3$, jos ja vain jos sen tekijät ovat

$$x - x_1 = x - (-2) = x + 2,$$

$$x - x_2 = x - 3.$$

Funktion lauseke on siis muotoa $P(x) = a(x + 2)(x - 3)$, jossa $a \neq 0$.

Ratkaistaan kertoimen a arvo.

$$P(0) = 12$$

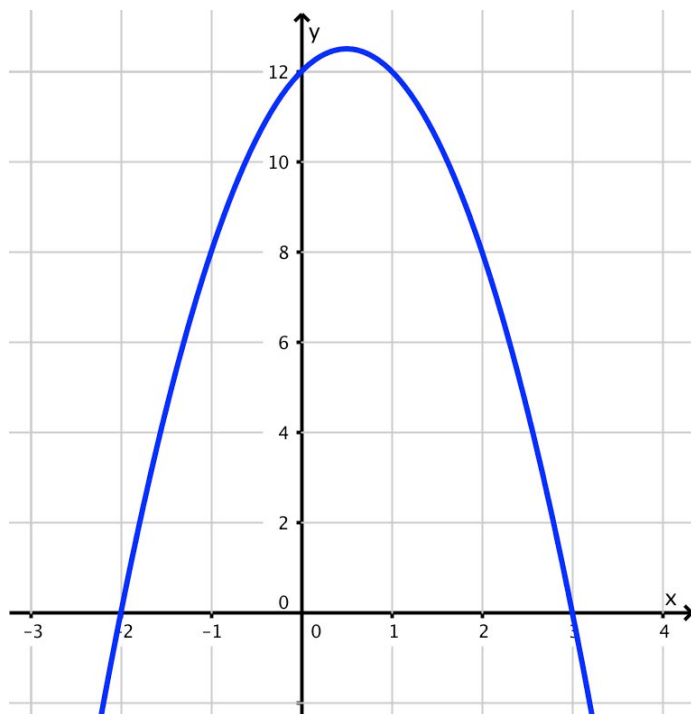
$$a(0 + 2)(0 - 3) = 12$$

$$-6a = 12 \quad | :(-6)$$

$$a = -2$$

Siiis $P(x) = -2(x + 2)(x - 3)$.

Kuvaaja:



Vastaus: $-2(x + 2)(x - 3)$

Toisen asteen polynomiyhtälöllä voi olla enintään kaksi juurta.

- a) Nollakohdat ovat $x_1 = -6$ ja $x_2 = 1$ ja toisen asteen termin kerroin on $a = 3$.

Muodostetaan yhtälö.

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$3(x - (-6))(x - 1) = 0$$

$$3(x + 6)(x - 1) = 0$$

Yhtälöstä voidaan kertoa sulkeet auki, jolloin saadaan

$$3x^2 + 15x - 18 = 0.$$

- b) Ainoa nollakohta on $x_1 = -6$ ja toisen asteen termin kerroin on $a = 3$.

Muodostetaan yhtälö.

$$a(x - x_1)^2 = 0$$

$$3(x - (-6))^2 = 0$$

$$3(x + 6)^2 = 0$$

Yhtälöstä voidaan kertoa sulkeet auki, jolloin saadaan

$$3x^2 + 36x + 108 = 0.$$

Vastaus: a) $3(x + 6)(x - 1) = 0$ b) $3(x + 6)^2 = 0$

Kolmannen asteen polynomifunktiolla voi olla enintään kolme nollakohtaa.

Nollakohdat ovat $x_1 = -4$, $x_2 = 0$ ja $x_3 = 6$, joten tekijät ovat

$$x - x_1 = (x - (-4)) = (x + 4),$$

$$x - x_2 = (x - 0) = x,$$

$$x - x_3 = (x - 6).$$

Funktion lauseke on siis muotoa $a \cdot x \cdot (x + 4) \cdot (x - 6)$, missä $a \neq 0$.

Kolmannen asteen termin kerroin on 8 eli $a = 8$.

Funktion lauseke on siis $8x(x + 4)(x - 6)$.

Vastaus: $8x(x + 4)(x - 6)$

Kolmannen asteen polynomifunktiolla voi olla enintään kolme nollakohtaa.

Nollakohdat ovat $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ ja $x_3 = \frac{1}{4}$, joten tekijät ovat

$$x - x_1 = (x - (-3)) = (x + 3),$$

$$x - x_2 = (x - 0) = x,$$

$$x - x_3 = (x - \frac{1}{4}).$$

Funktion lauseke on siis muotoa $P(x) = ax(x+3)(x-\frac{1}{4})$, missä $a \neq 0$.

Ratkaistaan kertoimen a arvo.

$$P(-1) = 5$$

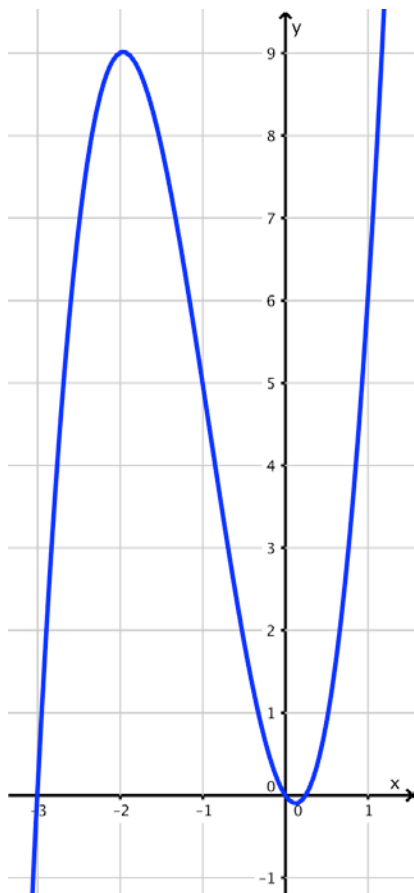
$$a(-1)(-1+3)(-1-\frac{1}{4}) = 5$$

$$\frac{5}{2}a = 5 \quad | \cdot \frac{2}{5}$$

$$a = 2$$

Siiis $P(x) = 2x(x+3)(x-\frac{1}{4})$.

Kuvaaja:



Vastaus: $2x(x+3)(x-\frac{1}{4})$

337

Polynomilla on tekijänä $x - 2$, jos ja vain jos 2 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio c .

$$3x^2 + 12x + c = 0 \quad \Big| \text{ sijoitetaan } x = 2$$

$$3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + c = 0$$

$$36 + c = 0$$

$$c = -36$$

Polynomiksi saadaan $3x^2 + 12x - 36$.

Ratkaistaan polynomin nollakohdat (laskimella).

$$3x^2 + 12x - 36 = 0$$

$$x = -6 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$3x^2 + 12x - 36 = 3(x - (-6))(x - 2) = 3(x + 6)(x - 2)$$

Polynomin toinen tekijä on siis $3(x + 6)$

Vastaus: $c = -36$, toinen tekijä on $3(x + 6)$

338

Polynomilla on tekijänä $x + 12 = (x - (-12))$, jos ja vain jos -12 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio b .

$$x^2 + bx - 96 = 0 \quad | \text{ sijoitetaan } x = -12$$

$$(-12)^2 + b \cdot (-12) - 96 = 0$$

$$b = 4$$

Polynomiksi saadaan $x^2 + 4x - 96$.

Ratkaistaan polynomin nollakohdat.

$$x^2 + 4x - 96 = 0$$

$$x = -12 \quad \text{tai} \quad x = 8$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$x^2 + 4x - 96 = 1 \cdot (x - (-12))(x - 8) = (x + 12)(x - 8)$$

Polynomin toinen tekijä on siis $x - 8$.

Vastaus: $b = 4$, toinen tekijä on $x - 8$

Murtolauseke voidaan supistaa vain jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä.

Jaetaan nimittäjä tekijöihin.

$$2x + 12 = 2(x + 6)$$

Osoittajalla on tekijä $x + 6$, jos ja vain jos -6 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio c .

$$(-6)^2 + 3 \cdot (-6) + c = 0$$

$$18 + c = 0$$

$$c = -18$$

Osoittajaksi saadaan $x^2 + 3x - 18$.

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat ja jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$x = -6 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

$$x^2 + 3x - 18 = (x + 6)(x - 3)$$

Tekijöihin jaon voi tehdä myös laskimella tai ryhmittelemällä.

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{x^2 + 3x - 18}{2x + 12} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x+6)}}(x-3)}{2 \underset{1}{\cancel{(x+6)}}} = \frac{x-3}{2}$$

Nimittäjän tekijä $x + 6$ saa arvon nolla, kun $x = -6$. Koska nolllalla ei voi jakaa, murtolauseke on määritelty vain, kun $x \neq -6$.

Vastaus: $c = -18, \frac{x-3}{2}, \text{ kun } x \neq -6$

Murtolauseke voidaan supistaa vain jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä.

Jaetaan nimittäjä tekijöihin.

$$6x - 3 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Osoittajalla on tekijä $x - \frac{1}{2}$, jos ja vain jos $\frac{1}{2}$ on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio b .

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{2} - 12 = 0$$

$$b = 22$$

Osoittajaksi saadaan $4x^2 + 22x - 12$.

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat ja jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$4x^2 + 22x - 12 = 0$$

$$x = -6 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{2}$$

Tekijöihin jaon voi tehdä myös laskimella tai ryhmittelemällä.

$$4x^2 + 22x - 12 = 4\left(x + 6\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{4x^2 + 22x - 12}{6x - 3} = \frac{\overset{2}{4}(x+6) \overset{1}{\cancel{(x-\frac{1}{2})}}}{\underset{3}{\cancel{6}} \overset{1}{\cancel{(x-\frac{1}{2})}}} = \frac{2(x+6)}{3} = \frac{2x+12}{3}$$

Nimittäjän tekijä $x - \frac{1}{2}$ saa arvon nolla, kun $x = \frac{1}{2}$. Koska nolalla ei voi jakaa, murtolauseke on määritelty vain, kun $x \neq \frac{1}{2}$.

Vastaus: $b = 22, \frac{2x+12}{3}, \text{ kun } x \neq \frac{1}{2}$

HUOM:

Laskin saattaa näyttää osoittajan tekijöihin jaettuna muodossa $2(x+6)(2x-1)$.

Yllä olevassa ratkaisussa esitetty muoto voidaan sieventää kyseiseen muotoon.

$$4(x+6)(x-\frac{1}{2}) = 2 \cdot (x+6) \cdot 2 \cdot (x-\frac{1}{2}) = 2(x+6)(2x-1)$$

Murtolauseke supistuu tällöin seuraavasti.

$$\frac{4x^2 + 22x - 12}{6x - 3} = \frac{2(x+6) \overset{1}{\cancel{(2x-1)}}}{3 \overset{1}{\cancel{(2x-1)}}} = \frac{2x+12}{3}$$

Toisen asteen polynomilla voi olla enintään kaksi nollakohtaa. Polynomin nollakohdat ovat $x_1 = -2$ ja $x_2 = -6$, jos ja vain jos sen tekijät ovat

$$x - x_1 = x - (-2) = x + 2,$$

$$x - x_2 = x - (-6) = x + 6.$$

Funktion lauseke on siis muotoa $P(x) = a(x + 2)(x + 6)$, jossa $a \neq 0$.

Ratkaistaan kertoimen a arvo.

$$P(0) = 4$$

$$a(0 + 2)(0 + 6) = 4$$

$$12a = 4 \quad | :12$$

$$a = \frac{1}{3}$$

Siis $P(x) = \frac{1}{3}(x + 2)(x + 6)$.

Vastaus: $\frac{1}{3}(x + 2)(x + 6)$

342

Lasketaan polynomin P arvot kohdissa -3 , $\frac{1}{3}$ ja $\frac{5}{2}$.

$$P(-3) = 12 \cdot (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 - 92 \cdot (-3) + 30 = 0$$

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 92 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 30 = 0$$

$$P\left(\frac{5}{2}\right) = 12 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 92 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 30 = 0$$

Koska $P(-3) = P\left(\frac{1}{3}\right) = P\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ ovat -3 , $\frac{1}{3}$ ja $\frac{5}{2}$ polynomin P nollakohtia.

Koska polynomi P on kolmannen asteen polynomi, sillä voi olla enintään kolme nollakohtaa. Muita nollakohtia ei siis voi olla.

Jaetaan polynomi P tekijöihin.

$$\begin{aligned} P(x) &= 12x^3 + 2x^2 - 92x + 30 = 12\left(x - (-3)\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) \\ &= 12(x + 3)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

Vastaus: Ei voi olla muita nollakohtia.

$$P(x) = 12x^3 + 2x^2 - 92x + 30 = 12(x + 3)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

a) Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$28x^2 - 11x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{7} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{4}$$

b) Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$\begin{aligned} 28x^2 - 11x + 1 &= 28\left(x - \frac{1}{7}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) \\ &= 4 \cdot 7\left(x - \frac{1}{7}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) \\ &= 7\left(x - \frac{1}{7}\right) \cdot 4\left(x - \frac{1}{4}\right) \\ &= (7x - 1)(4x - 1) \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = \frac{1}{7}$ tai $x = \frac{1}{4}$

b) $28\left(x - \frac{1}{7}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = (7x - 1)(4x - 1)$

Toisen asteen yhtälöllä on kaksoisjuuri eli vain yksi juuri täsmälleen silloin, kun sen diskriminantti on nolla.

Muodostetaan yhtälön $x^2 + 18x + c = 0$ diskriminantti.

$$\begin{aligned} D &= b^2 - ac \\ &= 18^2 - 4 \cdot 1 \cdot c \\ &= 324 - 4c \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakion c arvo.

$$\begin{aligned} 324 - 4c &= 0 \\ -4c &= -324 \\ c &= 81 \end{aligned}$$

Yhtälön kaksoisjuuri on $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{2 \cdot 1} = -9$.

Kaksoisjuuren arvon voi selvittää myös ratkaisemalla yhtälön.

$$\begin{aligned} x^2 + 18x + 81 &= 0 \\ x &= -9 \end{aligned}$$

Vastaus: $c = 81$, kaksoisjuuri $x = -9$

Toisen asteen yhtälöllä on kaksoisjuuri eli vain yksi juuri täsmälleen silloin, kun sen diskriminantti on nolla.

Muodostetaan yhtälön $ax^2 - 60x + 25 = 0$ diskriminantti.

$$\begin{aligned} D &= b^2 - ac \\ &= (-60)^2 - 4 \cdot a \cdot 25 \\ &= -100a + 3600 \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakion c arvo.

$$\begin{aligned} -100a + 3600 &= 0 \\ -100a &= -3600 \\ a &= 36 \end{aligned}$$

Yhtälön kaksoisjuuri on $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-60}{2 \cdot 36} = \frac{5}{6}$.

Kaksoisjuuren arvon voi selvittää myös ratkaisemalla yhtälön.

$$\begin{aligned} 36x^2 - 60x + 25 &= 0 \\ x &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Vastaus: $a = 36$, kaksoisjuuri $x = \frac{5}{6}$

Polynomilla on tekijänä $x + 1 = x - (-1)$, jos ja vain jos -1 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio k .

$$x^2 + kx + k^2 - 7 = 0 \quad \Big| \text{ sijoitetaan } x = -1$$

$$(-1)^2 + k \cdot (-1) + k^2 - 7 = 0$$

$$k^2 - k - 6 = 0$$

$$k = -2 \quad \text{tai} \quad k = 3$$

Muodostetaan saatuja vakion k arvoja vastaavat polynomit, ratkaistaan niiden nollakohdat ja jaetaan polynomit tekijöihin.

1) Kun $k = -2$, niin polynomi on $x^2 - 2x + (-2)^2 - 7 = x^2 - 2x - 3$.

Nollakohdat:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Jaetaan tekijöihin:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - (-1))(x - 3) = (x + 1)(x - 3)$$

Toinen tekijä on siis $x - 3$.

2) Kun $k = 3$, niin polynomi on $x^2 + 3x + 3^2 - 7 = x^2 + 3x + 2$.

Nollakohdat:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

Jaetaan tekijöihin:

$$x^2 + 3x + 2 = (x - (-2))(x - (-1)) = (x + 2)(x + 1)$$

Toinen tekijä on siis $x + 2$.

Vastaus: $k = -2$, toinen tekijä on $x - 3$
 $k = 3$, toinen tekijä on $x + 2$

Murtolauseke voidaan supistaa vain jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä.

Jaetaan nimittäjä tekijöihin: $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4)$.

Osoittajalla pitää olla siis tekijänä $x + 4$ tai $x - 4$.

1) Osoittajalla on tekijä $x + 4$, jos ja vain jos -4 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio b .

$$(-4)^2 + b \cdot (-4) - 4 = 0$$

$$-4b + 12 = 0$$

$$b = 3$$

Osoittajaksi saadaan $x^2 + 3x - 4$.

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat ja jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = -4 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

Tekijöihin jaon voi tehdä myös laskimella tai ryhmittelemällä.

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 16} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x + 4)}}(x - 1)}{\underset{1}{\cancel{(x + 4)}}(x - 4)} = \frac{x - 1}{x - 4}$$

2) Osoittajalla on tekijä $x - 4$, jos ja vain jos 4 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio b .

$$4^2 + b \cdot 4 - 4 = 0$$

$$4b + 12 = 0$$

$$b = -3$$

Osoittajaksi saadaan $x^2 - 3x - 4$.

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat ja jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$$

Tekijöihin jaon voi tehdä myös laskimella tai ryhmittelemällä.

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \frac{(x + 1) \overset{1}{\cancel{(x - 4)}}}{(x + 4) \underset{1}{\cancel{(x - 4)}}} = \frac{x + 1}{x + 4}$$

Nimittäjän tekijä $x + 4$ saa arvon nolla, kun $x = -4$. Koska nolalla ei voi jakaa, murtolauseke on määritelty vain, kun $x \neq -4$.

Vastaavasti nimittäjän tekijä $x - 4$ saa arvon nolla, kun $x = 4$, joten murtolauseke on määritelty vain, kun $x \neq 4$.

Murtolauseke on määritelty siis vain, kun $x \neq -4$ ja $x \neq 4$.

Vastaus: Kun $b = 3$, on supistettu muoto $\frac{x-1}{x-4}$.

Kun $b = -3$, on supistettu muoto $\frac{x+1}{x+4}$.

Murtolauseke on määritelty, kun $x \neq -4$ ja $x \neq 4$.

Murtolauseke voidaan supistaa vain jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä.

Jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$\begin{aligned}x^4 - 18x^2 + 81 &= (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (-9) + (-9)^2 \\&= (x^2 - 9)^2 \\&= ((x + 3)(x - 3))^2 \\&= (x + 3)^2(x - 3)^2\end{aligned}$$

Tekijöihin jaon voi tehdä myös laskimella tai nollakohtien avulla.

Nimittäjällä pitää olla siis tekijänä $x + 3$ tai $x - 3$.

1) Nimittäjällä on tekijä $x + 3$, jos ja vain jos -3 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio c .

$$-3 + c = 0$$

$$c = 3$$

Nimittäjäksi saadaan $x + 3$.

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{x^4 - 18x^2 + 81}{x + 3} = \frac{(x + 3)^{\cancel{2}}(x - 3)^2}{\cancel{x + 3}_1} = (x + 3)(x - 3)^2$$

Nimittäjän tekijä $x + 3$ saa arvon nolla, kun $x = -3$. Koska nolalla ei voi jakaa, murtolauseke on määritelty vain, kun $x \neq -3$

2) Nimittäjällä on tekijä $x - 3$, jos ja vain jos 3 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio c .

$$3 + c = 0$$

$$c = -3$$

Nimittäjäksi saadaan $x - 3$.

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{x^4 - 18x^2 + 81}{x - 3} = \frac{(x + 3)^2 (x - 3)^{\cancel{2}}}{\cancel{x - 3}_1} = (x + 3)^2 (x - 3)$$

Nimittäjän tekijä $x - 3$ saa arvon nolla, kun $x = 3$. Koska nollalla ei voi jakaa, murtolauseke on määritelty vain, kun $x \neq 3$

Vastaus: Kun $c = 3$, on supistettu muoto $(x + 3)(x - 3)^2$ ja murtolauseke on määritelty, kun $x \neq -3$.

Kun $c = -3$, on supistettu muoto $(x + 3)^2 (x - 3)$ ja murtolauseke on määritelty, kun $x \neq 3$.

a) Yhtälössä $x^2 - 3x - 54 = 0$ on $a = 1$, $b = -3$ ja $c = -54$.

Lasketaan juurten summa.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$$

Katso s. 98 marginaali.

b) Yhtälössä $4x^2 + 21x + 5 = 0$ on $a = 4$, $b = 21$ ja $c = 5$.

Lasketaan juurten tulo.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

c) Yhtälön $x^2 - 3x - 180 = 0$ juurten summa on $x_1 + x_2 = -\frac{-3}{1} = 3$.

Ratkaisussa saatujen juurten summa on $-15 + 12 = -3$, joten ratkaisu on virheellinen.

d) Koska toinen juuri on 1, niin toinen juuri on helppo ratkaista juurien tulon avulla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan toinen juuri.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$1 \cdot x_2 = \frac{-7}{5}$$

$$x_2 = -\frac{7}{5}$$

e) Yhtälön $9x^2 - 4x - 5 = 0$ toinen juuri on $x = 1$, sillä
 $9 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 5 = 9 - 4 - 5 = 0$.

d-kohdan perusteella yhtälön toinen juuri on yhtä suuri kuin juurien tulo. Ratkaistaan toinen juuri.

$$x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{9} = -\frac{5}{9}$$

Vastaus: a) 3

b) $\frac{5}{4}$

d) $x = -\frac{7}{5}$

e) $x = 1$ tai $x = -\frac{5}{9}$

- a) Polynomi $x^n - 1$ on jaollinen binomilla $x - 1$, jos ja vain jos sen nollakohtana on 1.

Sijoitetaan nollakohta $x = 1$ polynomin $x^n - 1$ lausekkeeseen.

$$x^n - 1 = 1^n - 1 = 1 - 1 = 0$$

Siis $x = 1$ on polynomin $x^n - 1$ nollakohta ja täten polynomi $x^n - 1$ on jaollinen binomilla $x - 1$. $\square$

- b) Käyttämällä a-kohdan tulosta tilanteeseen, jossa $x = 55$ ja $n = 99$, saadaan, että luku $55^{99} - 1$ on jaollinen luvulla $55 - 1 = 54$.

Koska luku $55^{99} - 1$ on jaollinen luvulla 54 se ei ole alkuluku.

$\square$

351

Polynomin $x^{45} + 1$ nollakohta on $x = -1$, sillä $(-1)^{45} + 1 = -1 + 1 = 0$.

Täten polynomi $x^{45} + 1$ on jaollinen binomilla $x + 1$.

Siis luku $123^{45} + 1$ on jaollinen luvulla $123 + 1 = 124$ ja ei ole alkuluku. $\square$