

3.1

a) Laaditaan lauseen $(A \vee B) \vee \neg A$ totuustaulu

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee \neg A$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	1

Lause on tosi kaikilla lauseiden A ja B totuusarvoilla, joten kyseessä on tautologia.

Suomennetaan lause $(A \vee B) \vee \neg A$.

”Rauli on lomalla tai ulkomailla, tai Rauli ei ole lomalla”.

b) Laaditaan lauseen $B \Rightarrow (\neg B \vee \neg A)$ totuustaulu.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \vee \neg A$	$B \Rightarrow (\neg B \vee \neg A)$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Lause ei ole tosi kaikilla lauseiden A ja B totuusarvoilla, joten kyseessä ei ole tautologia.

Suomennetaan lause $B \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

”Jos Rauli on ulkomailla, niin Rauli ei ole ulkomailla tai ei ole lomalla.”

Vastaus

a) On tautologia.

”Rauli on lomalla tai ulkomailla, tai Rauli ei ole lomalla”.

b) Ei ole tautologia.

”Jos Rauli on ulkomailla, niin Rauli ei ole ulkomailla tai ei ole lomalla.”

3.2

a) Muodostetaan lauseen $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \vee B)$ totuustaulu.

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$A \vee B$	$(A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \vee B)$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1

Lause on tosi kaikilla lauseiden A ja B totuusarvoilla, joten kyseessä on tautologia.

Suomennetaan lause $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \vee B)$.

”Jos ostan arvan ja en saa päävoittoa, niin ostan arvan tai saan päävoiton.”

b) Muodostetaan lauseen $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \wedge B)$ totuustaulu.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \wedge B)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0

Lause on epätosi kaikilla lauseiden A ja B totuusarvoilla, joten kyseessä on kontradiktio

Suomennetaan lause $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \wedge B)$.

”Sekä ostan arvan tai en saa päävoittoa, että en ostaa arpaa ja saan päävoiton.”

c) Muodostetaan lauseen $\neg B \Leftrightarrow (A \vee B)$ totuustaulu.

A	B	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg B \Leftrightarrow (A \vee B)$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	0	0

Lause ei ole tautologia eikä kontradiktio.

Suomennetaan lause $\neg B \Leftrightarrow (A \vee B)$.

”En saa päävoittoa täsmälleen silloin, kun ostan arvan tai saan päävoiton.”

Vastaus

a) On tautologia.

”Jos ostan arvan ja en saa päävoittoa, niin ostan arvan tai saan päävoiton.”

b) On kontradiktio.

”Sekä ostan arvan tai en saa päävoittoa, että en ostaa arpaa ja saan päävoiton.”

c) Ei ole tautologia tai kontradiktio.

”En saa päävoittoa täsmälleen silloin, kun ostan arvan tai saan päävoiton.”

3.3

- a) Muodostetaan totuustaulut lauseille $(A \vee B) \vee C$ ja $A \vee (B \vee C)$.

A	B	C	$A \vee B$	$B \vee C$	$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

Koska lauseiden $(A \vee B) \vee C$ ja $A \vee (B \vee C)$ totuustaulut ovat samat, lauseet ovat loogisesti yhtäpitävät. $\square$

- b) Muodostetaan totuustaulu lauseille $(A \wedge B) \wedge C$ ja $A \wedge (B \wedge C)$.

A	B	C	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Koska lauseiden $(A \wedge B) \wedge C$ ja $A \wedge (B \wedge C)$ totuustaulut ovat samat, lauseet ovat loogisesti yhtäpitävät. $\square$

3.4

Todistetaan lauseet $A \Leftrightarrow B$ ja $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ loogisesti ekvivalenteiksi totuustaulun avulla.

Muodostetaan totuustaulut lauseille $A \Leftrightarrow B$ ja $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$A \Leftrightarrow B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1

Koska lauseiden $A \Leftrightarrow B$ ja $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ totuustaulut ovat samat, lauseet ovat loogisesti ekvivalentit. $\square$

3.5

Pitää muodostaa sellainen lause P , että kysymykseen ”onko totta, että P ” vastauksesta voidaan päätellä, onko Aine ritari vai kelmi.

Formalisoidaan ongelma käyttäen lausetta A : ”Aine on ritari”,

jolloin $\neg A$: ”Aine on kelmi.

A	$\neg A$	Toivottu vastaus	P : haluttu totuusarvo
1	0	1	1
0	1	0	1

Lauseella P on sama totuustaulu kuin lauseella $A \vee \neg A$.

Voidaan siis kysyä esimerkiksi ”on totta, että olet ritari tai kelmi”.

Jos Aine on ritari, hän puhuu totta ja vastaa ”kyllä”.

Jos Aine on kelmi, hän valehtelee ja vastaa ”ei”.

Vastaus

Esimerkiksi ”on totta, että olet ritari tai kelmi”.

Huomaa, että kysymys voi olla mitä tahansa, joka on muotoa ”onko totta, että P ”, missä P on jokin aina tosi lause.

3.6

Olkoon A : ”huomenna sataa lunta” ja B : ”huomenna on pakkasta”.

- a) Formalisoidaan lause ”huomenna sataa lunta tai on pakkasta, tai sitten huomenna ei sada lunta ja ei ole pakkasta.”

$$(A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Laaditaan lauseen totuustaulu.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1

Lause on tautologia, koska se on tosi kaikilla lauseiden A ja B totuusarvoilla.

- b) Formalisoidaan lause ”huomenna ei ole pakkasta, tai jos on pakkasta, niin sataa lunta.”

$$\neg B \vee (B \Rightarrow A)$$

Laaditaan lauseen totuustaulu.

A	B	$\neg B$	$B \Rightarrow A$	$\neg B \vee (B \Rightarrow A)$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

Lause ei ole tautologia, koska se ei ole tosi kaikilla lauseiden A ja B totuusarvoilla.

- c) Formalisoidaan lause ”huomenna sataa lunta ja on pakkasta, tai jos sataa lunta, niin ei ole pakkasta.”

$$(A \wedge B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$$

Laaditaan lauseen totuustaulu.

A	B	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow \neg B$	$(A \wedge B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1

Lause on tautologia, koska se on tosi kaikilla lauseiden A ja B totuusarvoilla.

Vastaus

- a) $(A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$, on tautologia
b) $\neg B \vee (B \Rightarrow A)$, ei ole tautologia
c) $(A \wedge B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$, on tautologia

3.7

Olkoon A : ”Jani lähtee Kolille” ja B : ”Jani käy laskettelemassa”.

a) Formalisoidaan lauseet.

”Jani lähtee Kolille tai sitten Jani ei lähde Kolille ja käy laskettelemassa.”

$$A \vee (\neg A \wedge B)$$

”Jani lähtee Kolille tai käy laskettelemassa”.

$$A \vee B$$

Muodostetaan totuustaulut lauseille.

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$A \vee (\neg A \wedge B)$	$A \vee B$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0

Lauseiden $A \vee (\neg A \wedge B)$ ja $A \vee B$ totuustaulut ovat samat, joten lauseet ovat loogisesti yhtäpitävät.

b) Formalisoidaan lauseet.

”Jos Jani lähtee Kolille, niin hän käy laskettelemassa”

$$A \Rightarrow B$$

”Jos Jani ei lähde Kolille, niin hän ei käy laskettelemassa.”

$$\neg A \Rightarrow \neg B$$

Muodostetaan totuustaulut lauseille.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \Rightarrow \neg B$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1

Lauseiden $A \Rightarrow B$ ja $\neg A \Rightarrow \neg B$ totuustaulut eivät ole samat, joten lauseet eivät ole loogisesti yhtäpitävät.

Vastaus

a) Lauseet $A \vee (\neg A \wedge B)$ ja $A \vee B$ ovat loogisesti yhtäpitävät.

b) Lauseet $A \Rightarrow B$ ja $\neg A \Rightarrow \neg B$ eivät ole loogisesti yhtäpitävät.

3.8

- a) Koska lause P on tosi, kun A on tosi tai kun B ei ole tosi, eräs mahdollisuus loogisesti yhtäpitäväksi lauseeksi on $A \vee \neg B$

A	B	P	$\neg B$	$A \vee \neg B$
1	1	1	0	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

- b) Koska lause P on totta, kun täsmälleen toinen lauseista A ja B on tosi, eräs mahdollisuus loogisesti yhtäpitäväksi lauseeksi on $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$.

A	B	P	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge B$	$A \wedge \neg B$	$(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0

Vastaus

a) esimerkiksi $A \vee \neg B$

b) esimerkiksi $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

3.9

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a)} & \neg(A \wedge \neg B) \quad | \text{de Morganin laki} \\ & \Leftrightarrow \neg A \vee \neg(\neg B) \quad | \text{kaksoiskiellon laki} \\ & \Leftrightarrow \neg A \vee B \end{array}$$

On osoitettu, että lauseet $\neg(A \wedge \neg B)$ ja $\neg A \vee B$ ovat loogisesti ekvivalentit. $\square$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{b)} & \neg(\neg A \vee \neg B) \quad | \text{de Morganin laki} \\ & \Leftrightarrow \neg(\neg A) \wedge \neg(\neg B) \quad | \text{kaksoiskiellon laki} \\ & \Leftrightarrow A \wedge B \end{array}$$

On osoitettu, että lauseet $\neg(\neg A \vee \neg B)$ ja $A \wedge B$ ovat loogisesti ekvivalentit. $\square$

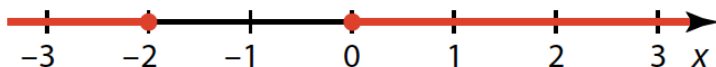
3.10

- a) Lause $\neg(-2 < x < 0)$ voidaan kirjoittaa muotoon $\neg(x > -2 \wedge x < 0)$

Sovelletaan de Morganin lakia.

$$\neg(x > -2 \wedge x < 0) \Leftrightarrow \neg(x > -2) \vee \neg(x < 0)$$

Lause $\neg(x > -2) \vee \neg(x < 0)$ voidaan kirjoittaa muotoon $x \leq -2 \vee x \geq 0$ eli $x \leq -2$ tai $x \geq 0$.

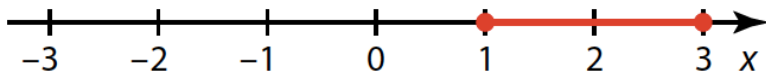


- b) Lause $\neg(x < 1 \text{ tai } x > 3)$ voidaan kirjoittaa muotoon $\neg(x < 1 \vee x > 3)$.

Sovelletaan de Morganin lakia.

$$\neg(x < 1 \vee x > 3) \Leftrightarrow \neg(x < 1) \wedge \neg(x > 3)$$

Lause $\neg(x < 1) \wedge \neg(x > 3)$ voidaan kirjoittaa muotoon $x \geq 1 \wedge x \leq 3$ eli $x \geq 1$ ja $x \leq 3$ eli $1 \leq x \leq 3$.



Vastaus

- a) $x \leq -2$ tai $x \geq 0$
b) $x \geq 1$ ja $x \leq 3$ (eli $1 \leq x \leq 3$)

3.11

- a) Tutkitaan lausetta $(A \wedge C) \wedge (B \wedge \neg C)$ totuustaulun avulla.

A	B	C	$\neg C$	$A \wedge C$	$B \wedge \neg C$	$(A \wedge C) \wedge (B \wedge \neg C)$
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0

Lause on kontradiktio, koska se on epätosi kaikilla lauseiden A , B ja C totuusarvoilla.

- b) Tutkitaan lausetta $(A \vee \neg B) \vee C$ totuustaulun avulla.

A	B	C	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$(A \vee \neg B) \vee C$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Lause ei ole tautologia eikä kontradiktio.

- c) Tutkitaan lausetta $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ totuustaulun avulla. Merkitään koko lausetta kirjaimella L .

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	L
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Lause on tautologia, koska se on tosi kaikilla lauseiden A , B ja C totuusarvoilla.

Vastaus

- a) on kontradiktio
b) ei ole tautologia tai kontradiktio
c) on tautologia

3.12

- a) Laaditaan totuustaulu lauseille $A \wedge (B \vee C)$ ja $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Lauseiden totuustaulut ovat samat, joten lauseet ovat loogisesti yhtäpitävät. $\square$

- b) Laaditaan totuustaulu lauseille $A \vee (B \wedge C)$ ja $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee B$	$A \vee C$	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Lauseiden totuustaulut ovat samat, joten lauseet ovat loogisesti yhtäpitävät. $\square$

3.13

Olkoon A : ”huomenna on aurinkoista” ja B : ”huomenna on tyyntä”.

- a) Formalisoidaan lause ”huomenna on aurinkoista ja tyyntä, ja huomenna on pilvistä ja tuulista.”

$$(A \wedge B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$$

Tutkitaan lausetta $(A \wedge B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$ totuustaulun avulla.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0

Lause on kontradiktio, koska se on epätosi kaikilla lauseiden A ja B totuusarvoilla.

- b) Formalisoidaan lause ”huomenna on aurinkoista, tai jos on tyyntä, niin on pilvistä.”

$$A \vee (B \Rightarrow \neg A)$$

Tutkitaan lausetta $A \vee (B \Rightarrow \neg A)$ totuustaulun avulla.

A	B	$\neg A$	$B \Rightarrow \neg A$	$A \vee (B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Lause on tautologia, koska se on tosi kaikilla lauseiden A ja B totuusarvoilla.

Vastaus

- a) $(A \wedge B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$, lause on kontradiktio
b) $A \vee (B \Rightarrow \neg A)$, lause on tautologia

3.14

Formalisoidaan Liisan ajatus ”jos Heikin päivänä on pakkaneen, on tuleva kesä poutainen. Tänään ei ole pakkasta. Siis ensi kesä on sateinen.”

$$((H \Rightarrow P) \wedge \neg H) \Rightarrow \neg P$$

Laaditaan lauseen totuustaulu.

H	P	$\neg H$	$\neg P$	$H \Rightarrow P$	$(H \Rightarrow P) \wedge \neg H$	$((H \Rightarrow P) \wedge \neg H) \Rightarrow \neg P$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1

Lause ei ole tautologia.

Vastaus

$$((H \Rightarrow P) \wedge \neg H) \Rightarrow \neg P, \text{ lause ei ole tautologia}$$

3.15

Pitää muodostaa sellainen lause P , että kysymykseen ”onko totta, että P ” vastauksesta voidaan päätellä, kumpi vastauksista on ”kyllä”.

Formalisoidaan ongelma käyttäen lausetta A : ”olet ritari”,

jolloin $\neg A$: ”olet kelmi”.

A	$\neg A$	Toivottu vastaus	P : haluttu totuusarvo
1	0	1	1
0	1	1	0

Lauseella P on sama totuustaulu kuin lauseella A .

Voidaan siis kysyä esimerkiksi ”onko totta, että olet ritari”.
Jos vastaantullut on ritari, hän puhuu totta ja vastaa ”kyllä”.
Jos vastaantullut on kelmi, hän valehtelee ja vastaa ”kyllä”.
Näin tiedät, kumpi vastauksista tarkoittaa ”kyllä”.

Vastaus

Esimerkiksi ”onko totta, että olet ritari”.

3.16

Pitää muodostaa sellainen lause P , että kysymykseen ”onko totta, että P ” vastauksesta voidaan päätellä, onko Bandi ritari vai kelmi.

Formalisoidaan ongelma käyttäen lauseita

A : ”Akua on ritari” ja B : ”Bandi on ritari”.

A	B	Toivottu vastaus	P : haluttu totuusarvo
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Lauseella P on sama totuustaulu kuin lauseella $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

Voidaan siis kysyä esimerkiksi ”onko totta, että olette molemmat ritareita, tai olette molemmat kelmejä”.

Jos Akua on ritari, hän puhuu totta ja vastaa ”kyllä”, jos Bandi on ritari ja ”ei”, jos Bandi on kelmi.

Jos Akua on kelmi, hän valehtelee ja vastaa ”kyllä”, jos ”kyllä”, jos Bandi on ritari ja ”ei”, jos Bandi on kelmi.

Siis ”kyllä” tarkoittaa, että Bandi on ritari ja ”ei”, että Bandi on kelmi.

Vastaus

”onko totta, että olette molemmat ritareita, tai olette molemmat kelmejä”.

Huomaa, että myös lauseella $A \Leftrightarrow B$ on sama totuustaulu, joten kysymys voi olla myös ”onko totta, että sinä olet ritari täsmälleen silloin, kun Bandi on ritari”.

3.17

a) Hyödynnetään lauseeseen kaksoisnegaation lakia:

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A) \vee \neg(\neg B).$$

Ja seuraavaksi De Morganin lakia:

$$\neg(\neg A) \vee \neg(\neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$\text{Eli } A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

Tulos voidaan tarkistaa totuustaulun avulla.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$A \vee B$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0

b) Tarkastellaan lausetta $A \Rightarrow B$ totuustaulun avulla.

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Lause on tosi silloin, kun A on epätosi tai B on tosi eli $\neg A \vee B$.

Hyödynnetään lauseeseen $\neg A \vee B$ kaksoisnegaation lakia:

$$\neg A \vee B \Leftrightarrow \neg A \vee \neg(\neg B)$$

Ja seuraavaksi De Morganin lakia:

$$\neg A \vee \neg(\neg B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

Eli $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.

Tulos voidaan tarkistaa totuustaulun avulla.

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$	$A \Rightarrow B$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1

- c) Lause $A \Leftrightarrow B$ on loogisesti yhtäpitävä lauseen $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ kanssa (tämä on osoitettu tehtävässä 2.12).

Tämän tehtävän b-kohdan ratkaisua hyödyntäen voidaan nyt kirjoittaa $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ ja vastaavasti $(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow \neg(B \wedge \neg A)$.

Siiis $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge B)$.

Täten $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge B)$

Vastaus

a) esimerkiksi $\neg(\neg A \wedge \neg B)$

b) esimerkiksi $\neg(A \wedge \neg B)$

c) esimerkiksi $\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge B)$

3.18

Tutkitaan lauseen P totuustaulua.

A	B	C	P	$\neg B$	$\neg C$	$A \vee \neg B \vee \neg C$
1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Lause P on tosi aina, kun

A on tosi

B on epätosi

C on epätosi.

Sama totuustaulu on esimerkiksi lauseella $A \vee \neg B \vee \neg C$.

Vastaus

esimerkiksi $A \vee \neg B \vee \neg C$

3.19

a) $A \Rightarrow (B \vee \neg C)$ |kontraposition laki
 $\Leftrightarrow \neg(B \vee \neg C) \Rightarrow \neg A$ |de Morganin laki
 $\Leftrightarrow (\neg B \wedge \neg(\neg C)) \Rightarrow \neg A$ |kaksoiskiellon laki
 $\Leftrightarrow (\neg B \wedge C) \Rightarrow \neg A$

On osoitettu, että lauseet $A \Rightarrow (B \vee \neg C)$ ja $(\neg B \wedge C) \Rightarrow \neg A$ ovat loogisesti ekvivalentit. $\square$

b) $(A \wedge B) \Rightarrow \neg C$ |kontraposition laki
 $\Leftrightarrow \neg(\neg C) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$ |kaksoiskiellon laki
 $\Leftrightarrow C \Rightarrow \neg(A \wedge B)$ |de Morganin laki
 $\Leftrightarrow C \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

On osoitettu, että lauseet $(A \wedge B) \Rightarrow \neg C$ ja $C \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ ovat loogisesti ekvivalentit. $\square$

3.20

- a) Formalisoidaan ajatelma ”jos tiedän olevani kuollut, niin olen kuollut, ja jos tiedän olevani kuollut, niin en ole kuollut. Siis en tiedän olevani kuollut.”

$$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg A)$$

- b) Tutkitaan lausetta $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg A)$ totuustaulun avulla. Merkitään koko lausetta kirjaimella L .

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow \neg B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)$	L
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

Lause $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg A)$ on tosi kaikilla lauseiden A ja B totuusarvoilla, joten kyseessä on tautologia.

Vastaus

- a) $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg A)$
b) Ajatelma on tautologia.

3.21

- a) Schefferin viiva tarkoittaa ”ei molemmat” tai ”vain toinen tai ei kumpikaan”.
- b) Shefferin viiva voidaan esittää ei- ja ja-konnektiivin avulla.

$$(A \mid B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$$

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \mid B)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

Lause $\neg A$ voidaan esittää muodossa $\neg(A \wedge A)$.

Lause $\neg(A \wedge A)$ voidaan esittää Shefferin viivan avulla muodossa $A \mid A$.

Siis $\neg A \Leftrightarrow A \mid A$.

Kaksoiskiellon lakia käyttämällä lause $A \wedge B$ voidaan kirjoittaa muotoon $\neg(\neg(A \wedge B))$.

Lause $\neg(\neg(A \wedge B))$ voidaan esittää Shefferin viivan ja ei-konnektiivin avulla muodossa $\neg(A \mid B)$, joka voidaan edelleen esittää muodossa $(A \mid B) \mid (A \mid B)$.

Siis $A \wedge B \Leftrightarrow (A \mid B) \mid (A \mid B)$.

Kaksoiskiellon lakia käyttämällä lause $A \vee B$ voidaan kirjoittaa muotoon $\neg(\neg(A \vee B))$.

De Morganin lakia käyttämällä lause $\neg(\neg(A \vee B))$ voidaan kirjoittaa muotoon $\neg(\neg A \wedge \neg B)$, joka voidaan edelleen kirjoittaa muotoon $\neg A \mid \neg B$.

Lopuksi lause $\neg A \mid \neg B$ voidaan kirjoittaa muotoon $(A \mid A) \mid (B \mid B)$.

Vastaus

a) ”ei molemmat” tai ”vain toinen tai ei kumpikaan”

b) $\neg A \Leftrightarrow A \mid A$

$$A \wedge B \Leftrightarrow (A \mid B) \mid (A \mid B)$$

$$A \vee B \Leftrightarrow (A \mid A) \mid (B \mid B)$$

3.22

a) Peircen nuoli tarkoittaa samaa kuin ”ei kumpikaan”.

b) Peircen nuoli voidaan esittää ei- ja tai-konnektiivin avulla.

$$(A \downarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$$

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$(A \downarrow B)$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	1

Lause $\neg A$ voidaan esittää muodossa $\neg(A \vee A)$.

Lause $\neg(A \vee A)$ voidaan esittää Peircen nuolen avulla muodossa $A \downarrow A$.

Siis $\neg A \Leftrightarrow A \downarrow A$.

Kaksoiskiellon lakia käyttämällä lause $A \wedge B$ voidaan kirjoittaa muotoon $\neg(\neg(A \wedge B))$.

De Morganin sääntöä käyttämällä lause $\neg(\neg(A \wedge B))$ voidaan kirjoittaa muotoon $\neg(\neg A \vee \neg B)$

Lause $\neg(\neg A \vee \neg B)$ voidaan esittää Peircen nuolen ja ei-konnektiivin avulla muodossa $\neg A \downarrow \neg B$.

Lause $\neg A \downarrow \neg B$ voidaan esittää pelkän Peircen nuolen avulla muodossa $(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$.

Siiis $A \wedge B \Leftrightarrow (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$.

Kaksoiskiellon lakia käyttämällä lause $A \vee B$ voidaan kirjoittaa muotoon $\neg(\neg(A \vee B))$.

Peircen nuolen ja ei-konnektiivin avulla lause $\neg(\neg(A \vee B))$ voidaan kirjoittaa muotoon $\neg(A \downarrow B)$.

Lause $\neg(A \downarrow B)$ voidaan kirjoittaa pelkän Peircen nuolen avulla muotoon $(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$.

Vastaus

a) ”ei kumpikaan”

b) $\neg A \Leftrightarrow A \downarrow A$

$$A \wedge B \Leftrightarrow (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$$

$$A \vee B \Leftrightarrow (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$$

3.23

Merkitään A : ”neliö a^2 on pariton” ja B : ”luku a on pariton”.

Opiskelijan piti siis todistaa, että väite $A \Rightarrow B$ on tosi.

Tämän väitteen kanssa loogisesti yhtäpitävä on väite $\neg B \Rightarrow \neg A$, joka suomennettuna on ”jos luku a on parillinen, niin neliö a^2 on parillinen”.

Opiskelija siis oletti lauseen $\neg B$: ”luku a on parillinen”. Tästä seuraa, että luku a voidaan esittää kokonaislukujen 2 ja n tulona: $a = 2n$.

Opiskelija laski luvun a neliön: $a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot 2n^2$.

Edelleen hän päätteli, että koska luku $2n^2$ on kokonaisluku, luku $a = 2 \cdot 2n^2$ on parillinen luku.

Täten hän osoitti, että lause $\neg A$: ”neliö a^2 on parillinen” on tosi.

Koska hän osoitti, että $\neg B \Rightarrow \neg A$ on tosi, niin loogisesti yhtäpitävä lause $A \Rightarrow B$ on myös tosi.

3.1

a) Laaditaan lauseen $(A \vee B) \vee \neg A$ totuustaulu

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee \neg A$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	1

Lause on tosi kaikilla lauseiden A ja B totuusarvoilla, joten kyseessä on tautologia.

Suomennetaan lause $(A \vee B) \vee \neg A$.

”Rauli on lomalla tai ulkomailla, tai Rauli ei ole lomalla”.

b) Laaditaan lauseen $B \Rightarrow (\neg B \vee \neg A)$ totuustaulu.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \vee \neg A$	$B \Rightarrow (\neg B \vee \neg A)$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Lause ei ole tosi kaikilla lauseiden A ja B totuusarvoilla, joten kyseessä ei ole tautologia.

Suomennetaan lause $B \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

”Jos Rauli on ulkomailla, niin Rauli ei ole ulkomailla tai ei ole lomalla.”

Vastaus

a) On tautologia.

”Rauli on lomalla tai ulkomailla, tai Rauli ei ole lomalla”.

b) Ei ole tautologia.

”Jos Rauli on ulkomailla, niin Rauli ei ole ulkomailla tai ei ole lomalla.”