MAA4 ratkaisut kevät 2024

2.1 Ratkaise yhtälö $|5-7x|=4$ **4 p.**

$5-7x=4 \ \vee 5-7x=-4$

$-7x=-1 \vee -7x=-9$

$x=\frac{1}{7} \vee x=\frac{9}{7}$

2.2 Ratkaise yhtälö $3|x|-1=0$ **4 p.**

$3|x|=1$

$|x|=\frac{1}{3}$

$x=\pm\frac{1}{3}$

2.3 Ratkaise yhtälö $|x+3|=|x-3|$ **4 p.**

Korotetaan puolittain toiseen potenssiin

$(x+3)^2=(x-3)^2$

$x^2+6x+9=x^2-6x+9$

$6x=-6x \ \Leftrightarrow \ 12x=0 \ \Leftrightarrow \ x=0$

3. Ympyrän tangentti 12 p.

Määritä ympyrän
$x^2-2x+y^2-4y+3=0$
pisteeseen $(2,1)$ piirretyn tangentin yhtälö.

Täydennetään ensin ympyrän yhtälö keskipistemuotoon

$x^2-2x+1^2+y^2-4y+2^2==-3+1+4$

$(x-1)^2+(y-2)^2=2$

Ympyrän keskipiste on siis (1,2), piste (2,1) toteuttaa ympyrän yhtälön joten se on ympyrän kehällä.
Lasketaan ympyrän säteen kulmakerroin

$k_r=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-2}{2-1}=-1$ koska tangentti on kohtisuorassa sädettä vasten niin

$k_r \cdot k_t=-1 \ \Rightarrow \ k_t=1$ muodostetaan tangentin yhtälö $y-y_0=k(x-x_0)$

$y-1=1(x-2) \ \Leftrightarrow \ y=x\underset{-}{\cancel{+}}1$

4.1 6 p.

Millä vakion t arvolla vektorit $\bar{a} = t\bar{\mathrm{i}} - 5\bar{\mathrm{j}}$ ja $\bar{b} = 2\bar{\mathrm{i}} + 6\bar{\mathrm{j}}$ ovat kohtisuorassa keskenään?

Vektorit ovat kohtisuorassa kun niiden pistetulo on 0

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2t - 30$, ratkaistaan yhtälö

$2t - 30 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2t = 30 \;\Leftrightarrow\; t = 15$

4.2 6 p.

Määritä vektorien $\bar{a} = 4\bar{\mathrm{i}} + 5\bar{\mathrm{j}}$ ja $\bar{b} = 3\mathrm{i} - 6\bar{\mathrm{j}}$ välinen kulma. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

Vektoreiden välinen kulma voidaan laskea

$$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 12 - 30 = -18 \qquad |\bar{a}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \qquad |\bar{b}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$$

$$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{-18}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{45}}$$

$$\sphericalangle\,(\bar{a},\bar{b}) = \arccos\left(\frac{-18}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{45}}\right) = 114{,}775° \approx 114{,}8°$$

```
arccos((-18/(sqrt(41)*sqrt(45))))
= 114,775140568831920044422
```

5. Tasasivuisia kolmioita 12 p.

Määritä ne tasasivuiset kolmiot, joiden yksi kärki on origossa, toinen kärki suoralla $y = 4x - 3$ ja kolmas kärki suoralla $y = x + 3$. Anna vastauksena kyseisten kolmioiden kärkipisteiden koordinaattien tarkat arvot.

Olkoon kolmion pisteet $O = (0,0)$, $A = (a,4a-3)$, $B = (b,b+3)$. A piste suoralta $y = 4x - 3$ ja B piste suoralta $y = x + 3$. Muodostetaan janojen OA, OB ja AB pituudet ja tehdää yhtälöpari jossa

$$|OA| = |OB| = |AB|$$

$$|OA| = \sqrt{a^2 + (4a-3)^2},\ |OB| = \sqrt{b^2 + (b+3)^2},\ |AB| = \sqrt{(a-b)^2 + (4a-3-b-3)^2}$$

Kun kirjoitetaan yhtälöryhmä niin neliöjuuret kumoavat toisensa.

$$\begin{cases} a^2+(4a-3)^2=b^2+(b+3)^2 \\ a^2+(4a-3)^2=(a-b)^2+(4a-b-6)^2 \end{cases}\Bigg|_{a,b}$$

$$\left\{\left\{a=\frac{-3\cdot(\sqrt{3}+27)}{11\cdot(5\cdot\sqrt{3}+3)},\ b=\frac{-27\cdot\sqrt{3}}{22}-\frac{69}{22}\right\},\left\{a=\frac{3\cdot(-\sqrt{3}+27)}{11\cdot(5\cdot\sqrt{3}-3)},\ b=\frac{27\cdot\sqrt{3}}{22}-\frac{69}{22}\right\}\right\}$$

$$\begin{cases} a^2+(4a-3)^2=b^2+(b+3)^2 \\ a^2+(4a-3)^2=(a-b)^2+(4a-b-6)^2 \end{cases}\Bigg|_{a,b}$$

$$\{\{a=-0.6720277132, b=-5.262062355\},\{a=1.217482259, b=-1.010664918\}\}$$

Saadaan siis kummaltakin suoralta kaksi pistettä eli kaksi kolmiota. Lasketaan vielä pisteiden y-koordinaattien arvot.

$$4a-3\,|\,a=\frac{-3\cdot(\sqrt{3}+27)}{11\cdot(5\cdot\sqrt{3}+3)} \quad \frac{-12\cdot(\sqrt{3}+27)}{11\cdot(5\cdot\sqrt{3}+3)}-3$$

$$4a-3\,|\,a=\frac{-3\cdot(\sqrt{3}+27)}{11\cdot(5\cdot\sqrt{3}+3)} \quad -5.688110853$$

$$4a-3\,|\,a=\frac{3\cdot(-\sqrt{3}+27)}{11\cdot(5\cdot\sqrt{3}-3)} \quad \frac{12\cdot(-\sqrt{3}+27)}{11\cdot(5\cdot\sqrt{3}-3)}-3$$

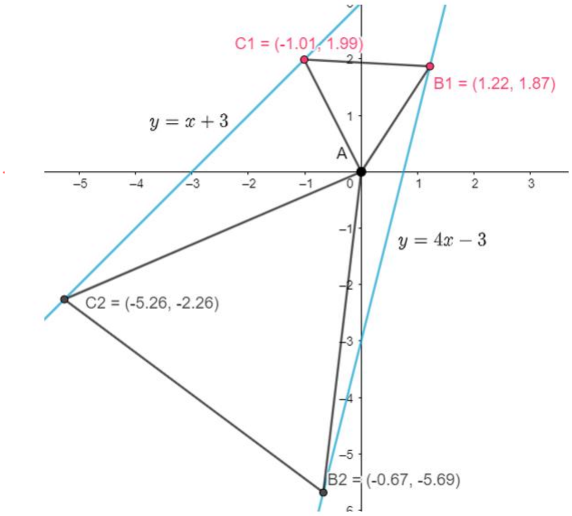
$$4a-3\,|\,a=\frac{3\cdot(-\sqrt{3}+27)}{11\cdot(5\cdot\sqrt{3}-3)} \quad 1.869929035$$

$$b+3\,|\,b=\frac{-27\cdot\sqrt{3}}{22}-\frac{69}{22} \quad \frac{-27\cdot\sqrt{3}}{22}-\frac{3}{22}$$

$$b+3\,|\,b=\frac{-27\cdot\sqrt{3}}{22}-\frac{69}{22} \quad -2.262062355$$

$$b+3\,|\,b=\frac{27\cdot\sqrt{3}}{22}-\frac{69}{22} \quad \frac{27\cdot\sqrt{3}}{22}-\frac{3}{22}$$

$$b+3\,|\,b=\frac{27\cdot\sqrt{3}}{22}-\frac{69}{22} \quad 1.989335082$$



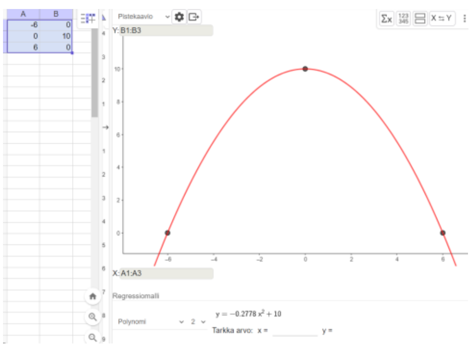
6. Erikoiskuljetus tunnelissa 12 p.

Suoran maantietunnelin poikkileikkaus on muodoltaan alaspäin aukeavan paraabelin osa. Tunnelin leveys tien pinnan tasolla on $12{,}0$ m ja korkeus korkeimmalla kohdalla $10{,}0$ m. Tunnelin läpi pitäisi viedä erikoiskuljetus, jonka takaprofiili on suorakulmio. Suorakulmion leveys on $4{,}0$ m ja korkeus $6{,}0$ m. Selvitä laskemalla, mahtuuko kuljetus ajamaan tunnelin läpi, jos

a) se saa ajaa keskellä tietä?

b) sen pitää pysyä omalla kaistallaan?

Valitaan koordinaatisto siten että y-akseli on korkeimman osan kohdalla. Muodostetaan paraabelin yhtälö pisteiden (-6,0), (0,10) ja (6,0) avulla. Käytetään Geogebraa



$$y = -0.2778\,x^2 + 10$$

a) Sijoitetaan kuljetus keskelle ja katsotaan tunnelin korkeus 2 m:n päässä keskiviivasta

$$y = -0.2778\,x^2 + 10$$

Tarkka arvo: x = 2 y = 8.8888888889

Koska tunneli on ko. kohdassa yli 6 m korkea niin kuljetus mahtuu.

b) Lasketaan tunnelin korkeus 4 m:n etäisyydellä keskiviivasta.

$$y = -0.2778\,x^2 + 10$$

Tarkka arvo: x = 4 y = 5.5555555556

Koska ko. kohdassa tunnelin korkeus on alle 6 m, niin kuljetus ei mahdu.

7. Siirtymät 12 p.

Pisteestä $A = (-2{,}5)$ siirrytään 12 yksikköä vektorin $\overline{u} = 4\overline{i} - 3\overline{j}$ suuntaan, jolloin tullaan pisteeseen P. Pisteestä $B = (1,-2)$ siirrytään 9 yksikköä vektorin $\overline{v} = -6\overline{i} + 8\overline{j}$ suuntaan, jolloin tullaan pisteeseen Q. Määritä pisteiden P ja Q välinen etäisyys.

Muodostetaan ensin u:n ja v:n yksikkövektorit $\overline{u}^0 = \frac{\overline{u}}{|\overline{u}|} = \frac{4\overline{i} - 3\overline{j}}{\sqrt{4^2 + (-2)''}} = \frac{4}{5}\overline{i} - \frac{3}{5}\overline{j}$

$\overline{v}^0 = \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} = -\frac{6}{10}\overline{i} + \frac{8}{10}\overline{j} = -\frac{3}{5}\overline{i} + \frac{4}{5}\overline{j}$, muodostetaan sitten pisteiden P ja Q paikkavektorit.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + 12 \cdot \overline{u}^0 = -2\overline{i} + 5\overline{j} + 12\left(\frac{4}{5}\overline{i} - \frac{3}{5}\overline{j}\right) = \frac{38}{5}\overline{i} - \frac{11}{5}\overline{j}$$

$$\overline{OQ} = \overline{OP} + 9 \cdot \overline{v}^0 = \overline{i} - 2\overline{j} + 9\left(-\frac{3}{5}\overline{i} + \frac{4}{5}\overline{j}\right) = -\frac{22}{5}\overline{i} + \frac{26}{5}\overline{j}$$

Pisteiden P ja Q koordinaatit ovat siis $P = \left(\frac{38}{5}, \frac{-11}{5}\right)$, $Q = \left(-\frac{22}{5}, \frac{26}{5}\right)$

Lasketaan lopuksi janan PQ pituus

$$|PQ| = \sqrt{\left(-\frac{22}{5} - \frac{38}{5}\right)^2 + \left(\frac{26}{5} + \frac{11}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{4969}}{5} = 14{,}098 \approx 14{,}1$$

8. Pisteen koordinaatit 12 p.

Piste $A = (1,2)$. Vektorin $\overline{AB}$ pituus on 10 ja se on kohtisuorassa vektoria $\overline{u} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$ vastaan. Määritä laskemalla pisteen B koordinaatit.

Olkoon piste $B = (x{,}y)$, tällöin vektori $\overline{AB} = (x-1)\,\overline{i} + (y-2)\,\overline{j}$, muodostetaan vektorin pituus

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$, jotta vektori

$\overline{AB}$ olisi kohtsuorassa vektoria $\overline{v}$ vastaan, niin niiden pistetulo pitää olla 0, määritetään

$\overline{AB} \cdot \overline{u} = (x-1) \cdot 3 + (y-2) \cdot 4$, muodostetaan pituudesta ja pistetulosta yhtälöpari

$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} & = 10 \\ 3x + 4y & = 11 \end{cases}$, ratkaistaan laskimella ja saadaan kaksi vastausta

$B = (-7{,}8) \;\vee\; B = (9,-4)$

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=10\\ 3x+4y=11\end{cases}\Bigg|_{x,\,y}$$

{{x=-7, y=8}, {x=9, y=-4}}

9. Ympyräparvi 12 p.

Tarkastellaan ympyräparvea $(x-(a+1))^2+(y-a^2)^2=a^2+1$, jossa parametri a käy läpi kaikki reaalilukuarvot. Mikä käyrä ympyröiden keskipisteistä muodostuu? Määritä käyrän yhtälö.

Koska ympyräparven yhtälö on keskipistemuodossa niin siitä nähdään että keskipisteen x-koordinaatti on $a+1$ ja y-koordinaatti on a^2. Annetaan a:lle arvot 0, 1 ja 2, jolloin saadaan kolme pistettä $(1{,}0)$, $(2{,}1)$ *ja* $(3{,}4)$.

Muodostetaan Geogebran polynomiregressiolla yhtälö, saadaa $y=x^2-2x+1$. Sijoitetaan x:n paikalle $a+1$ ja lasketaan y.

$y=(a+1)^2-2(a+1)+1=a^2+2a+1-2a-2+1=a^2$, saatiin keskipisteen y-koordinaatti, joten ympyräparven keskipisteet muodostavat paraabelin $y=x^2-2x+1$