Maa5 lisätehtäviä trigonometriasta (versio 1 13.1.2024)

1. Olkoon sektorin keskuskulman suuruus α (rad), säteen pituus r ja sektorin kaaren pituus b. Osoita, että vastaavan sektorin pinta-ala $A = \frac{1}{2}br$.

   Ratk.

   $A = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{\alpha r \cdot \pi r}{2\pi} = \frac{b \cdot \pi r}{2\pi} = \frac{br}{2} = \frac{1}{2}br.$

2. Piirrä origokeskiselle yksikköympyrälle pisteeseen $(1, 0)$ tangentti. Piirrä edelleen keskuskulman α, missä $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, määräämä kulman kylki, joka leikkaa yksikköympyrälle piirretyn tangentin. Määritä nk. tangenttipisteen koordinaatit kulman α avulla. Määritä kulman kyljen kulmakerroin, mitä huomaat?

   Ratk.

   Tangenttipisteen koordinaatit ovat $P = (1, y)$, missä $\tan\alpha = \frac{y}{1} = y$. Tästä saadaan koordinaateiksi $P = (1, \tan\alpha)$. Edelleen suoran kulmakertoimeksi voidaan määrittää $k = \frac{y-0}{1-0} = \frac{tan\alpha}{1} = \tan\alpha$. Huomaa, että suorakulmaisen kolmion avulla voidaan osoittaa, että $k = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

3. Sievennä.

   a) $\sin(\pi - x) + 2\sin(-x) - \sin(x + \pi)$

   b) $\cos(\pi + x) - \cos(x + 3\pi)$

   Ratk.

   a) $\sin(\pi - x) + 2\sin(-x) - \sin(x + \pi) = \sin x + 2(-\sin x) - (-\sin x) = \sin x - 2\sin x + \sin x = 0.$

   b) $\cos(\pi + x) - \cos(x + 3\pi) = -\cos x - \cos(x + \pi + 2\pi) = -\cos x - \cos(x + \pi) = -\cos x - (-\cos x) = 0.$

4. Osoita, että

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{2}{\cos x}.$$

   Ratk. Aloitetaan laventamalla termit samannimisiksi, joilloin osoittajat voidaan yhdistää.

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\cos x(1 + \sin x) + \cos x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$\frac{\cos x + \sin x\cos x + \cos x - \sin x\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}.$$

5. Osoita hyödyntäen sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoja, että $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ja $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Näytä edelleen, että $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

   Ratk.

   $\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x\cos x + \cos x\sin x = 2\sin x\cos x.$

   $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$

   Edelleen $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ja trigonometrian peruskaava $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, jolloin

   $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ ja

   $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$

6. Osoita edellisen tehtävän avulla, että $\tan 2x = \frac{2\ tan x}{1-\tan^2 x}$.

   Ratk.

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x(2\sin x \cdot \frac{1}{\cos x})}{\cos^2 x(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x})} = \frac{2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

7. Laske lausekkeen $\cos 4x$ tarkka arvo, kun $\cos x = -\frac{2}{3}$.

   Ratk.

   $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \cdot (-\frac{2}{3})^2 - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$.

   $\cos 4x = \cos(2 \cdot 2x) = 2\cos^2 2x - 1 = 2 \cdot (-\frac{1}{9})^2 - 1 = -\frac{79}{81}$.

8. Ratkaise yhtälöt.

   a) $1 + \sin 3x = (\sin x + \cos x)^2$

   b) $\sin x + \cos x = 1$.

   Vihje: Kerro yhtälö puolittain luvulla $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja sovella sinin yhteenlaskukaavaa.

   Ratk.

   a)

$$1 + \sin 3x = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x$$

$$1 + \sin 3x = 1 + \sin 2x$$

$$\sin 3x = \sin 2x$$

$$3x = 2x + n \cdot 2\pi \text{ tai } 3x = (\pi - 2x) + n \cdot 2\pi$$

$$x = n \cdot 2\pi \text{ tai } x = \frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5},\ n \in \mathbb{Z}.$$

   b)

$$\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   Koska $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, saadaan

$$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   Nyt yhteenlaskukaavaa soveltaen saadaan

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \text{ tai } x + \frac{\pi}{4} = (\pi - \frac{\pi}{4}) + n \cdot 2\pi$$

$$x = n \cdot 2\pi \text{ tai } x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

9. Ratkaise yhtälöt.
   a) $\cos 2x = 2\cos x - 1$.
   b) $\tan x = 2\sin x$.
   Ratk.
   a)

$$\cos 2x = 2\cos x - 1$$

$$2\cos^2 x - 1 = 2\cos x - 1$$

$$2\cos^2 x - 2\cos x = 0$$

$$2\cos x(\cos x - 1) = 0$$

$$2\cos x = 0 \text{ tai } \cos x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \text{ tai } x = n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

   b)

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$\sin x = 2\sin x\cos x$$

$$\sin x = \sin 2x$$

$$x = 2x + n \cdot 2\pi \text{ tai } x = \pi - 2x + n \cdot 2\pi$$

$$x = -n \cdot 2\pi \text{ tai } x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$$

10. Ratkaise yhtälöt.

a) $\cos x = \sqrt{3}\sin x$.

b) $\sqrt{3}(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2\sin x\cos x = 0$.

Ratk.

a)

$$\cos x = \sqrt{3}\sin x \quad || : \cos x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$$

$$1 = \sqrt{3}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} \quad || : \sqrt{3}$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan x = \tan\frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n\cdot\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

b)

$$\sqrt{3}\cdot\cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = \sqrt{3}\cos 2x \quad || : \cos 2x \neq 0,\ x \neq \pm\frac{\pi}{4} + n\cdot\pi$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \sqrt{3}$$

$$\tan 2x = \sqrt{3}$$

$$\tan 2x = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + n\cdot\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n\cdot\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$