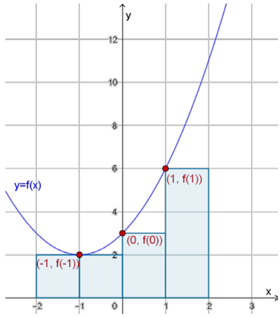
K1

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ ja väli on $[-2, 2]$. Kun väli jaetaan neljään osaväliin, niin yhden osavälin pituus on

$$d = \frac{2-(-2)}{4} = 1.$$

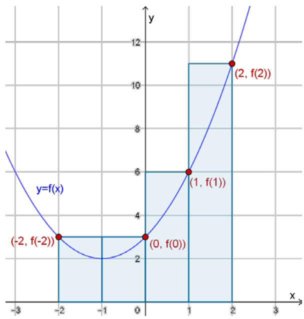
a) Lasketaan alasumma

$$\begin{aligned} s_4 &= \sum_{k=1}^{4} m_k d \\ &= f(-1)d + f(-1)d + f(0)d + f(1)d \\ &= 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 6\cdot 1 \\ &= 13 \end{aligned}$$



b) Lasketaan yläsumma

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{k=1}^{4} M_k d \\ &= f(-2)d + f(0)d + f(1)d + f(2)d \\ &= 3\cdot 1 + 3\cdot 1 + 6\cdot 1 + 11\cdot 1 \\ &= 23 \end{aligned}$$



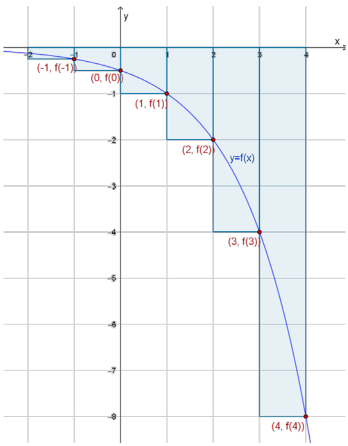
Vastaus a) 13
b) 23

K2

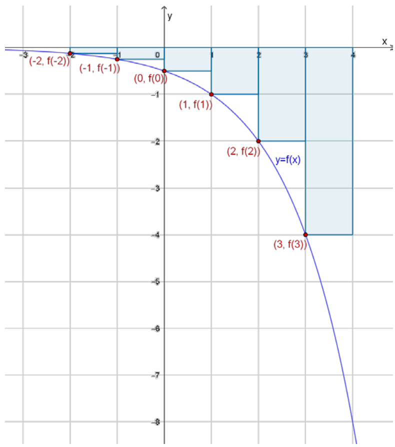
$f(x) = -2^{x-1}$ ja väli on $[-2, 4]$. Kun väli jaetaan kuuteen osaväliin, niin yhden osavälin pituus on

$$d = \frac{4-(-2)}{6} = 1.$$

Alasumma



Yläsumma



a) Lasketaan ala- ja yläsumma

$$\begin{aligned} s_6 &= \sum_{k=1}^{6} m_k d \\ &= f(-1)d + f(0)d + f(1)d + f(2)d + f(3)d + f(4)d \\ &= -2^{-2}\cdot 1 - 2^{-1}\cdot 1 - 2^{0}\cdot 1 - 2^{1}\cdot 1 - 2^{2}\cdot 1 - 2^{3}\cdot 1 \\ &= -15,75 \end{aligned}$$

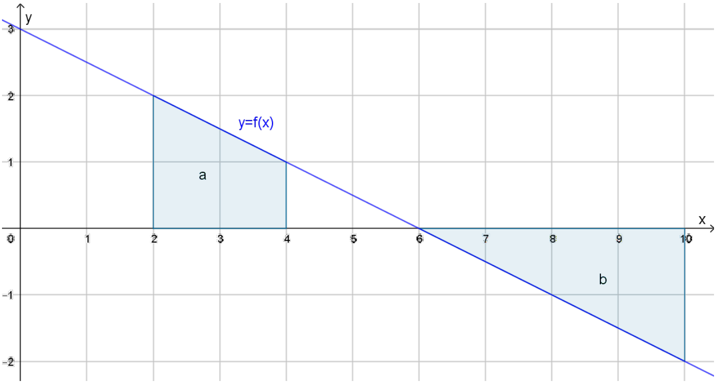
$$S_6 = \sum_{k=1}^{6} M_k d$$
$$= f(-2)d + f(-1)d + f(0)d + f(1)d + f(2)d + f(3)d$$
$$= -2^{-3} \cdot 1 - 2^{-2} \cdot 1 - 2^{-1} \cdot 1 - 2^{0} \cdot 1 - 2^{1} \cdot 1 - 2^{2} \cdot 1 - 2^{3} \cdot 1$$
$$= -7{,}875$$

b) Funktion f arvot ovat välillä $\left[-2, 4\right]$ negatiivisia, jolloin ala- ja yläsumma antavat arvion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan vastaluvulle. Pinta-alan vastaluku on lukujen $-15{,}75$ ja $-7{,}875$ välissä, joten A on lukujen $7{,}875$ ja $15{,}75$ välissä. Kokonaislukujen tarkkuudella A on lukujen 7 ja 16 välissä.

Vastaus a) $s_6 = -15{,}75$ ja $S_6 = -7{,}875$
b) lukujen 7 ja 16 välissä

K3

Hyödynnetään integraalin ja pinta-alan yhteyttä.



a) Kuvaajan ja x-akselin rajaama alue on puolisuunnikas ja se sijaitsee x-akselin yläpuolella. Määrätty integraali on siis yhtä suuri kuin alueen pinta-ala.

$$\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = \frac{2+1}{2}\cdot 2 = 3$$

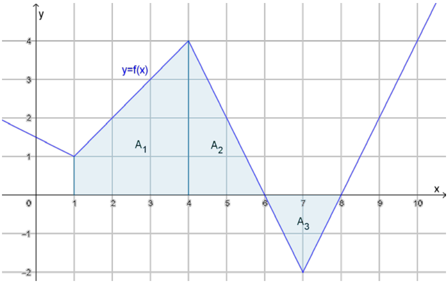
b) Kuvaajan ja x-akselin rajaama alue on suorakulmainen kolmio ja se sijaitsee x-akselin alapuolella. Määrätty integraali on siis yhtä suuri kuin alueen pinta-alan vastaluku.

$$\int_6^{10} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot(10-6)\cdot 2 = -4$$

Vastaus a) 3
b) -4

K4

Hyödynnetään integraalin ja pinta-alan yhteyttä.



a) Kuvaajan ja x-akselin rajaama alue A_1 on puolisuunnikas ja x-akselin yläpuolella.

$$\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1+4}{2}\cdot 3 = 7\frac{1}{2}$$

b) Kuvaajan ja x-akselin rajaama alue muodostaa kaksi kolmiota, joista A_2 on x-akselin yläpuolella ja A_3 sen alapuolella.

$$\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x = A_2 - A_3$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2$$

$$= 2$$

c) $$\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x}_{a)} + \underbrace{\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x}_{b)} = 7\frac{1}{2} + 2 = 9\frac{1}{2}$$

Vastaus a) $7\frac{1}{2}$

b) 2

c) $9\frac{1}{2}$

K5

Hyödynnetään integraalin ja pinta-alan yhteyttä. Jos alue on x-akselin yläpuolella, niin integraalin arvo tuolla välillä on yhtä suuri kuin pinta-ala. Jos alue on x-akselin alapuolella, niin integraalin arvo on yhtä suuri kuin pinta-alan vastaluku.
Lisäksi tiedetään, että $A_1 = A_4$ ja $A_2 = A_3$.

a) $$\int_{-4}^{6} f(x)\mathrm{d}x = \cancel{A_1} - \cancel{A_2} + \cancel{A_3} - \cancel{A_4} + A_5 = 10$$

b) $$\begin{aligned}\int_{-4}^{5} f(x)\mathrm{d}x - \int_{2}^{5} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-4}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{5} f(x)\mathrm{d}x - \int_{2}^{5} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-4}^{2} f(x)\mathrm{d}x \\ &= A_1 - \cancel{A_2} + \cancel{A_3} \\ &= 5\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\int_{-2}^{4} 2f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{2} f(x)\mathrm{d}x &= 2\int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x - \int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x \\ &= 2\left(-\cancel{A_2} + \cancel{A_3} - A_4\right) - \left(-A_4 + A_5\right) \\ &= -A_4 - A_5 \\ &= -5 - 10 \\ &= -15\end{aligned}$$

Vastaus a) 10
b) 5
c) −15

K6

Muokataan lausekkeita määrätyn integraalin laskusääntöjen mukaisesti niin, että voidaan hyödyntää tunnettuja arvoja.

a) $\int_{-6}^{6} \left(x^3 - 2x^2 + 3x - 4\right) dx$

$$= \int_{-6}^{6} x^3 dx + \int_{-6}^{6} -2x^2 dx + \int_{-6}^{6} 3x dx + \int_{-6}^{6} -4 dx$$

$$= \int_{-6}^{6} x^3 dx - 2\int_{-6}^{6} x^2 dx + 3\int_{-6}^{6} x dx - 4\int_{-6}^{6} 1 dx$$

$$= 0 - 2 \cdot 144 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 12$$

$$= -336$$

b)

$$\int_{-6}^{0} \left(4x^3 + 2x\right) dx - 2\int_{6}^{0} \left(2x^3 + x\right) dx$$

$$= \int_{-6}^{0} 4x^3 dx + \int_{-6}^{0} 2x dx + 2\left(\int_{0}^{6} 2x^3 dx + \int_{0}^{6} x dx\right)$$

$$= 4\int_{-6}^{0} x^3 dx + 2\int_{-6}^{0} x dx + 4\int_{0}^{6} x^3 dx + 2\int_{0}^{6} x dx$$

$$= 4\int_{-6}^{6} x^3 dx + 2\int_{-6}^{6} x dx$$

$$= 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0$$

$$= 0$$

c)

$$\int_{-6}^{8}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\mathrm{d}x+\int_{8}^{11}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\mathrm{d}x-\int_{6}^{11}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-6}^{11}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\mathrm{d}x-\int_{6}^{11}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-6}^{11}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\mathrm{d}x+\int_{11}^{6}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-6}^{6}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-6}^{6}x^3\mathrm{d}x+\int_{-6}^{6}x^2\mathrm{d}x$$

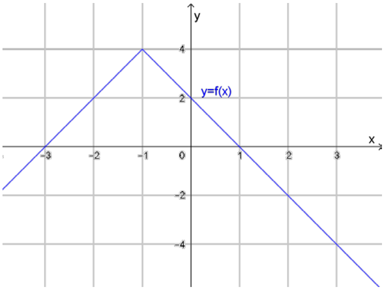
$$=\frac{1}{3}\cdot 0+144$$

$$=144$$

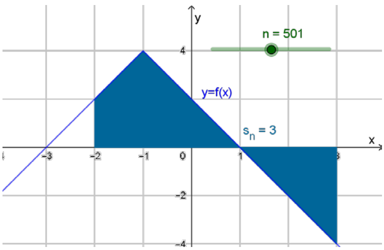
Vastaus a) -336
b) 0
c) 144

K7

a) Piirretään geometriaohjelmalla.



b) Alasumma voidaan määrittää GeoGebrassa komennolla
`Alasumma(f,-2,3,n)`,
missä osavälien määrää n voidaan muuttaa liukukytkimellä.



Osavälien määrän kasvaessa alasumma lähestyy arvoa 3,0.

c) Alasumma on nyt laskettava kahdessa osassa, jolloin välillä $[-2,1]$ ala $A_1 = s_n$ ja välillä $[1,3]$ ala $A_2 = |s_n|$.
`A1=Alasumma(f,-2,1,n)`
`A2=abs(Alasumma(f,1,3,n))`.
`A=A1+A2`,
Osavälien määrän kasvaessa `A1` lähestyy arvoa 7,0 ja `A2` arvoa 4,0, jolloin summa `A1+A2` lähestyy arvoa 11,0.

Vastaus b) 3,0

c) 11,0

K8

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = (5 + x^4)^3$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3(5 + x^4)^2 \cdot \mathrm{D}(5 + x^4) \\ &= 3(5 + x^4)^2 \cdot 4x^3 \\ &= 12x^3(x^4 + 5)^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vastaus On osoitettu, että $F'(x) = f(x)$, joten funktio F on funktion f integraalifunktio.

K9

a) Funktion f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x$, sillä

$$\begin{aligned} F_0'(x) &= \mathrm{D}(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x + 1 \\ &= 2x^3 - 4x + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Tällöin kaikki integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0(x) + C \\ &= \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x + C \end{aligned}$$

b) Funktion f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = (1-\pi)x$, sillä

$$\begin{aligned} F_0'(x) &= \mathrm{D}((1-\pi)x) \\ &= 1 - \pi \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Tällöin kaikki integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0(x) + C \\ &= (1-\pi)x + C \end{aligned}$$

Vastaus a) $F(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2+x+C$

b) $F(x)=(1-\pi)x+C$

K10

a) Funktion f eräs integraalifunktio on $F_0(x)=\frac{1}{3}x^3+x$, sillä

$$\begin{aligned}F_0'(x)&=\mathrm{D}(\tfrac{1}{3}x^3+x)\\&=x^2+1\\&=f(x)\end{aligned}$$

b) Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int (x^2+1)\,\mathrm{d}x\\&=F_0(x)+C\\&=\frac{1}{3}x^3+x+C\end{aligned}$$

c) Integraalifunktion F kuvaaja kulkee pisteen $(3,-5)$ kautta, kun $F(3)=-5$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio C.

$$\begin{aligned}F(3)&=-5\\\frac{1}{3}\cdot 3^3+3+C&=-5\\9+3+C&=-5\\12+C&=-5\\C&=-17\end{aligned}$$

Kysytty integraalifunktio on $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x-17$.

Vastaus a) Esimerkiksi $F_0(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$

b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + C$

c) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 17$

K11

$$f(x)=\frac{2x^2-3}{5}=\frac{2}{5}x^2-\frac{3}{5}$$

Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int(\frac{2}{5}x^2-\frac{3}{5})\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x+C\\&=\frac{2}{15}x^3-\frac{3}{5}x+C\end{aligned}$$

Integraalifunktion F kuvaaja kulkee pisteen $(-5, 1)$ kautta, kun $F(-5)=1$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio C.

$$\begin{aligned}F(-5)&=1\\\frac{2}{15}\cdot(-5)^3-\frac{3}{5}\cdot(-5)+C&=1\\-\frac{10}{15}\cdot25+3+C&=1\\-\frac{2}{3}\cdot25+C&=-2\\C&=-\frac{6}{3}+\frac{50}{3}\\C&=\frac{44}{3}\end{aligned}$$

Kysytty integraalifunktio on $F(x)=\frac{2}{15}x^3-\frac{3}{5}x+\frac{44}{3}$.

Vastaus $\quad F(x)=\frac{2}{15}x^3-\frac{3}{5}x+\frac{44}{3}$

K12

Tutkitaan, onko $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = x\sin x + \cos x$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}(x\sin x + \cos x) \\ &= 1\cdot \sin x + x\cos x - \sin x \\ &= x\cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vastaus On

K13

Funktion $f(x) = 3x^2 - 6$ integraalifunktiot ovat

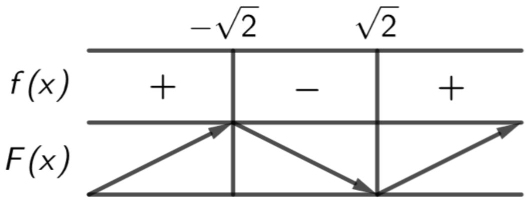
$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int (3x^2 - 6)\,\mathrm{d}x \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 6x + C \\ &= x^3 - 6x + C \end{aligned}$$

Integraalifunktion ääriarvoja voidaan tarkastella funktion f avulla, koska $F'(x) = f(x)$.

Määritetään derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 0 \\ f(x) &= 0 \\ 3x^2 - 6 &= 0 \\ 3x^2 &= 6 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolloin nollakohtien välissä se saa negatiivisia arvoja. Laaditaan kulkukaavio:



Kulkukaaviosta nähdään, että funktiolla $F(x)$ on maksimikohta $x = -\sqrt{2}$, jossa maksimiarvo on -6, joten

$$\begin{aligned} F(-\sqrt{2}) &= -6 \\ (-\sqrt{2})^3 - 6\cdot(-\sqrt{2}) + C &= -6 \\ -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + C &= -6 \\ C &= -6 - 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Siis kysytty integraalifunktio on $F(x) = x^3 - 6x - 6 - 4\sqrt{2}$.

Vastaus $\quad F(x) = x^3 - 6x - 6 - 4\sqrt{2}$

K14

a) $\int_2^6 4x\,\mathrm{d}x = \Big/_{2}^{6} 4\cdot\frac{1}{2}x^2$

$= \Big/_{2}^{6} 2x^2$

$= 2\cdot 6^2 - 2\cdot 2^2$

$= 2\cdot 36 - 8$

$= 72 - 8$

$= 64$

b) $\int_{-1}^{2} (2x^2 - 6)\,\mathrm{d}x = \Big/_{-1}^{2} (2\cdot\frac{1}{3}x^3 - 6x)$

$= \Big/_{-1}^{2} (\frac{2}{3}x^3 - 6x)$

$= \frac{2}{3}\cdot 2^3 - 6\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot(-1)^3 + 6\cdot(-1)$

$= \frac{16}{3} - 12 + \frac{2}{3} - 6$

$= \frac{18}{3} - 18$

$= 6 - 18$

$= -12$

Vastaus a) 64 b) -12

K15

Lasketaan ensin yhtälön vasemmalla puolella oleva määrätty integraali.

$$\int_a^{2a} (3-2x)\,\mathrm{d}x = \Big/_{a}^{2a} (3x - 2\cdot\frac{1}{2}x^2)$$
$$= \Big/_{a}^{2a} (3x - x^2)$$
$$= 3\cdot 2a - (2a)^2 - (3a - a^2)$$
$$= 6a - 4a^2 - 3a + a^2$$
$$= 3a - 3a^2$$

Ratkaistaan yhtälöstä a.

$$\int_a^{2a} (3-2x)\,\mathrm{d}x = 0$$
$$3a - 3a^2 = 0$$
$$3a(1-a) = 0$$
$$a = 0 \quad \text{tai} \quad 1 - a = 0$$
$$a = 1$$

Vastaus $a = 0$ tai $a = 1$

K16

Ratkaistaan milloin lauseke $2x - 4$ on epänegatiivinen.

$$\begin{aligned} 2x - 4 &\geq 0 \\ 2x &\geq 4 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

Ilmaistaan integroitava lauseke paloittain ilman itseisarvoja.

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4, & \text{kun } x \geq 2 \\ -(2x-4), & \text{kun } x < 2 \end{cases}$$

Lasketaan määrätty integraali. Integroitavan funktion lauseke vaihtuu kohdassa $x = 2$.

$$\begin{aligned} \int_0^6 |2x-4|\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 (-(2x-4))\,\mathrm{d}x + \int_2^6 (2x-4)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 (-2x+4)\,\mathrm{d}x + \int_2^6 (2x-4)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big/_0^2 (-2\cdot\frac{1}{2}x^2 + 4x) + \Big/_2^6 (2\cdot\frac{1}{2}x^2 - 4x) \\ &= \Big/_0^2 (-x^2 + 4x) + \Big/_2^6 (x^2 - 4x) \\ &= -2^2 + 4\cdot 2 - (-0^2 + 4\cdot 0) + 6^2 - 4\cdot 6 - (2^2 - 4\cdot 2) \\ &= -4 + 8 + 36 - 24 - 4 + 8 \\ &= 4 + 12 + 4 = 20 \end{aligned}$$

Vastaus 20

K17

Tehtävän funktiot ovat jatkuvia, kun $x > 0$.

a)

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int 3x^{-2}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\int x^{-2}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\cdot(-1)\cdot x^{-1} + C \\ &= -\frac{3}{x} + C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x &= 3\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\ln|x| + C \qquad |x| = x,\ \text{kun}\ x > 0 \\ &= 3\ln x + C\end{aligned}$$

Vastaus

a) $-\frac{3}{x} + C,\ \text{kun}\ x > 0$

b) $3\ln x + C,\ \text{kun}\ x > 0$

K18

Tehtävän funktiot ovat jatkuvia, kun $x > 0$.

a)

$$\int \sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x$$

uusi eksponentti $\frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

uusi eksponentti $\frac{4}{5}$

$$= \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$$

$$= \frac{4}{5}x^{1} \cdot x^{\frac{1}{4}} + C$$

$$= \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + C$$

b)

$$\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int 2x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

uusi eksponentti $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

uusi kerroin 2

$$= 2 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 4\sqrt{x} + C$$

Vastaus

a) $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+C,$ kun $x>0$

b) $4\sqrt{x}+C,$ kun $x>0$

K19

a)

$$\int (5x-2)^7 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5}\int 5(5x-2)^7 \mathrm{d}x \qquad s(x)=5x-2 \quad s'(x)=5$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}(5x-2)^8 + C \qquad u(x)=x^7 \qquad U(x)=\frac{1}{8}x^8$$

$$= \frac{1}{40}(5x-2)^8 + C$$

b)

$$\int x\sqrt{x^2+5}\mathrm{d}x$$

$$= \int x(x^2+5)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int 2x(x^2+5)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \qquad s(x)=x^2+5 \quad s'(x)=2x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}} + C \qquad u(x)=x^{\frac{1}{2}} \qquad U(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+5)\sqrt{x^2+5} + C$$

Vastaus

a) $\frac{1}{40}(5x-2)^8 + C$

b) $\frac{1}{3}(x^2+5)\sqrt{x^2+5} + C$

K20

a)

$$\int_2^3 (1-x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= -1\int_2^3 -1\cdot(1-x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= -1\ \Big/_2^3\ \frac{1}{3}(1-x)^3$$

$$= -\frac{1}{3}\ \Big/_2^3\ (1-x)^3$$

$$= -\frac{1}{3}\left((1-3)^3-(1-2)^3\right)$$

$$= \frac{7}{3}$$

b)

$$\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -1\int_2^3 \frac{-1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -1\ \Big/_2^3\ \ln|x-1|$$

$$= -1\cdot(\ln|3-1|-\ln|2-1|)$$

$$= -1\cdot(\ln 2-0)$$

$$= -\ln 2$$

c)

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_2^3 1\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_2^3\, 2(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big/_2^3\, 2\sqrt{1+x}$$

$$= 2(\sqrt{1+3}-\sqrt{1+2})$$

$$= 4-2\sqrt{3}$$

Vastaus

a) $\frac{7}{3}$

b) $-\ln 2$

c) $4-2\sqrt{3}$

K21

a) Voidaan.

$$\int e^{5x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int 5e^{5x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}e^{5x+1} + C$$

b) Ei voida. Sisäfunktion derivaattaa $2x$ ei saada muokattua ulkofunktion eteen.

c) Voidaan.

$$\int x^3 e^{x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4x^3 e^{x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{x^4} + C$$

d) Voidaan.

$$\int \frac{3}{e^x}\mathrm{d}x = \int 3e^{-x}\mathrm{d}x = -3\int -1\cdot e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$= -3e^{-x} + C = -\frac{3}{e^x} + C$$

Vastaus

a) $\frac{1}{5}e^{5x+1} + C$

b) ei voida

c) $\frac{1}{4}e^{x^4} + C$

d) $-\frac{3}{e^x} + C$

K22

Ratkaistaan funktion $f(x) = 5 - e^x$ nollakohta.

$$5 - e^x = 0$$
$$e^x = 5$$
$$x = \ln 5$$

Koska funktio f on epänegatiivinen välillä [0, ln 5], niin pinta-ala on määrätty integraali.

$$A = \int_0^{\ln 5} (5 - e^x)\,dx$$
$$= \bigg/_{0}^{\ln 5} (5x - e^x)$$
$$= (5\ln 5 - e^{\ln 5}) - (5 \cdot 0 - e^0)$$
$$= 5\ln 5 - 5 + 1$$
$$= 5\ln 5 - 4$$

Vastaus

$5\ln 5 - 4$

K23

a)

$$\int \sin(8x-1)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\int 8\sin(8x-1)\mathrm{d}x \qquad s(x)=8x-1 \quad s'(x)=8$$

$$= \frac{1}{8}(-\cos(8x-1))+C \qquad u(x)=\sin x \quad U(x)=-\cos x$$

$$= -\frac{1}{8}\cos(8x-1)+C$$

b) $\int (5\cos x+1)\mathrm{d}x = 5\sin x + x + C$

Vastaus

a) $-\frac{1}{8}\cos(8x-1)+C$

b) $5\sin x + x + C$

K24

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x - \cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= 2 \Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) - \frac{1}{2} \Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x$$

$$= -2(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}\left(\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) - \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \right)$$

$$= -2 \cdot (0 - \frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{2} \cdot (0 - 1)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

Vastaus

$$\sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

K25

a)

$$\int \sin x \cos^4 x \mathrm{d}x$$

$$= -1 \int -\sin x \cdot (\cos x)^4 \mathrm{d}x$$

$$= -1 \cdot \frac{1}{5}(\cos x)^5 + C$$

$$= -\frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

b)

$$\int \frac{\cos x}{3\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos x \cdot (\sin x)^{-2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot(\sin x)^{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{3\sin x} + C$$

Vastaus

a) $-\frac{1}{5}\cos^5 x + C$

b) $-\frac{1}{3\sin x} + C$, kun $0 < x < \pi$

K26

Funktio $f(x) = 4e^x - e^{3x}$ on kaikkialla jatkuva.

Määritetään integraalifunktiot (laskimella).

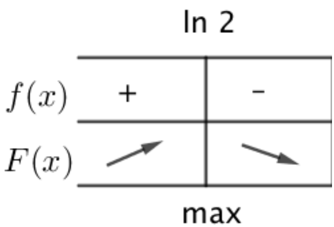
$$F(x) = 4e^x - \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Tutkitaan funktion F kulkua derivaattafunktion f avulla.
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat (laskimella).

$$\begin{aligned}
4e^x - e^{3x} &= 0 \\
e^x(4 - e^{2x}) &= 0 \\
e^x = 0 \quad \text{tai} \quad 4 - e^{2x} &= 0 \\
\text{ei ratk.} \qquad e^{2x} &= 4 \\
2x &= \ln 4 \\
x &= \ln 2 \approx 0,69
\end{aligned}$$

Laaditaan funktion F kulkukaavio.

x	$f(x)$	merkki
0	3	+
1	–9,21...	–



Funktio F saa suurimman arvonsa kohdassa $x = \ln 2$.
Suurimman arvon tulee olla 5.

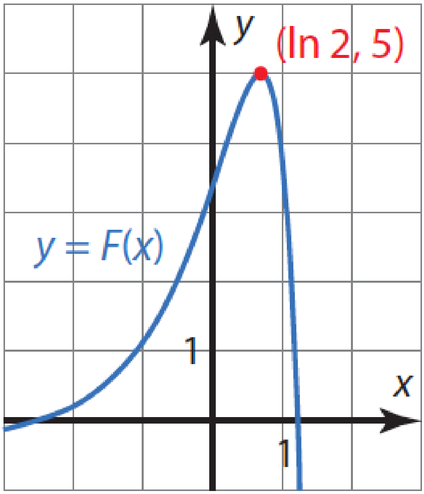
Ratkaistaan C.

$$F(\ln 2) = 5$$

$$4e^{\ln 2} - \frac{1}{3}e^{3\ln 2} + C = 5$$

$$8 - \frac{8}{3} + C = 5$$

$$C = -\frac{1}{3}$$



Saadaan

$$F(x) = 4e^{x} - \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}.$$

Vastaus

$$F(x) = 4e^{x} - \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}$$

K27

a) Funktio $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$ on määritelty, kun $x \neq \dfrac{1}{2}$.

Määritetään integraalifunktio välillä $x > \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C && 2x-1>0,\ \text{kun}\ \ x>\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\ln(2x-1) + C \end{aligned}$$

Määritetään integraalifunktio välillä $x < \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|2x-1| + D && 2x-1<0,\ \text{kun}\ \ x<\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\ln(1-2x) + D \end{aligned}$$

b) Määritetään integroimisvakiot.

Piste $(0, 0)$ kuuluu alueeseen $x < \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ \frac{1}{2}\ln(1-2\cdot 0) + D &= 0 \\ D &= 0 \end{aligned}$$

Piste $(1, 5)$ kuuluu alueeseen $x > \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} F(1) &= 5 \\ \frac{1}{2}\ln(2\cdot 1-1) + C &= 5 \\ C &= 5 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(2x-1) + C, & \text{kun } x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\ln(1-2x) + D, & \text{kun } x < \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(2x-1) + 5, & \text{kun } x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\ln(1-2x), & \text{kun } x < \frac{1}{2} \end{cases}$

K28

a) Sievennetään funktion lauseketta.

$$\frac{\ln x^2}{x} = \frac{2\ln x}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

Funktio on määritelty ja jatkuva, kun $x > 0$.

Integroidaan.

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^1\,\mathrm{d}x \qquad s(x) = \ln x \qquad s'(x) = \frac{1}{x}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \qquad u(x) = x^1 \qquad U(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$= (\ln x)^2 + C$$

Saadaan $(\ln x)^2 + C$, missä $x > 0$.

b) Sievennetään funktion lauseketta.

$$\frac{\tan^2 x}{\sin x} = (\tan x)^2 \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \sin x \cdot (\cos x)^{-2}$$

Funktio on määritelty ja jatkuva, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Integroidaan.

$$\int \frac{\tan^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \sin x \cdot (\cos x)^{-2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -1\int -\sin x \cdot (\cos x)^{-2}\,\mathrm{d}x \qquad s(x) = \cos x \qquad s'(x) = -\sin x$$

$$= -1 \cdot (-1) \cdot (\cos x)^{-1} + C \qquad u(x) = x^{-2} \qquad U(x) = -1 \cdot x^{-1}$$

$$= \frac{1}{\cos x} + C$$

Vastaus

a) $(\ln x)^2 + C$, missä $x > 0$

b) $\dfrac{1}{\cos x} + C$, missä $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

K29

a) Funktio $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}$.

Nimittäjä $1+|x|>0$ kaikilla x.

Funktio f on määritelty ja jatkuva kaikilla x.

Poistetaan itseisarvomerkit.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, \text{ kun } x\ge 0\\[2ex] \dfrac{1}{1-x}, \text{ kun } x<0\end{cases}$$

b) Lasketaan integraali.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -1 \int_{-1}^{0} \frac{-1}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -1 \mathop{/}_{-1}^{0} \ln(1-x) + \mathop{/}_{0}^{1} \ln(1+x)$$

$$= -1 \cdot \big(\ln(1-0) - \ln(1-(-1))\big) + \ln(1+1) - \ln(1+0)$$

$$= -1 \cdot \big(0 - \ln 2\big) + \ln 2 - 0$$

$$= 2\ln 2$$

Vastaus

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, \text{ kun } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{1-x}, \text{ kun } x < 0 \end{cases}$

b) 2 ln 2

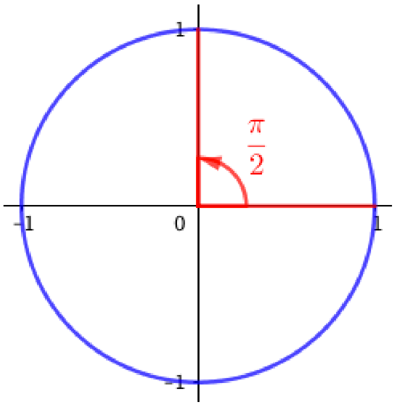
K30

a) Olkoon $f(x) = |\cos x|$ välillä $]0, \pi[$.

Ratkaistaan funktion f nollakohdat.

$$|\cos x| = 0$$
$$\cos x = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ missä } n \text{ on kokonaisluku}$$

Välillä $]0, \pi[$ on vain nollakohta $x = \frac{\pi}{2}$.



b) Kun $0 < x \le \frac{\pi}{2}$, niin $\cos x \ge 0$ ja $|\cos x| = \cos x$.

Kun $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, niin $\cos x < 0$ ja $|\cos x| = -\cos x$.

Saadaan

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kun } 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \text{kun } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

c) Määritetään integraalifunktio välillä $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

$$F(x) = \int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$$

Ratkaistaan vakio C.

$$\begin{aligned} F(\frac{\pi}{6}) &= -\frac{1}{2} \\ \sin\frac{\pi}{6} + C &= -\frac{1}{2} \\ C &= -1 \end{aligned}$$

Määritetään integraalifunktio välillä $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

$$F(x) = \int -\cos x \mathrm{d}x = -\sin x + D$$

Ratkaistaan vakio D. Koska funktio F on derivoituva, sen tulee olla jatkuva myös kohdassa $\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} F(x) = F(\frac{\pi}{2})$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} (-\sin x + D) = \sin\frac{\pi}{2} - 1$$

$$-1 + D = 1 - 1$$

$$D = 1$$

Integraalifunktio on siis

$$F(x)=\begin{cases}\sin x-1, & \text{kun } 0<x\le\frac{\pi}{2}\\ -\sin x+1, & \text{kun } \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

Vastaus

a) $x=\frac{\pi}{2}$

b) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{kun } 0<x\le\frac{\pi}{2}\\ -\cos x, & \text{kun } \frac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases}\sin x-1, & \text{kun } 0<x\le\frac{\pi}{2}\\ -\sin x+1, & \text{kun } \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$

K31

Aina kun $f(x) \neq 0$, pätee

$$\int f'(x)f(x)\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}f(x)^2 = x + C$$

$$f(x)^2 = 2x + 2C$$

$$f(x) = \pm\sqrt{2x + 2C}$$

Koska $f(2) = 1$, niin $f(x) = \sqrt{2x + 2C}$.

Ratkaistaan vakio $2C$.

$$f(2) = 1$$

$$\sqrt{2 \cdot 2 + 2C} = 1$$

$$2C = -3$$

Saadaan $f(x) = \sqrt{2x - 3}$. Funktio on määritelty, kun $x \geq \frac{3}{2}$.

Vastaus

$f(x) = \sqrt{2x - 3}$, missä $x \geq \frac{3}{2}$

K32

a) Koska hyttysten määrän kasvunopeus $f'(x)$ on suoraan verrannollinen hyttysten määrään $f(x)$, niin niiden suhde on vakio k.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int k\mathrm{d}x$$

$$\ln|f(x)| = kx + C \qquad \text{Hyttysten määrä } f(x) \geq 0.$$

$$\ln f(x) = kx + C$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{kx+C}$$

$$= \mathrm{e}^{kx} \cdot \mathrm{e}^{C} \qquad D = \mathrm{e}^{C}$$

$$= D\mathrm{e}^{kx}$$

Ratkaistaan vakiot D ja k.

$$f(0) = 100$$
$$D \cdot \mathrm{e}^{0} = 100$$
$$D = 100$$

$$f(4) = 1000$$
$$100 \cdot \mathrm{e}^{4k} = 1000$$
$$\mathrm{e}^{4k} = 10$$
$$4k = \ln 10$$
$$k = \frac{\ln 10}{4}$$

Hyttysten määrän ajanhetkellä x tuntia tapahtuman alusta ilmaisee funktio $f(x) = 100\mathrm{e}^{\frac{\ln 10}{4}x}$.

b) Lasketaan hyttysten määrä ajanhetkellä $x = 5$.

$$f(5) = 100\mathrm{e}^{\frac{\ln 10}{4}\cdot 5} = 1778{,}28... \approx 1800$$

Vastaus

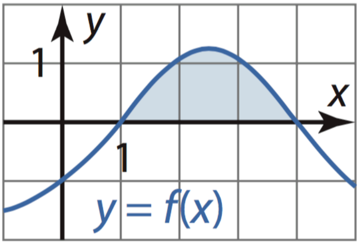
a) $f(x) = 100\mathrm{e}^{\frac{\ln 10}{4}x}$

b) noin 1800

K33

1) $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$

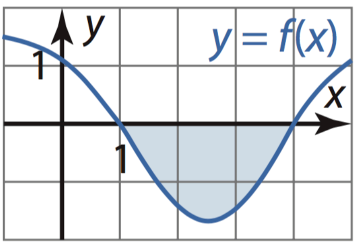
C



Perustelu: $f(x) \geq 0$ välillä $[1, 4]$.

2) $-\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$

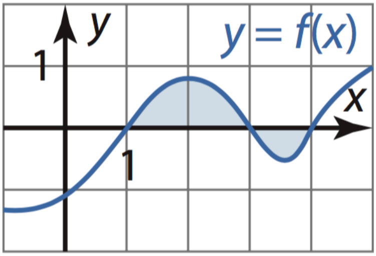
E



Perustelu: $f(x) \leq 0$ välillä $[1, 4]$.

3) $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x - \int_3^4 f(x)\mathrm{d}x$

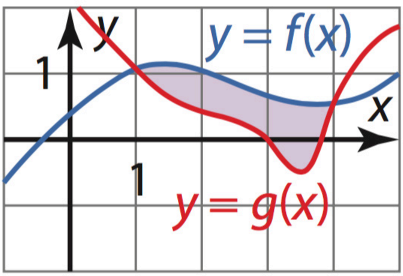
A



Perustelu: $f(x) \geq 0$ välillä $[1, 3]$ ja $f(x) \leq 0$ välillä $[3, 4]$.

4) $\int_1^4 \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$

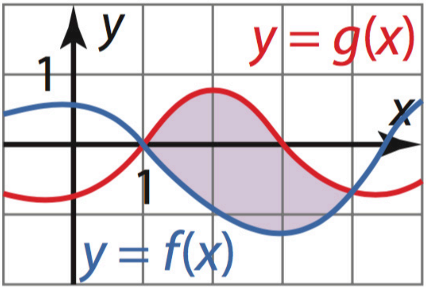
F



Perustelu: $f(x) \geq g(x)$ välillä $[1, 4]$.

5) $\displaystyle\int_1^4 \big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x$

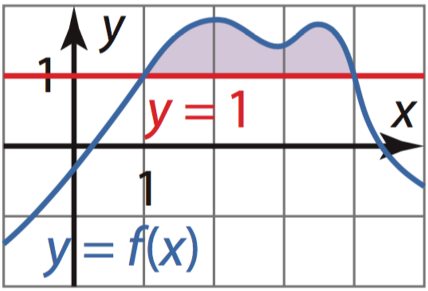
B



Perustelu: $g(x) \ge f(x)$ välillä $[1, 4]$.

6) $\displaystyle\int_1^4 \big(f(x)-1\big)\,\mathrm{d}x$

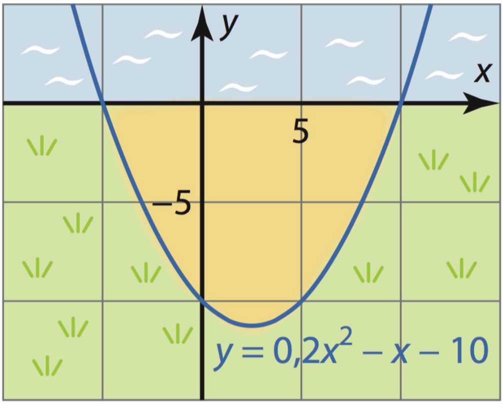
D



Perustelu: $f(x) \ge 1$ välillä $[1, 4]$.

Vastaus 1 – C, 2 – E, 3 – A, 4 – F, 5 – B, 6 – D

K34



Integroimisrajat saadaan paraabelin ja x -akselin leikkauskohdista.

$$0,2x^2 - x - 10 = 0$$
$$x = -5 \quad \text{tai} \quad x = 10$$

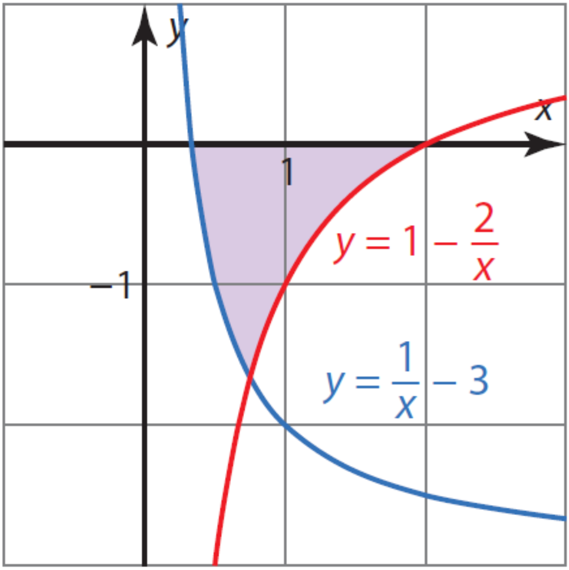
Välillä $[-5, 10]$ käyrä on x -akselin alapuolella. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= -\int_{-5}^{10} (0,2x^2 - x - 10)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{225}{2} \\ &= 112,5 \approx 110\ (\mathrm{m}^2) \end{aligned}$$

Vastaus 110 m^2

K35

a) Piirretään alueen kuva.



b) Integroimisrajat saadaan käyrien ja x-akselin leikkauskohdista sekä käyrien leikkauskohdasta.

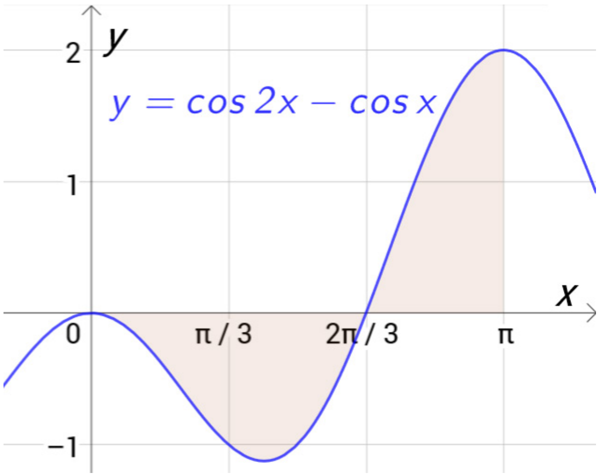
$\frac{1}{x}-3=0$ $x=\frac{1}{3}$	$1-\frac{2}{x}=0$ $x=2$	$\frac{1}{x}-3=1-\frac{2}{x}$ $x=\frac{3}{4}$

Välillä $[\frac{1}{3},\frac{3}{4}]$ aluetta rajaa käyrä $y=\frac{1}{x}-3$ ja välillä $[\frac{3}{4},\ 2]$ aluetta rajaa käyrä $y=1-\frac{2}{x}$. Alue on x-akselin alapuolella. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A=-\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{4}}(\frac{1}{x}-3)\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{3}{4}}^{2}(1-\frac{2}{x})\,\mathrm{d}x$$
$$=8\ln 2-4\ln 3\ \ (\approx 1{,}2)$$

Vastaus $8\ln 2-4\ln 3$

K36



Selvitetään käyrän ja x -akselin leikkauskohdat.

$$\cos 2x - \cos x = 0$$
$$\cos 2x = \cos x$$
$$2x = x + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 2x = -x + n \cdot 2\pi$$
$$x = n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 3x = n \cdot 2\pi$$
$$x = n \cdot \frac{2\pi}{3}$$

Leikkauskohdista vain $x = \frac{2\pi}{3}$ $(n = 1)$ kuuluu välille $[0, \pi]$.

Pinta-alaa rajaava käyrä saa tarkasteluvälillä sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, joten integroidaan osissa.

$$A = -\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} (\cos 2x - \cos x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (\cos 2x - \cos x)\,\mathrm{d}x$$

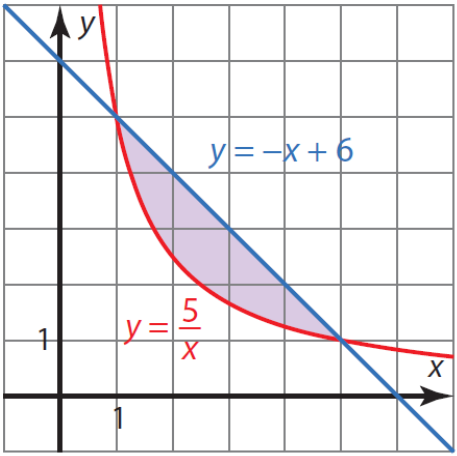
$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vastaus $\quad \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

K37

a) Piirretään käyrät sekä niiden rajaama alue.



b) Integrointirajat saadaan käyrien leikkauskohdista.

$$\frac{5}{x} = -x + 6$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = 5$$

Kuvan perusteella pinta-alaa rajaa yläpuolelta suora ja alapuolelta hyperbeli. Lasketaan alueen pinta-ala.

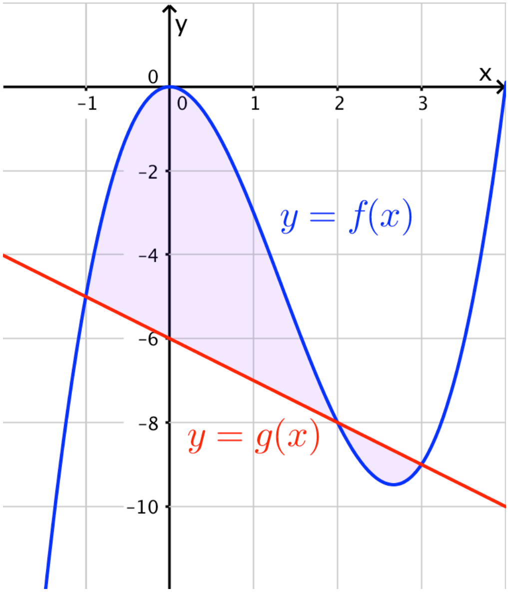
$$A = \int_1^5 \left(-x + 6 - \frac{5}{x}\right) \mathrm{d}x$$

$$= 12 - 5\ln 5 \;\; (\approx 3{,}95)$$

Vastaus $12 - 5\ln 5$

K38

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Integroimisrajat on funktioiden kuvaajien leikkauskohdat.

$$x^3 - 4x^2 = -x - 6$$
$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 2 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

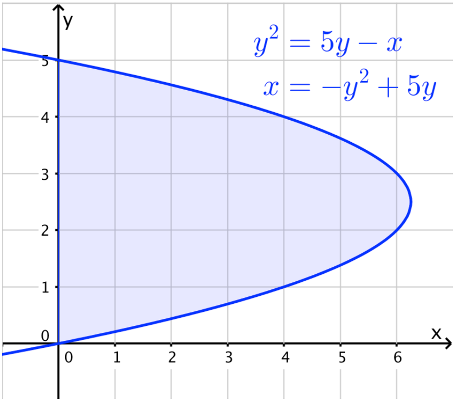
Kuvan perusteella välillä $[-1, 2]$ aluetta rajaa yläpuolelta funktion f kuvaaja ja alapuolelta funktion g kuvaaja. Välillä $[2, 3]$ aluetta rajaa yläpuolelta funktion g kuvaaja ja alapuolelta funktion f kuvaaja. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} (x^3 - 4x - (-x - 6))\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} (-x - 6 - (x^3 - 4x^2))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{2} (x^3 - 4x^2 + x + 6)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} (-x^3 + 4x^2 - x - 6)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{71}{6} = 11\frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Vastaus $11\frac{5}{6}$

K39

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Kuvaaja on vasemmalle aukeava paraabeli. Alueen pinta-ala saadaan integroimalla muuttujan y suhteen. Ratkaistaan käyrän yhtälöstä x.

$$y^2 = 5y - x$$
$$x = -y^2 + 5y$$

Integroimisrajat saadaan käyrän ja y -akselin leikkauskohdista.

$$-y^2 + 5y = 0$$
$$y = 0 \quad \text{tai} \quad y = 5$$

Lasketaan alueen pinta-ala.

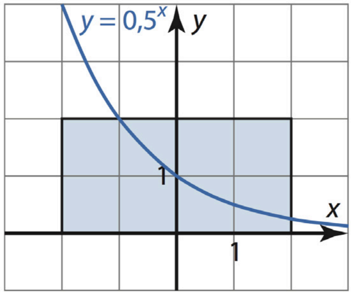
$$A = \int_0^5 (-y^2 + 5y)\,\mathrm{d}y = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$$

Vastaus $20\frac{5}{6}$

K40

Lasketaan suorakulmion pinta-ala.

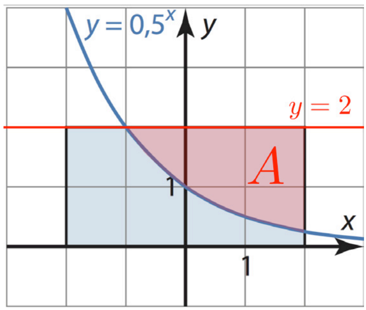
$A_s = 4 \cdot 2 = 8$



Ratkaistaan käyrän ja suorakulmiota ylhäältä rajoittavan suoran $y = 2$ leikkauskohta.

$$0{,}5^x = 2$$
$$x = -1$$

Käyrän yläpuolella oleva suorakulmion osa on suoran $y = 2$ ja käyrän $y = 0{,}5^x$ välillä $[-1, 2]$ rajaama alue. Lasketaan alueen pinta-ala.



$$A = \int_{-1}^{2} (2 - 0{,}5^x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 6 - \frac{7}{4\ln 2} \quad (= 3{,}4752...)$$

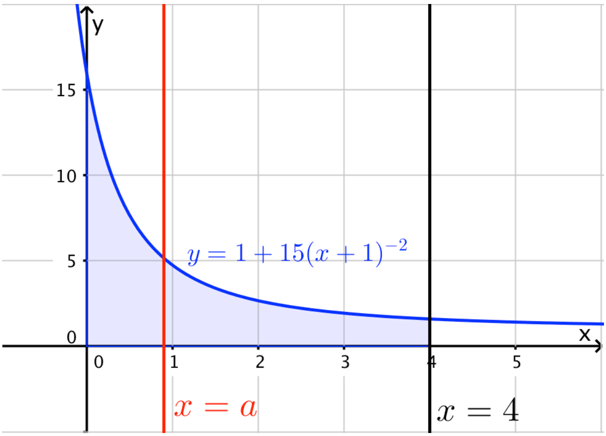
Lasketaan pinta-alojen suhde.

$$\frac{A}{A_s} = \frac{6 - \frac{7}{4\ln 2}}{8} = 0{,}4344... \approx 43\,\%$$

Vastaus 43 %

K41

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva. Alue voidaan jakaa kahteen osaan esimerkiksi y-akselin suuntaisella suoralla $x = a$ (missä $0 < a < 4$).



Käyrän ja x-akselin välillä $[0, a]$ rajaaman alueen pinta-ala tulee olla yhtä suuri kuin käyrän ja x-akselin välillä $[a, 4]$ rajaaman alueen pinta-ala. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$\int_0^a (1+15(x+1)^{-2})\,\mathrm{d}x = \int_a^4 (1+15(x+1)^{-2})\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{15}{a+1}+a+15 = \frac{15}{a+1}-a+1$$

Ratkaistaan laskimella.

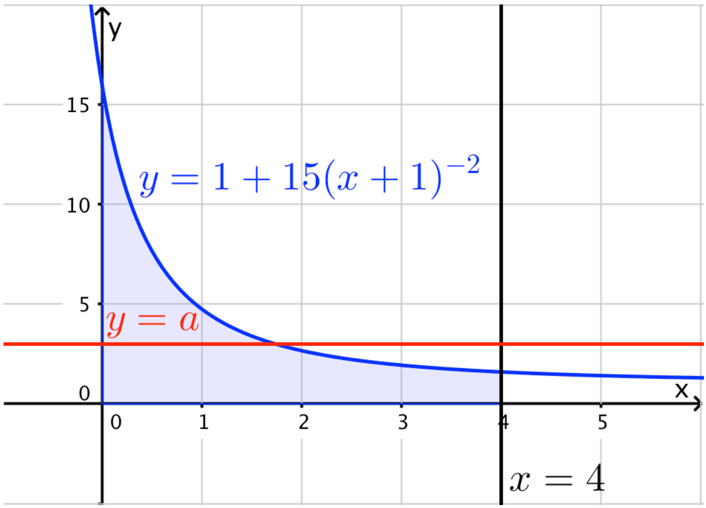
$a = -2\sqrt{6}-4$ $(\approx -8{,}9)$ tai $a = 2\sqrt{6}-4$ $(\approx 0{,}9)$

Koska $0 < a < 4$, niin $a = 2\sqrt{6}-4$. Siis alue voidaan jakaa kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan suoralla $x = 2\sqrt{6}-4$.

Vastaus Jaetaan alue pystysuoralla suoralla $x = 2\sqrt{6}-4$.

TAPA 2

Alue voidaan jakaa kahteen osaan myös vaakasuoralla suoralla $y = a$.



Ratkaistaan integrointia varten käyrän $y = 1 + 15(x+1)^{-2}$ ja suoran $y = a$ leikkauskohta.

$$1 + 15(x+1)^{-2} = a$$

$$x = -1 \pm \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{a-1}}$$

Koska $0 \le x \le 4$, niin $x = -1 + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{a-1}}$.

Käyrän $y = 1 + 15(x+1)^{-2}$ ja suoran $y = a$ rajaama alue tulee olla puolet koko pinta-alasta. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

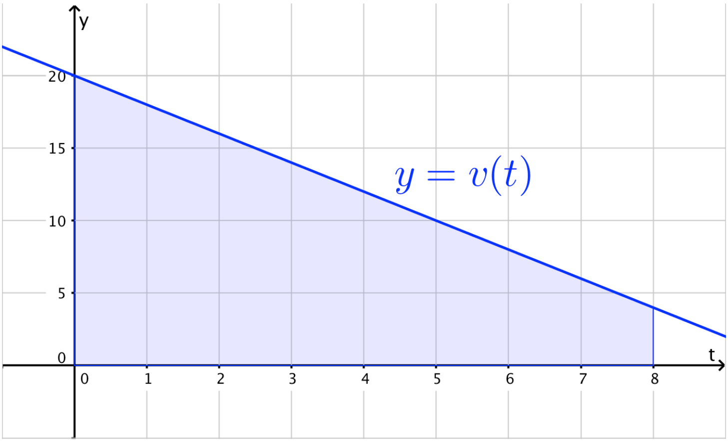
$$\int_0^{-1+\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{a-1}}} \left(1 + 15(x+1)^{-2} - a\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int_0^4 \left(1 + 15(x+1)^{-2}\right) \mathrm{d}x$$

$$a = 20 - 4\sqrt{15} \quad (\approx 4{,}5) \quad \text{tai} \quad a = 20 + 4\sqrt{15} \quad (\approx 35{,}5)$$

Kuvan perusteella näistä vain $a = -4\sqrt{15} + 20$ $(\approx 4{,}5)$ käy ratkaisuksi. Alue voidaan siis jakaa kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan myös suoralla $y = 20 - 4\sqrt{15}$.

K42

a) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion $v(t) = 20 - 2t$ kuvaajan ja t-akselin välillä $[0, 8]$ rajaama alue.

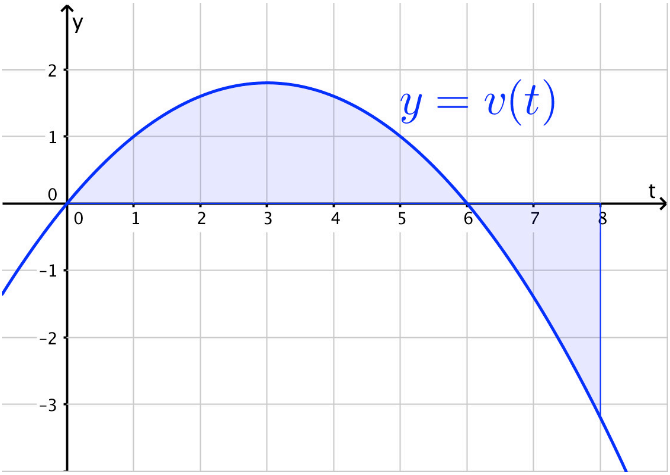


Lasketaan alueen pinta-ala.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^8 v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^8 (20 - 2t)\,\mathrm{d}t \\
&= 96
\end{aligned}
$$

Kappaleen kulkema matka on siis 96 m.

b) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion $v(t) = 20 - 2t$ kuvaajan ja t-akselin välillä $[0, 8]$ rajaama alue.



Määritetään inegrointia varten funktion v nollakohdat.

$$-0,2t^2 + 1,2t = 0$$

$$t = 0 \quad \text{tai} \quad t = 6$$

Tarkasteluvälillä funktio v saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, joten lasketaan alueen pinta-ala osissa.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^6 v(t)\,\mathrm{d}t - \int_6^8 v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^6 (-0,2t^2 + 1,2t)\,\mathrm{d}t - \int_6^8 (-0,2t^2 + 1,2t)\,\mathrm{d}t \\ &= 10,1 \end{aligned}$$

Kappaleen kulkema matka on siis $10,1 \text{ m} \approx 10 \text{ m}$.

Vastaus a) 96 m b) 10 m

Huomaa: b-kohdassa nopeus on aikavälillä [6, 8] negatiivinen. Silloin kappale liikkuu päinvastaiseen suuntaan kuin aikavälillä [0, 6]. Kappaleen kulkema matka on molempiin suuntiin edettyjen matkojen summa.

K43

Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

$$y = f(a) = \frac{1}{a}$$

Tangentti piirretään pisteeseen $(a, \frac{1}{a})$, missä $a > 0$.

Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k = f'(a)$. Derivoidaan funktio ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$k = f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

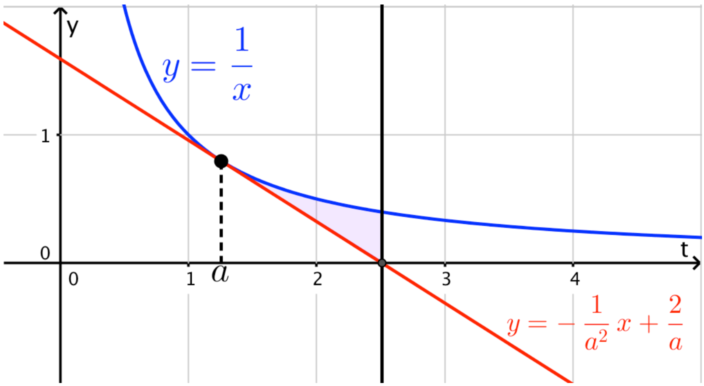
Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \qquad y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Määritetään tangentin ja x-akselin leikkauskohta.

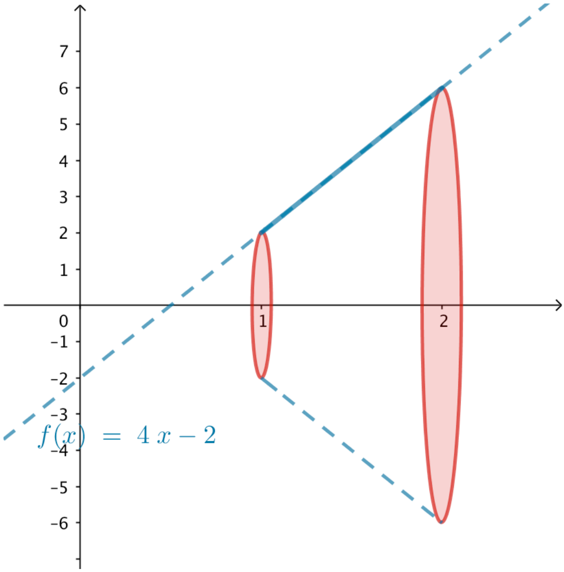
$$-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} = 0$$
$$x = 2a$$

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_a^{2a} \left(\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}\right)\right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_a^{2a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a^2}x - \frac{2}{a}\right) \mathrm{d}x$$
$$= \ln 2 - \frac{1}{2}$$

Alueen pinta-ala on siis aina $\ln 2 - \frac{1}{2}$, joten pinta-ala ei riipu kohdasta, johon tangentti piirretään. □

K44



$$V = \pi\int_1^2 (4x-2)^2 \, dx$$

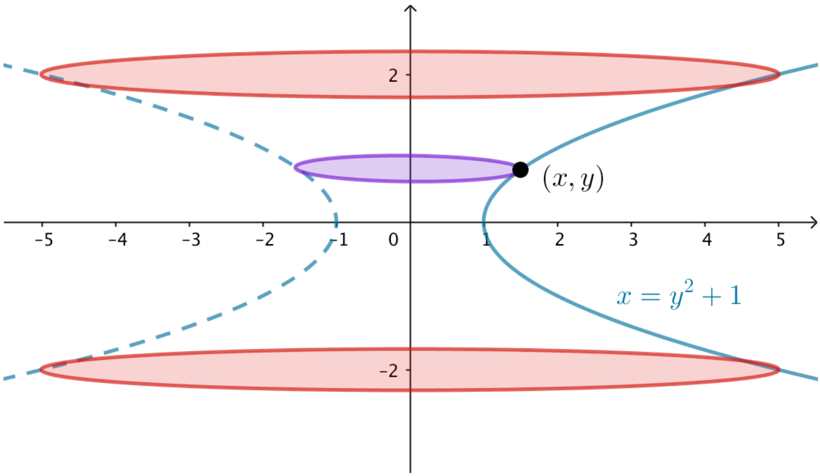
$$= \frac{52}{3}\pi$$

$$= 17\frac{1}{3}\pi$$

Vastaus

$17\frac{1}{3}\pi$

K45



$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-2}^{2} x^2 \mathrm{d}y \\
&= \pi \int_{-2}^{2} \left(y^2 + 1\right)^2 \mathrm{d}y \\
&= \frac{412}{15}\pi \\
&= 27\frac{7}{15}\pi
\end{aligned}
$$

Vastaus

$27\frac{7}{15}\pi$

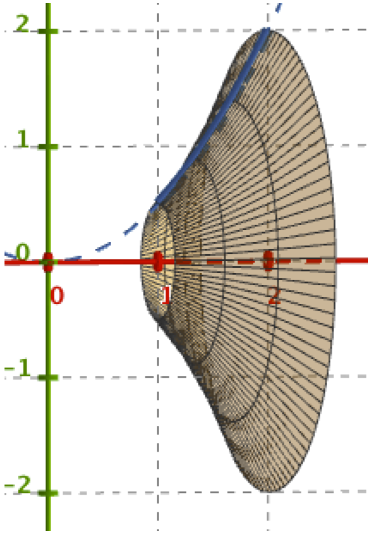
K46

a) $V=\pi\int_1^2 y^2\,\mathrm{d}x$

$=\pi\int_1^2 (\frac{1}{2}x^2)^2\,\mathrm{d}x$

$=\pi\int_1^2 \frac{1}{4}x^4\,\mathrm{d}x$

$=\frac{31}{20}\pi=1\frac{11}{20}\pi$



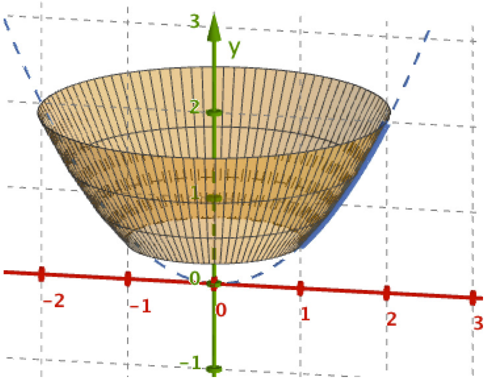
b)

$V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^2 x^2\,\mathrm{d}y$

$=\pi\int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{2y}^2\,\mathrm{d}y$

$=\pi\int_{\frac{1}{2}}^2 2y\,\mathrm{d}y$

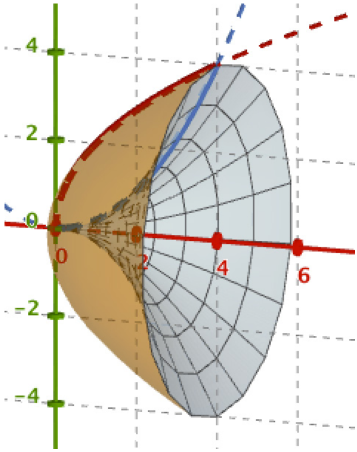
$=\frac{15}{4}\pi=3\frac{3}{4}\pi$



Vastaus a) $1\frac{11}{20}\pi$ b) $3\frac{3}{4}\pi$

K47

Määritetään käyrien $y=\sqrt{4x}$ ja $y=\dfrac{x^2}{4}$ leikkauspisteet.



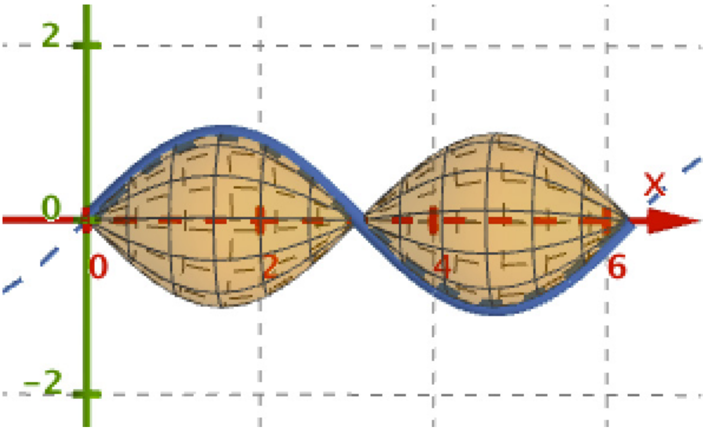
$$\sqrt{4x}=\frac{x^2}{4}$$
$$64x=x^4$$
$$x=0 \text{ tai } x=4$$

$$V=\pi\int_0^4(\sqrt{4x})^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^4\left(\frac{x^2}{4}\right)^2\mathrm{d}x$$
$$=\pi\int_0^4 4x\mathrm{d}x-\pi\int_0^4\frac{x^4}{16}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{96}{5}\pi$$
$$=19\frac{1}{5}\pi$$

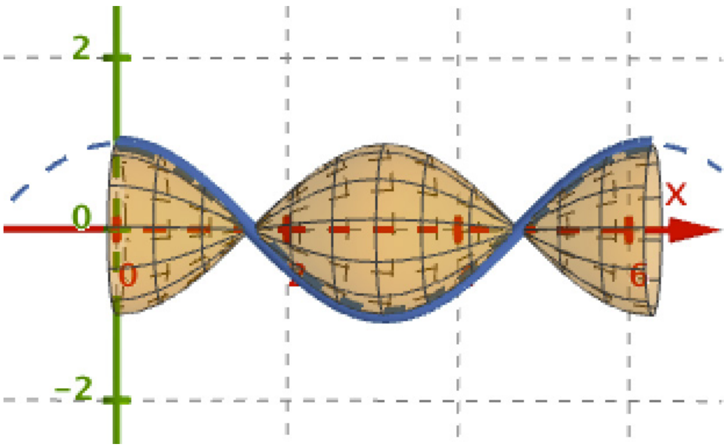
Vastaus $19\frac{1}{5}\pi$

K48

Käyrä $y = \sin x$, missä $0 \le x \le 2\pi$, pyörähtää x-akselin ympäri:



Käyrä $y = \cos x$, missä $0 \le x \le 2\pi$, pyörähtää x-akselin ympäri:



Lasketaan molempien pyörähdyskappaleiden tilavuudet.

$$
\begin{aligned}
V_{\sin} &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^{2\pi} \sin^2 x \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \right) \mathrm{d}x \\
&= \Big/_{\!0}^{\!2\pi} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \\
&= \pi^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{\cos} &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^{2\pi} \cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \right) \mathrm{d}x \\
&= \Big/_{\!0}^{\!2\pi} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \right) \\
&= \pi^2
\end{aligned}
$$

Vastaus

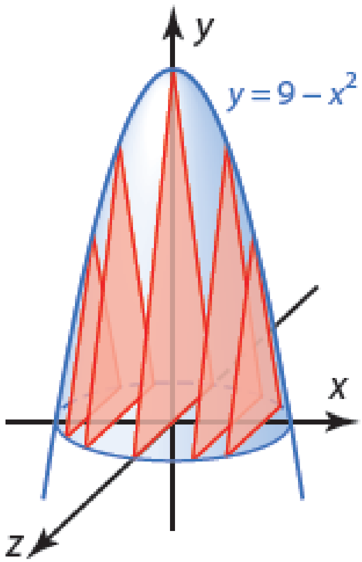
π^2

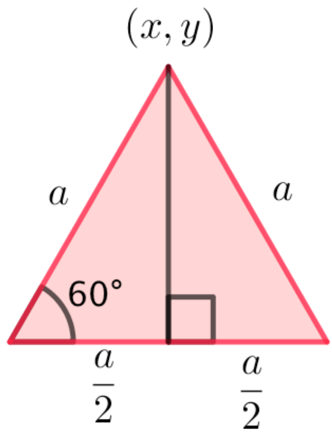
K49

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^8 A(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^8 \frac{\pi(\sin x + 2)^2}{3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{3}\int_0^8 (\sin x + 2)^2\,\mathrm{d}x \\
&= 42{,}572... \quad (\mathrm{dm}^3)
\end{aligned}
$$

Taidemaljakon tilavuus on $42{,}572...\ \mathrm{dm}^3 \approx 42{,}6\,\mathrm{L}$.

K50





Määritetään integroimisrajat.

$$y = 0$$

$$9 - x^2 = 0$$

$$x = 3 \text{ tai } x = -3$$

Merkitään kohtaan x piirretyn tasasivuisen kolmion sivun pituutta kirjaimella a. Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat $60°$. Tasasivuisen kolmion korkeus on $y = 9 - x^2$.

Kolmion pinta-ala on

$$A(x)=\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin 60° \qquad \left|\ \sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\right.$$

$$=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Määritetään kolmion sivun pituuden neliö a^2 Pythagoraan lauseen avulla.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2=a^2$$

$$\frac{a^2}{4}+y^2=a^2$$

$$\frac{3a^2}{4}=y^2 \qquad \left|\ y=9-x^2\right.$$

$$\frac{3a^2}{4}=(9-x^2)^2$$

$$a^2=\frac{4}{3}\cdot(9-x^2)^2$$

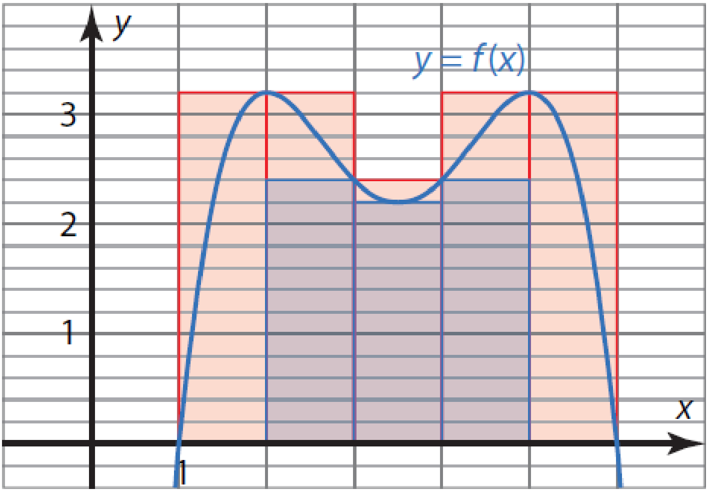
Lasketaan kappaleen tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-3}^{3} A(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-3}^{3} \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\,\mathrm{d}x \qquad \left| \, a^2 = \frac{4}{3}\cdot(9-x^2)^2 \right. \\
&= \int_{-3}^{3} \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot(9-x^2)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{-3}^{3} (9-x^2)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{432\sqrt{3}}{5} \quad (\approx 149{,}6)
\end{aligned}
$$

Vastaus

$$\frac{432\sqrt{3}}{5}$$

M1



Siniset suorakaiteet antavat pinta-alalle alarajan

$A > 1 \cdot 2{,}4 + 1 \cdot 2{,}2 + 1 \cdot 2{,}4 = 7.$

Punaiset suorakaiteet antavat pinta-alalle ylärajan

$A < 2 \cdot 3{,}2 + 1 \cdot 2{,}4 + 2 \cdot 3{,}2 = 15{,}2.$

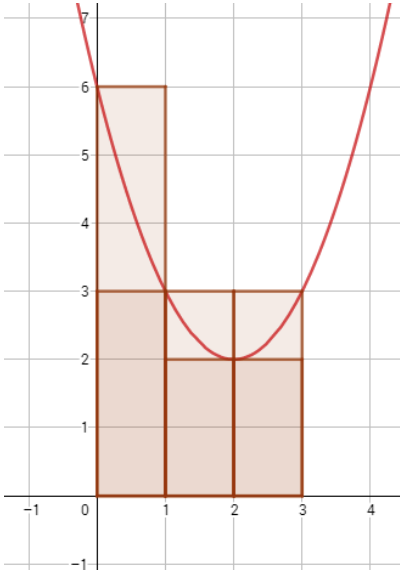
On siis $6 < A < 20$ (a) ja $A < 16$ (c).

Kuvan perusteella ei voi todeta, että $A > 13$.

Vastaus a, c

M2

Piirretään funktion $f(x) = x^2 - 4x + 6$ kuvaaja.



Kuvan perusteella alasumma

$s_3 = f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 = 7$

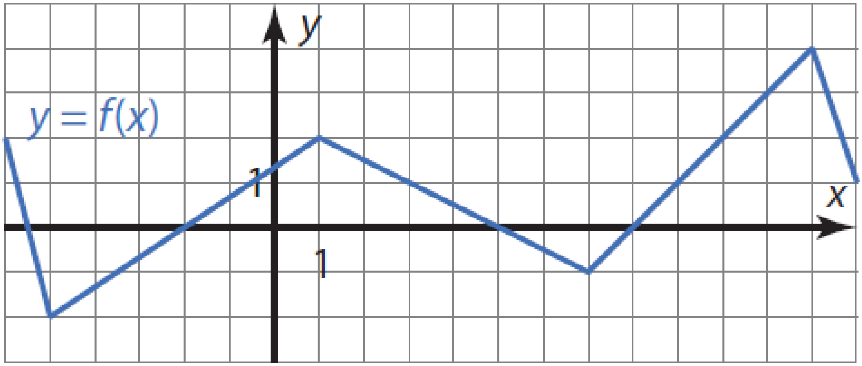
ja yläsumma

$S_3 = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 = 12.$

On siis $S_3 - s_3 = 12 - 7 = 5$, joten ainoa oikea vaihtoehto on c.

Vastaus c

M3



Kuvan perusteella saadaan seuraavaa.

$$\int_{-5}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-5}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{3\cdot 2}{2} + \frac{3\cdot 2}{2} = 0$$

$$\int_{-5}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-5}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{5}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{3\cdot 2}{2} + \frac{7\cdot 2}{2} - \frac{3\cdot 1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

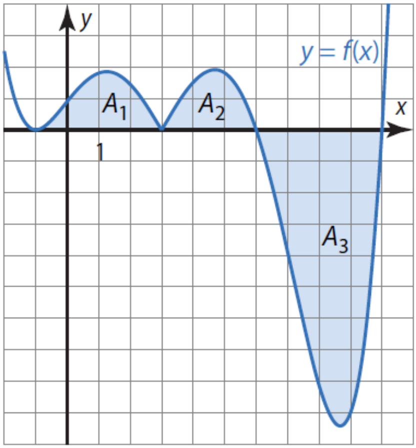
$$\int_{1}^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{5}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{8}^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4\cdot 2}{2} - \frac{3\cdot 1}{2} + \frac{4\cdot 4}{2} = 11\frac{1}{2}$$

Ainoa oikea vaihtoehto on siis a.

Vastaus a

M4

$$A_1 = 13,\ A_2 = 11 \text{ ja } A_3 = 68.$$



$$\int_{-1}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 + A_2 - A_3 = 13 + 11 - 68 = -44$$

$$\int_{3}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = A_2 - A_3 = 11 - 68 = -57 \quad \text{ja}$$

$$\int_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 + A_2 = 13 + 11 = 24$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{6}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 + A_2 - (-A_3) = 13 + 11 + 68 = 92$$

Ainoa oikea vastaus on siis c.

Vastaus c

M5

$$\int (5x^4 - 8x + 2)\mathrm{d}x$$
$$= x^5 - 4x^2 + 2x + C,$$

missä C on vakio (esimerkiksi 14).

Vastaus a

M6

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int (\sin x - \mathrm{e}^{x+1})\mathrm{d}x \\
&= -\cos x - \mathrm{e}^{x+1} + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(0) &= 0 \\
-\cos 0 - \mathrm{e}^{0+1} + C &= 0 \\
-1 - \mathrm{e} + C &= 0 \\
C &= \mathrm{e} + 1
\end{aligned}
$$

$$F(x) = -\cos x - \mathrm{e}^{x+1} + \mathrm{e} + 1$$

Vastaus c

M7

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\left(\frac{x}{x^2+1}+C\right) &= \mathrm{D}\frac{x}{x^2+1}+0 \\
&= \frac{\mathrm{D}x(x^2+1)-x\cdot \mathrm{D}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{1\cdot (x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Eli vastaus b on oikein.

Funktio f on myös jatkuva kaikkialla (nimittäjällä ei ole nollakohtia). Siis myös vastaus c on oikein.

Vastaus b ja c

M8

$$\int\left(\frac{10x^4}{3}-3\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int\left(\frac{10}{3}x^4-3\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{5}x^5-3x+C$$
$$=\frac{2}{3}x^5-3x+C$$
$$=\frac{2x^5-9x+D}{3}$$

Vastaus b ja c

M9

Funktio on selvästi jatkuva kaikkialla, joten a-kohta on oikein.

Polynomin $(3-2x^2)^7$ korkeimman asteen termi on 14. astetta. Integraalissa suurin potenssi on yhtä suurempi eli 15. Siis myös b on oikein.

Vastaus a ja c

M10

Koska funktio F on funktion f integraalifunktio, niin $F' = f$ kaikilla x. Siis vastaus b on oikein.

Vastaus b

M11

$$\int_1^2 3x^2 \mathrm{d}x = \Big/_1^2 x^3 \qquad \text{(b)}$$

$$= 8 - 1$$

$$= 7 \qquad \text{(a)}$$

Vastaus a ja b

M12

Jos $F'(x) = f(x)$, niin F on funktion f eräs integraalifunktio. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big/_{\!a}^{\,b} F(x) \qquad \text{(c)}$$

$$= F(b) - F(a) \qquad \text{(b)}$$

Vastaus b ja c

M13

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$
$$= 2x^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= 2\sqrt{x} + C$$

Vastaus b

M14

$$\int (5x-7)^3\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{5}\int 5(5x-7)^3\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}(5x-7)^4 + C$$
$$= \frac{1}{20}(5x-7)^4 + C$$

Vastaus c

M15

$$\int xe^{x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

Vastaus b ja c

M16

$$\int_0^{\ln 3} e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\ln 3} 2e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \Big/_0^{\ln 3} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2\ln 3} - 1)$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

Vastaus b ja c

M17

$$\int \sin 2x \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int 2\sin 2x \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Vastaus c

M18

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x - \sin x)$$

$$= -1 + 1 = 0$$

Vastaus b

M19

$$\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int 2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln|x| + C$$

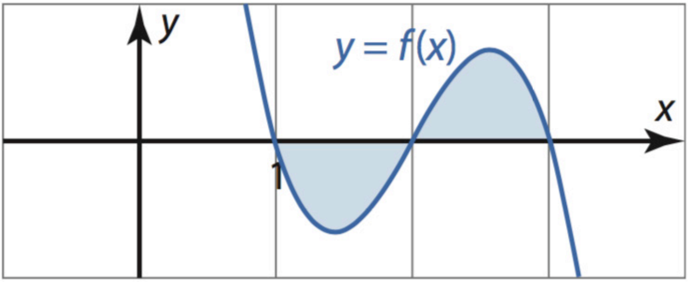
Vastaus c

M20

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int 2x(x^2+1)^{-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln(x^2+1) + C$$

Vastaus b

M21



Koska funktion f kuvaaja on välillä [1, 2] x-akselin alapuolella ja välillä [2, 3] x-akselin yläpuolella, niin alueen pinta-ala saadaan määrätyllä integraalilla.

$$A = -\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$$

Vastaus b

M22

Koska aluetta alapuolelta rajaava käyrä vaihtuu, lasketaan alueen pinta-ala osissa.

$$A = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 1 - (-2x + 4))\,\mathrm{d}x + \int_3^4 (-x^2 + 4x - 1 - (x - 5))\,\mathrm{d}x$$

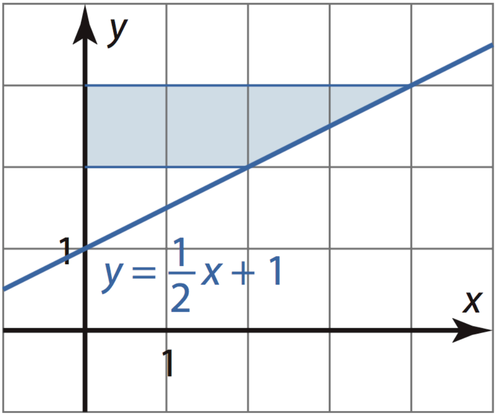
$$= \int_1^3 (-x^2 + 6x - 5)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 (-x^2 + 3x + 4)\,\mathrm{d}x$$

Lasketaan määrätyt integraalit laskimella.

$$= \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

Vastaus b

M23



Integroidaan muuttujan y suhteen, jolloin integroidaan 2:sta 3:een. Ratkaistaan integrointia varten käyrän yhtälöstä x, jolloin y on muuttuja.

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \quad \Big| \cdot 2$$

$$2y = x + 2$$

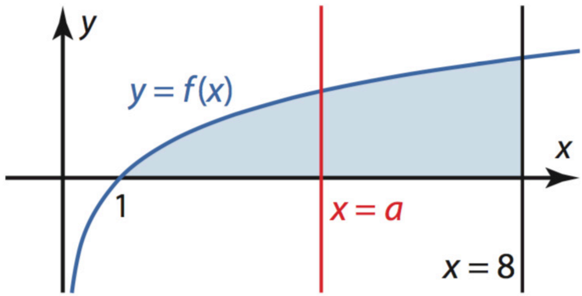
$$x = 2y - 2$$

Koska alue on y-akselin oikealla puolella sen pinta-alan kertoo määrätty integraali

$$A = \int_2^3 (2y - 2)\mathrm{d}y\,.$$

Vastaus c

M24



a-kohdan yhtälö on oikein. Funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaavat välillä $[1, a]$ ja $[a, 8]$ pinta-alaltaan yhtä suuret alueet.

$$\int_1^a f(x)\mathrm{d}x = \int_a^8 f(x)\mathrm{d}x$$

b-kohdan yhtälö on oikein. Funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaavat välillä $[1, a]$ alueen, jonka pinta-ala on puolet fuktion f kuvaajan ja x-akselin välillä $[1, 8]$ rajaaman alueen pinta-alasta.

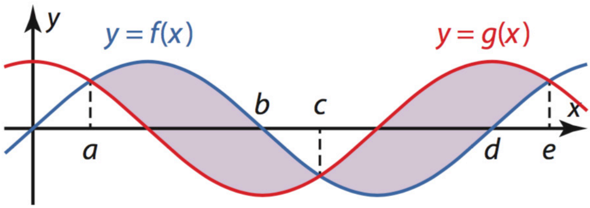
$$\int_1^a f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x$$

c-kohdan yhtälö on oikein. Funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaavat välillä $[a, 8]$ alueen, jonka pinta-ala on puolet fuktion f kuvaajan ja x-akselin välillä $[1, 8]$ rajaaman alueen pinta-alasta.

$$\int_a^8 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x$$

Vastaus a, b ja c

M25



Alue on kahden funktion kuvaajan rajaama alue.

Välillä $[a, c]$ aluetta rajaa yläpuolelta funktion f kuvaaja ja alapuolelta funktion g kuvaaja.

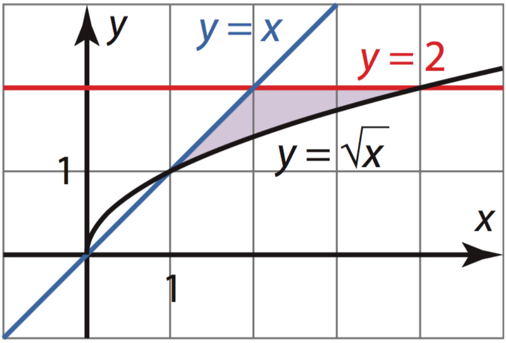
Välillä $[c, e]$ aluetta rajaa yläpuolelta funktion g kuvaaja ja alapuolelta funktion f kuvaaja.

Alueen pinta-alan kertoo määrätty integraali

$$A = \int_a^c \left(f(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x + \int_c^e \left(g(x) - f(x)\right) \mathrm{d}x .$$

Vastaus b

M26



Jos integroidaan muuttujan x suhteen, niin välillä $[1, 2]$ aluetta rajaa yläpuolelta suora $y = x$ ja alapuolelta käyrä $y = \sqrt{x}$. Välillä $[2, 4]$ aluetta rajaa yläpuolelta suora $y = 2$ ja alapuolelta käyrä $y = \sqrt{x}$. Pinta-alan ilmaisee siis määrätty integraali

$$A = \int_1^2 \left(x - \sqrt{x}\right) \mathrm{d}x + \int_2^4 \left(2 - \sqrt{x}\right) \mathrm{d}x. \qquad \text{(b)}$$

Jos integroidaan muuttujan y suhteen, niin välillä $1 \le y \le 2$ aluetta rajaa oikealta käyrä $y = \sqrt{x}$ eli $x = y^2$ (missä $y > 0$) ja vasemmalta suora $y = x$ eli $x = y$. Pinta-alan ilmaisee siis määrätty integraali

$$A = \int_1^2 \left(y^2 - y\right) \mathrm{d}y \qquad \text{(c)}$$

Vastaus b ja c

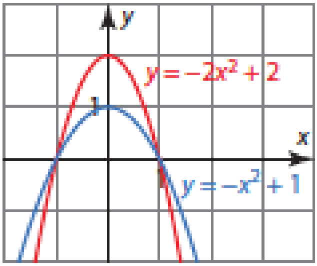
M27

Kun funktion f kuvaaja välillä $[a, b]$ pyörähtää x-akselin ympäri, syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus on $V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$.

Siis vastaus c on oikein.

Vastaus c

M28



Pyörähdyskappale on ontto.
Kohta a on oikein.

Pyörähdyskappale mahtuu origokeskisen 2-säteisen pallon sisään.
Kohta b on oikein.

1-säteisen pallon tilavuus on $V_1 = \pi \cdot 1^2 = \pi$.

Pyörähdyskappaleen tilavuus on

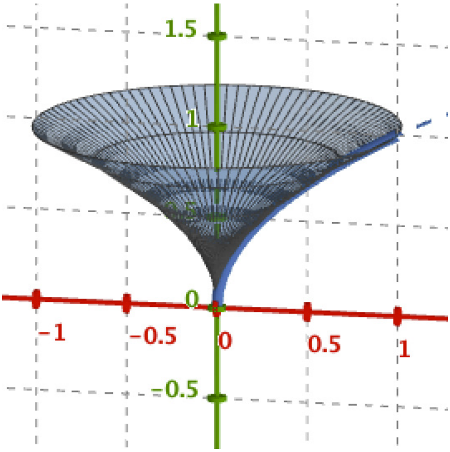
$$V_2 = \pi\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_{-1}^{1}(-x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\frac{1}{5}\pi > \pi = V_1$$

Kohta c on oikein.

Vastaus a, b ja c

M29



Asetetaan kartion huippu origoon ja pohjan keskipiste y-akselille. Tällöin pyörähdyskappale mahtuu kartion sisään. Kohta a on oikein.

$$V = \pi\int_0^1 x^2 \mathrm{d}y \qquad \Big| \; y = \sqrt{x}, \text{ joten } x = y^2.$$

$$= \pi\int_0^1 (y^2)^2 \mathrm{d}y$$

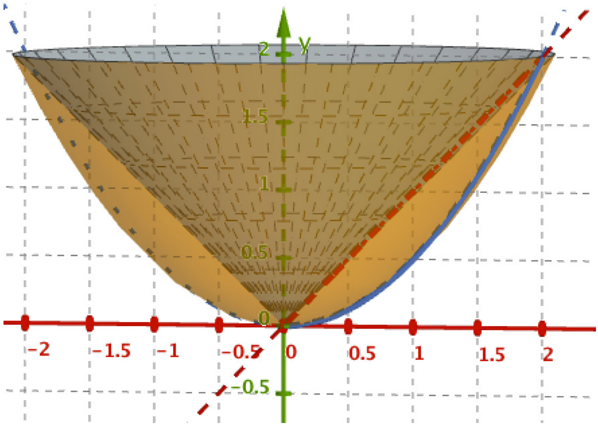
$$= \pi\int_0^1 y^4 \mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi}{5}$$

Kohta b on oikein.

Vastaus a ja b

M30



Ulkokuorta rajaa käyrä $y = \frac{x^2}{2}$, joten $x^2 = 2y$.

Sisäosaa rajaa käyrä $x = y$, joten $x^2 = y^2$.

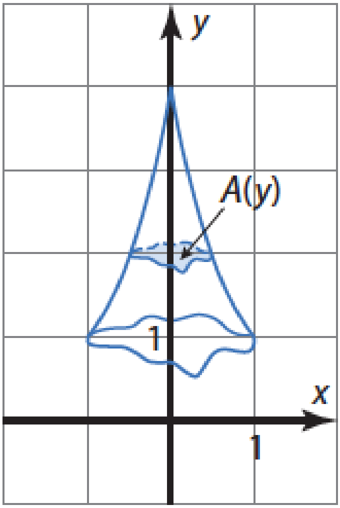
Pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V = V_{ulko} - V_{sisä} = \pi \int_0^2 2y\,dy - \pi \int_0^2 y^2 dy .$$

Siis vaihtoehto b on oikein.

Vastaus b

M31



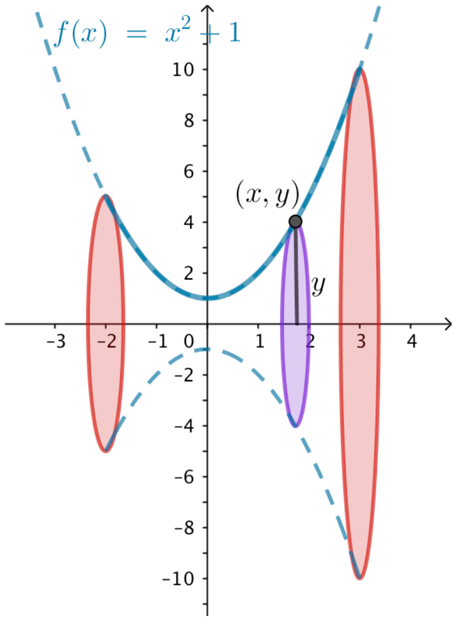
Integroimisrajat ovat 1 ja 4. Siis a-kohta on väärin.

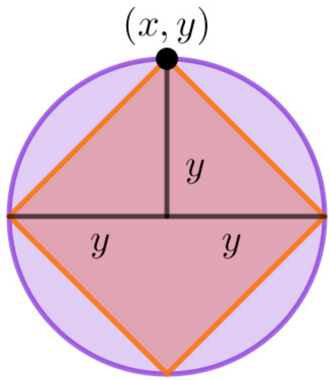
Kyseessä ei ole pyörähdyskappale, joten myös b-kohta on väärin.

c-kohta on oikein.

Vastaus c

M32





Pyörähdyskappaleen säde y on puolet neliön lävistäjästä. Neliön pinta-ala kohdassa x on $A(x) = 4 \cdot \frac{y \cdot y}{2} = 2y^2 = 2(x^2+1)^2$.

Kappaleen tilavuudeksi saadaan

$$V = \int_{-2}^{3} A(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{3} 2(x^2+1)^2 \mathrm{d}x .$$

Kohta b on oikein.

Vastaus b

A1

Funktiot $F(x) = x + 4 + \ln(x+1)$ ja $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ ovat molemmat määritelty, kun $x > -1$.

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x > -1$.

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \mathrm{D}(x + 4 + \ln(x+1)) \\
&= 1 + 0 + \frac{1}{x+1} \\
&= {}^{x+1)}\frac{1}{1} + \frac{1}{x+1} \\
&= \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \\
&= \frac{x+1+1}{x+1} \\
&= \frac{x+2}{x+1} \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. □

A2

a) $\int_{-1}^{3}(2x^3-4x)\mathrm{d}x = \underset{-1}{\overset{3}{/}}(2\cdot\frac{1}{4}x^4-4\cdot\frac{1}{2}x^2)$

$= \underset{-1}{\overset{3}{/}}(\frac{1}{2}x^4-2x^2)$

$= (\frac{1}{2}\cdot 3^4-2\cdot 3^2)-(\frac{1}{2}\cdot(-1)^4-2\cdot(-1)^2)$

$= \frac{45}{2}-(-\frac{3}{2}) = \frac{45}{2}+\frac{3}{2} = \frac{48}{2} = 24$

b) $\int_{1}^{3}(\sqrt{x}+x^2)\mathrm{d}x = \int_{1}^{3}(x^{\frac{1}{2}}+x^2)\mathrm{d}x$

$= \underset{1}{\overset{3}{/}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}x^3)$

$= \underset{1}{\overset{3}{/}}(\frac{2}{3}x^1x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}x^3)$

$= \underset{1}{\overset{3}{/}}(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}x^3)$

$= (\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}+\frac{1}{3}\cdot 3^3)-(\frac{2}{3}\cdot 1\sqrt{1}+\frac{1}{3}\cdot 1^3)$

$= 2\sqrt{3}+9-1 = 2\sqrt{3}+8$

Vastaus a) 24 b) $2\sqrt{3}+8$

A3

a) $\int(\sin 4x-\cos 2x)\mathrm{d}x=\int\sin 4x\mathrm{d}x-\int\cos 2x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}\int 4\sin 4x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}(-\cos 4x)-\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

b) $\int x^2\mathrm{e}^{x^3-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int 3x^2\mathrm{e}^{x^3-1}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3-1}+C$$

Vastaus a) $-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$

b) $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3-1}+C$

A4

a) $\int (x^3\sqrt{2x^4+7})\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int 8x^3(2x^4+7)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(2x^4+7)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{12}(2x^4+7)\sqrt{2x^4+7}+C$$

b) $\int \frac{x}{1+5x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\int \frac{10x}{1+5x^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|1+5x^2\right|+C \qquad \Big|\, 1+5x^2>0 \text{ kaikilla } x$$

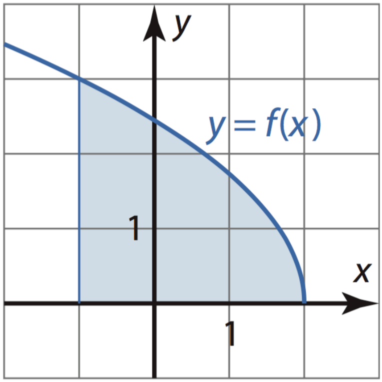
$$= \frac{1}{10}\ln(1+5x^2)+C$$

Vastaus a) $\frac{1}{12}(2x^4+7)\sqrt{2x^4+7}+C$

b) $\frac{1}{10}\ln(1+5x^2)+C$

A5

Funktion $f(x)=\sqrt{6-3x}$ kuvaajan ja x-akselin välillä $[-1, 2]$ rajaama alue on x-akselin yläpuolella.



Alueen pinta-ala on täten yhtä suuri kuin funktion f määrätty integraali –1:stä 2:een.

$$\int_{-1}^{2}\sqrt{6-3x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}-3(6-3x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\Big/_{-1}^{2}\left(\frac{2}{3}(6-3x)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=-\frac{2}{9}\cdot\Big/_{-1}^{2}\left((6-3x)\sqrt{6-3x}\right)$$

$$=-\frac{2}{9}\left((6-3\cdot 2)\sqrt{6-3\cdot 2}-\left((6-3\cdot(-1))\sqrt{6-3\cdot(-1)}\right)\right)$$

$$=-\frac{2}{9}\left(0-9\sqrt{9}\right)$$

$$=\frac{2}{9}\cdot 9\cdot 3=6$$

Vastaus $A=6$

A6

a) Lasketaan määrätty integraali.

$$\int_{-2}^{1}(x^2-ax)\mathrm{d}x = \Big/_{-2}^{1}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{2}\cdot a\cdot 1^2-\left(\frac{1}{3}\cdot(-2)^3-\frac{1}{2}\cdot a\cdot(-2)^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a+\frac{8}{3}+2a$$

$$=\frac{3}{2}a+3$$

Ratkaistaan saatu yhtälö.

$$\frac{3}{2}a+3=6$$

$$\frac{3}{2}a=3 \qquad \Big|\cdot\frac{2}{3}$$

$$a=2$$

b) Lasketaan määrätty integraali.

$$\int_0^a e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^a 2e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \overset{a}{\underset{0}{/}} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \left(e^{2a} - e^{0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \left(e^{2a} - 1\right)$$

Ratkaistaan saatu yhtälö.

$$\frac{1}{2}\cdot\left(e^{2a}-1\right) = 4 \qquad \Big|\cdot 2$$

$$e^{2a} - 1 = 8$$

$$e^{2a} = 9$$

$$2a = \ln 9 \qquad \Big|:2$$

$$a = \frac{\ln 9}{2} = \frac{\ln 3^2}{2} = \frac{\cancel{2}\ln 3}{\cancel{2}} = \ln 3$$

Vastaus a) $a = 2$ b) $a = \ln 3$

A7

Määritetään funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \cos 4x$ integraalifunktiot.

$$F(x) = \int (\mathrm{e}^{-x} - \cos 4x)\mathrm{d}x$$

$$= -\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

Määritetään vakion C arvo siten, että $F(0) = 1$.

$$F(0) = 1$$

$$-\mathrm{e}^{-0} - \frac{1}{4}\sin(4 \cdot 0) + C = 1$$

$$-1 - \frac{1}{4} \cdot 0 + C = 1$$

$$C = 2$$

Integraalifunktio on $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{4}\sin 4x + 2$.

Vastaus $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{4}\sin 4x + 2$

A8

a) Määritetään funktion lauseke laskemalla määrätty integraali.

$$f(x)=\int_0^1 (2x-4t)\mathrm{d}t \qquad \text{Integroinnin muuttujana } t.$$

$$=\operatorname*{/}_0^1 (2xt-2t^2)$$

$$=2x\cdot 1-2\cdot 1^2-\left(2x\cdot 0-2\cdot 0^2\right)$$

$$=2x-2$$

Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$2x-2=0$$

$$2x=2$$

$$x=1$$

b) Määritetään funktion lauseke laskemalla määrätty integraali.

$$f(t)=\int_0^1 (2x-4t)\mathrm{d}x$$

Integroinnin muuttujana x.

$$=\Big/_0^1 (x^2-4tx)$$

$$=1^2-4t\cdot 1-\left(0^2-4t\cdot 0\right)$$

$$=1-4t$$

Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$1-4t=0$$

$$-4t=-1$$

$$t=\frac{1}{4}$$

Vastaus a) $x=1$ b) $t=\frac{1}{4}$

A9

a) Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$f(x) = 0$$

$$|\sin x - \cos x| = 0$$

$$\sin x - \cos x = 0$$

$$\sin x = \cos x \quad |: \cos x \quad (\neq 0)$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

Välillä $[0, \pi]$ on vain nollakohta $x = \frac{\pi}{4}$.

b) Funktion f ainoa nollakohta välillä $[0, \pi]$ on $x = \frac{\pi}{4}$. Koska $\sin 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1 < 0$ ja $\sin \pi - \cos \pi = 0 - (-1) = 1 > 0$, niin $\sin x - \cos x \geq 0$, kun $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$.

Itseisarvon määritelmän mukaan funktion f lauseke on

$$f(x) = \begin{cases} -(\sin x - \cos x), & \text{kun } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin x - \cos x, & \text{kun } \frac{\pi}{4} < x \leq \pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\sin x + \cos x, & \text{kun } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin x - \cos x, & \text{kun } \frac{\pi}{4} < x \leq \pi \end{cases}$$

c) Lasketaan määrätty integraali.

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\sin x + \cos x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) + \Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (-\cos x - \sin x)$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} - (\cos 0 + \sin 0) \right)$$

$$+ \left(-\cos\pi - \sin\pi - (-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - (1+0) - (-1) - 0 - (-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 + 1 + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= {}^{\sqrt{2})} \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Vastaus

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $f(x) = \begin{cases} -\sin x + \cos x, & \text{kun } 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ \sin x - \cos x, & \text{kun } \frac{\pi}{4} < x \le \pi \end{cases}$ c) $2\sqrt{2}$

A10

a) Ratkaistaan polynomin P nollakohdat.

$$P(x)=0$$

$$x^2+x-2=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 3}{2}$$

$$x=\frac{-1+3}{2}=1 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-1-3}{2}=-2$$

Jaetaan polynomi P tekijöihin.

$$P(x)=x^2+x-2 \qquad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$=1\cdot(x-1)(x-(-2))$$

$$=(x-1)(x+2)$$

b) Ratkaistaan vakioiden A ja B arvot.

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \qquad \Big| \cdot (x-1)(x+2)$$

$$1 = \frac{A\,\cancel{(x-1)}^{1}\,(x+2)}{\cancel{(x-1)}_{1}} + \frac{B(x-1)\,\cancel{(x+2)}^{1}}{\cancel{(x+2)}_{1}}$$

$$1 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$1 = Ax + 2A + Bx - B$$

$$1 = (A+B)x + 2A - B$$

Yhtälö on tosi, kun $A + B = 0$ ja $2A - B = 1$. Ratkaistaan yhtälöpari.

$$+\begin{cases} A + B &= 0 \\ 2A - B &= 1 \end{cases}$$

$$3A \qquad = 1$$

$$A = \frac{1}{3} \qquad\qquad B = -A = -\frac{1}{3}$$

c) Integroidaan funktio $\dfrac{1}{P(x)}$

$$\int \frac{1}{P(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-\frac{1}{3}}{x+2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C \qquad \left|\begin{array}{l} x-1>0 \text{ ja} \\ x+2>0 \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{3}\ln(x+2) + C$$

$$= \frac{1}{3}\big(\ln(x-1) - \ln(x+2)\big) + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2} + C, \quad \text{kun } x \geq 2$$

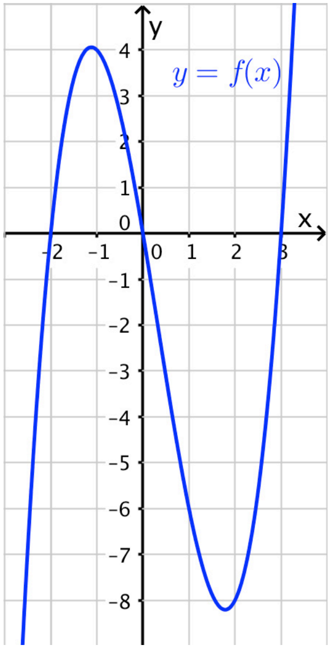
Vastaus a) $P(x) = (x-1)(x+2)$ b) $A = \dfrac{1}{3}$ ja $B = -\dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x-1}{x+2} + C, \quad \text{kun } x \geq 2$

B1

Opiskelija ei tutkinut, onko alue x-akselin yläpuolella vai alapuolella.

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ kuvaaja.



Nollakohdat opiskelija on ratkaissut oikein.

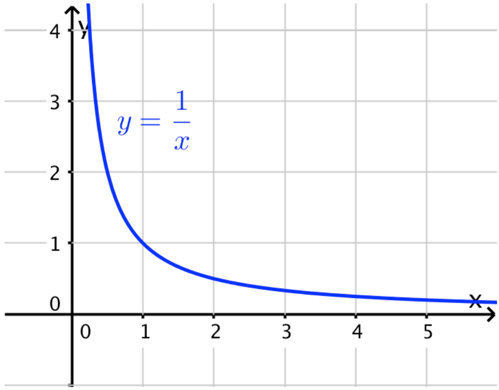
Kuvasta havaitaan, että funktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja välillä [–2, 3]. Alueen pinta-ala pitää laskea siis kahdessa osassa.

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{3} (x^3 - x^2 - 6x)\mathrm{d}x = \frac{253}{12} = 21\frac{1}{12}$$

B2

Käyrä $y=\dfrac{1}{x}$ on x-akselin yläpuolella välillä $[a,3a]$, kun $a>0$.



Käyrän ja x-akselin välillä $[a,3a]$ rajaaman alueen pinta-ala on siis yhtä suuri kuin määrätty integraali $\displaystyle\int_a^{3a}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A=\int_a^{3a}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Määrätyn integraalin voi laskea myös laskimella.

$$=\Big/_{a}^{3a}\ln|x| \qquad |\,a>0$$

$$=\ln 3a-\ln a$$

$$=\ln\frac{3a}{a}$$

$$=\ln 3,\quad \text{kun } a>0$$

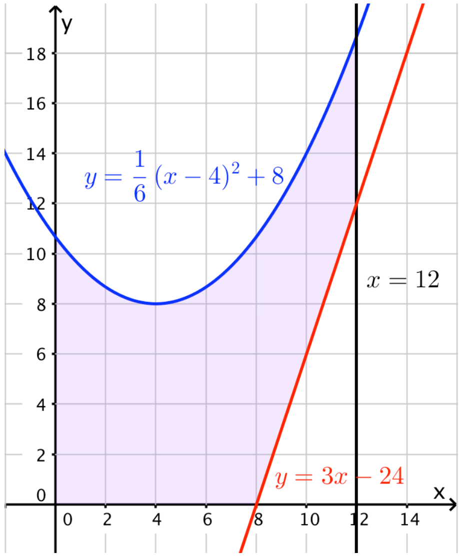
On osoitettu, että alueen pinta-ala on $\ln 3$ kaikilla vakion a arvoilla. □

B3

a)

Piirretään suorat $x = 12$ ja $y = 3x - 24$ sekä käyrä $y = \frac{1}{6}(x-4)^2 + 8$.

Merkitään kuvaan näiden ja koordinaattiakselien rajaama alue.



b) Ratkaistaan suoran $y = 3x - 24$ ja x-akselin leikkauskohta.

$$3x - 24 = 0$$

$$3x = 24 \quad |: 3$$

$$x = 8$$

Alueen pinta-ala pitää laskea kahdessa osassa. Välillä $[0, 8]$ alue on käyrän $y = \frac{1}{6}(x-4)^2 + 8$ ja x-akselin rajaama alue ja välillä $[8, 12]$ alue on käyrän $y = \frac{1}{6}(x-4)^2 + 8$ ja suoran $y = 3x - 24$ välinen alue.

Lasketaan alueen pinta-ala.

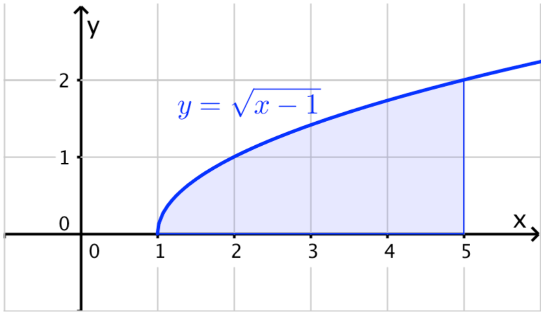
$$A = \int_0^8 \left(\frac{1}{6}(x-4)^2 + 8 \right) \mathrm{d}x + \int_8^{12} \left(\frac{1}{6}(x-4)^2 + 8 - (3x - 24) \right) \mathrm{d}x$$

$$= 104$$

Vastaus b) 104

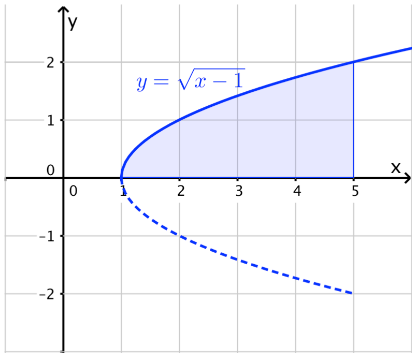
B4

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä pyörähtävä alue.



a) Alue pyörähtää x-akselin ympäri, joten integroidaan muuttujan x suhteen 1:stä 5:een.

Poikkileikkausympyrän säde kohdassa x on $r = |y| = \sqrt{x-1}$.

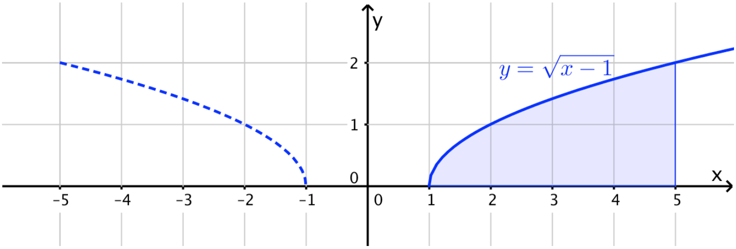


Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi\int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 \mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_1^5 (x-1)\mathrm{d}x = 8\pi$$

b) Kun $x = 5$, niin kuvaajan pisteen y-koordinaatti $y = \sqrt{5-1} = 2$. Alue pyörähtää y-akselin ympäri, joten integroidaan muuttujan y suhteen 0:sta 2:een.



Poikkileikkausympyrän säde kohdassa y on $r = |x|$. Koska $y = \sqrt{x-1}$, niin $x = y^2 + 1$. Siis $r = |x| = y^2 + 1$.

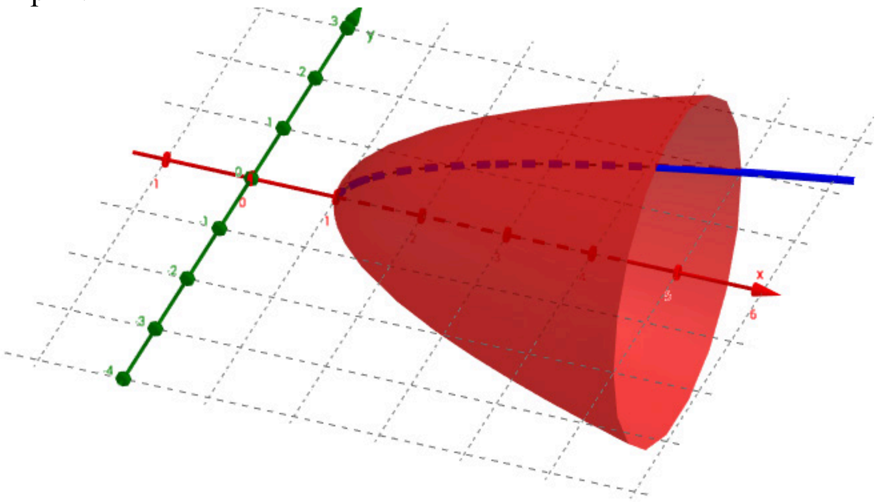
Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_0^2 (y^2+1)^2 \mathrm{d}y$$

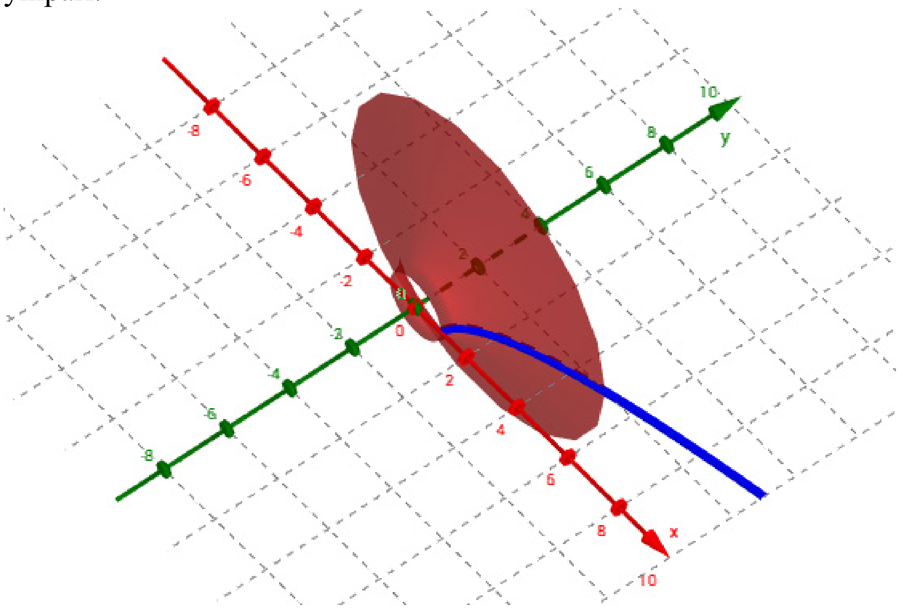
$$= \frac{206\pi}{15} = 13\frac{11}{15}\pi$$

Vastaus a) 8π b) $\dfrac{206\pi}{15} = 13\dfrac{11}{15}\pi$

Kuva kappaleesta, joka muodostuu käyrän pyörähtäessä x-akselin ympäri.



Kuva kappaleesta, joka muodostuu käyrän pyörähtäessä y-akselin ympäri.

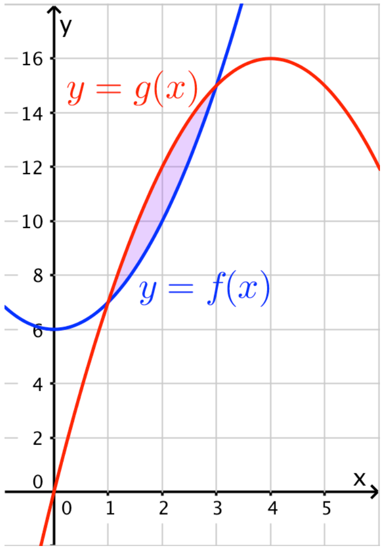


B5

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktioiden

$f(x) = x^2 + 6$ ja

$g(x) = -x^2 + 8x$ kuvaajat.



Ratkaistaan funktioiden kuvaajien leikkauspisteiden x-koordinaatit.

$f(x) = g(x)$

$x^2 + 6 = -x^2 + 8x$

$x = 1$ tai $x = 3$

a)

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_1^3 \left(-x^2 + 8x - (x^2 + 6)\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

b) Kappaleen ulkopinta syntyy käyrän $y = g(x)$ ja sisäpinta käyrän $y = f(x)$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $[1, 3]$.

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi\int_1^3 (g(x))^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_1^3 (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_1^3 (-x^2 + 8x)^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_1^3 (x^2 + 6)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{176\pi}{3} = 58\frac{2}{3}\pi$$

Vastaus a) $2\frac{2}{3}$ b) $\frac{176\pi}{3} = 58\frac{2}{3}\pi$

B6

Funktio $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ on määritelty ja jatkuva, kun $x \neq 1$.

Määrittelyjoukko koostuu kahdesta välistä, $x<1$ ja $x>1$.

1) Määritetään integraalifunktio välillä $x<1$.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\ln|x-1| + C && |\,x-1<0,\ \text{kun } x<1 \\
&= 2\ln(-(x-1)) + C \\
&= 2\ln(1-x) + C
\end{aligned}
$$

Piste $(0, 2)$ kuuluu alueeseen $x<1$. Määritetään vakio C.

$$
\begin{aligned}
F(0) &= 2 \\
2\ln(1-0)+C &= 2 \\
C &= 2
\end{aligned}
$$

Siis $F(x)=2\ln(1-x)+2$

2) Määritetään integraalifunktio välillä $x > 1$.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\ln|x-1| + D \qquad |x-1| > 0, \quad \text{kun } x > 1 \\
&= 2\ln(x-1) + D
\end{aligned}
$$

Piste $(2, -1)$ kuuluu alueeseen $x > 1$. Määritetään vakio D.

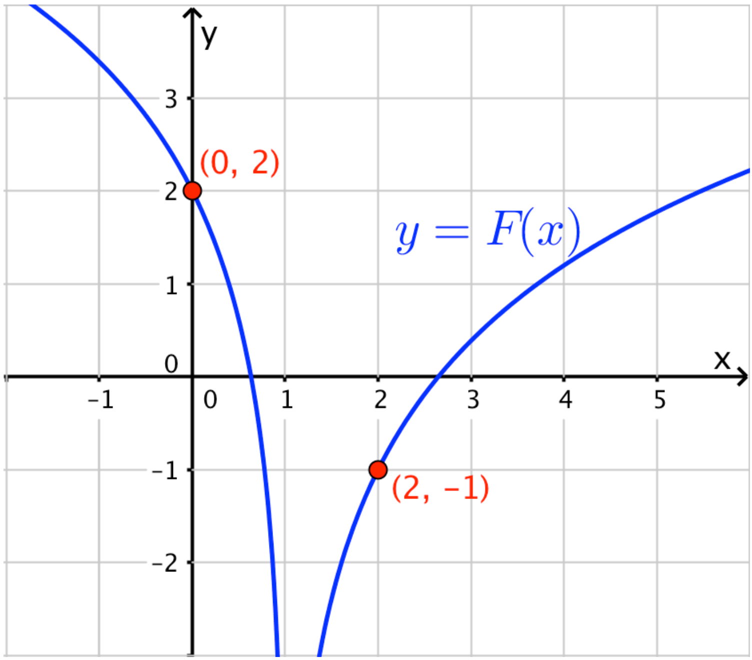
$$
\begin{aligned}
F(2) &= -1 \\
2\ln(2-1) + D &= -1 \\
D &= -1
\end{aligned}
$$

Siis $F(x) = 2\ln(x-1) - 1$

Integraalifunktioksi saadaan

$$
F(x) = \begin{cases} 2\ln(1-x) + 2, & \text{kun } x < 1 \\ 2\ln(x-1) - 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}
$$

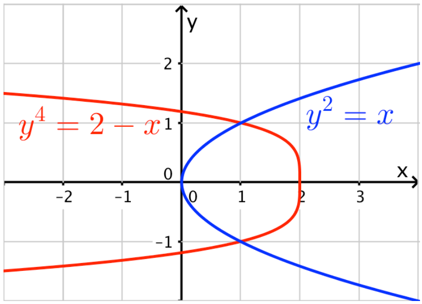
Piirretään integraalifunktion kuvaaja.



Vastaus $F(x) = \begin{cases} 2\ln(1-x)+2, & \text{kun } x<1 \\ 2\ln(x-1)-1, & \text{kun } x>1 \end{cases}$

B7

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrät $y^2 = x$ ja $y^4 = 2 - x$.



Lasketaan alueen pinta-ala integroimalla muuttujan y suhteen.

Ratkaistaan integrointia varten käyrien yhtälöistä muuttuja x.

$x = y^2$ | $x = 2 - y^4$

Integrointirajat saadaan ratkaisemalla käyrien leikkauspisteiden y-koordinaatit.

$y^2 = 2 - y^4$ Ratkaistaan laskimella.

$y = -1$ tai $y = 1$

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-1}^{1} \left(2 - y^4 - y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{44}{15} = 2\frac{14}{15}$$

Vastaus $2\frac{14}{15}$

B8

Kirjan 1. painoksessa tehtävänannossa on virhe. Pitää olla $a > 0$.

Käyrä $y = x^2 - a^2$ on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan integrointia varten käyrän ja akselien leikkauskohdat.

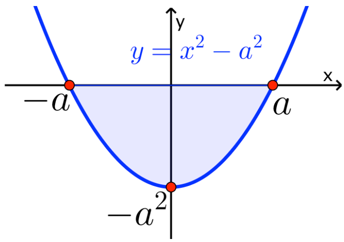
x-akselin leikkauskohdat ($y = 0$):

$$x^2 - a^2 = 0$$
$$x^2 = a^2$$
$$x = \pm a$$

y-akselin leikkauskohta ($x = 0$):

$$y = 0^2 - a^2$$
$$y = -a^2$$

Kun $a > 0$, niin käyrä ja x-akseli rajaavat alueen x-akselin alapuolella.



a) Alue pyörähtää x-akselin ympäri, joten integroidaan muuttujan x suhteen $-a$:sta a:han. Poikkileikkausympyrän säde kohdassa x on $r = |y|$, joten $r^2 = |y|^2 = y^2 = (x^2 - a^2)^2$.

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_{-a}^{a} r^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-a}^{a} (x^2 - a^2)^2 \mathrm{d}x = \frac{16\pi}{15} a^5$$

b) Alue pyörähtää y-akselin ympäri, joten integroidaan muuttujan y suhteen $-a^2$:sta 0:aan. Poikkileikkausympyrän säde kohdassa y on $r = |x|$. Koska $y = x^2 - a^2$, niin $x^2 = y + a^2$. Siis $r^2 = |x|^2 = x^2 = y + a^2$.

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_{-a^2}^{0} r^2 \mathrm{d}y = \pi \int_{-a^2}^{0} (y + a^2)^2 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} a^4$$

Ratkaistaan millä vakion a arvolla kappaleiden tilavuudet ovat yhtä suuret.

$$\frac{16\pi}{15} a^5 = \frac{\pi}{2} a^4$$

Ratkaistaan laskimella.

$$a = 0 \quad \text{tai} \quad a = \frac{15}{32}$$

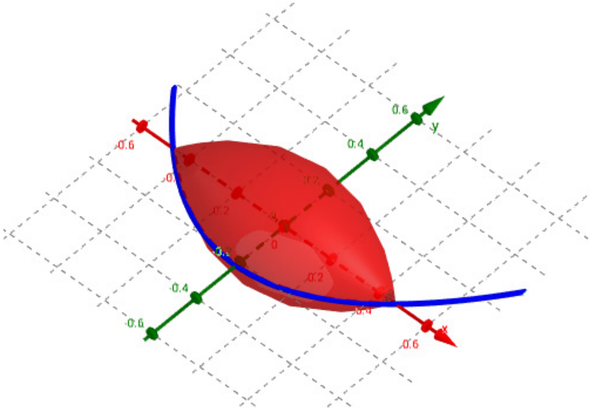
Kappaleiden tilavuudet ovat yhtä suuret, kun $a = \frac{15}{32}$.

Vastaus a) $\frac{16\pi}{15} a^5$ b) $\frac{\pi}{2} a^4$

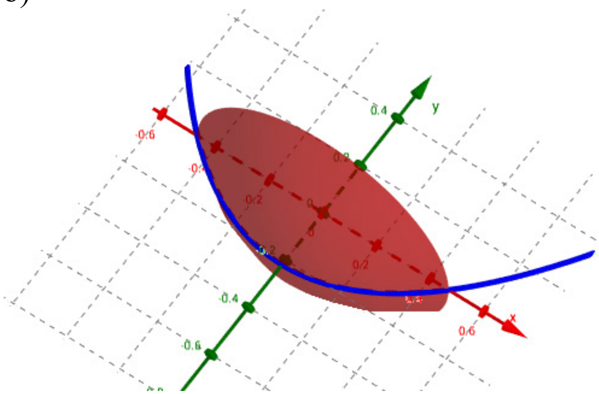
Tilavuudet ovat yhtä suuret, kun $a = \frac{15}{32}$.

Kuvat pyörähdyskappaleista $(a = \frac{15}{32})$:

a)

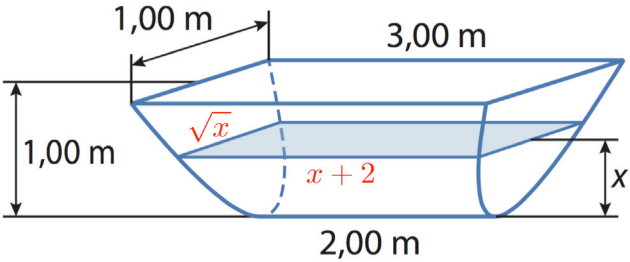


b)



B9

Poikkileikkauksen pinta-ala korkeudella x on $A(x) = (x+2)\cdot\sqrt{x}$, missä $0 \le x \le 1$.



Lasketaan altaan tilavuus.

$$V = \int_0^1 A(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left((x+2)\cdot\sqrt{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{26}{15} = 1,7333\ldots \quad (\mathrm{m}^3)$$

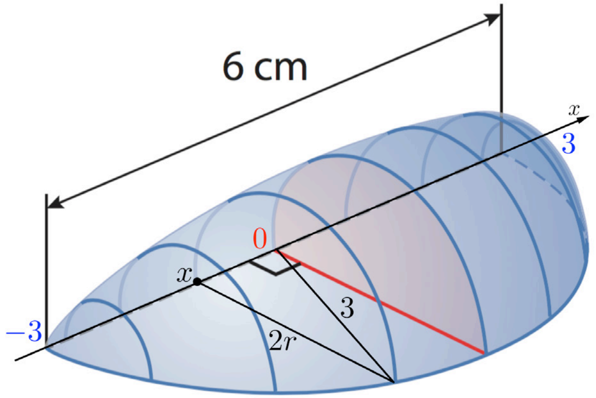
Muutetaan tilavuus litroiksi.

$$1,73333\ldots\ \mathrm{m}^2 = 1733,33\ldots\ \mathrm{dm}^2 = 1733,33\ldots\ \mathrm{L} \approx 1730\ \mathrm{L}$$

Vastaus 1730 litraa

B10

Sijoitetaan koru koordinaatistoon niin, että x-akseli kulkee pitkin korun takareunaa ja origon on pohjana olevan puoliympyrän keskipisteessä.



Määritetään poikkileikkauspuoliympyrän säde kohdassa x. Käytetään suorakulmaista kolmiota ja Pythagoraan lausetta.

$$|x|^2 + (2r)^2 = 3^2$$

$$x^2 + 4r^2 = 9$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{9 - x^2} \quad \text{tai} \quad r = -\frac{1}{2}\sqrt{9 - x^2}$$

Koska $r \geq 0$, niin $r = \frac{1}{2}\sqrt{9 - x^2}$.

x-akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-ala on

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{9 - x^2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}(9 - x^2).$$

Lasketaan korun tilavuus.

$$V = \int_{-3}^{3} A(x)\mathrm{d}x$$

Kappale ulottuu kohdasta -3 kohtaan 3.

$$= \int_{-3}^{3} \left(\frac{\pi}{8}(9 - x^2) \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{9\pi}{2} \ \ (\mathrm{cm}^3)$$

Lasketaan lopuksi korun massa.

$$m = \frac{9\pi}{2} \ \mathrm{cm}^3 \cdot 1{,}2 \ \mathrm{g/cm}^3 = 16{,}964... \ \mathrm{g} \approx 17 \ \mathrm{g}$$

Vastaus 17 g