

Lukujonon käsite

Lukujonossa olevat luvut ovat lukujonon termejä tai jäseniä, jotka ovat muodostettu jonkin säännön mukaan.

Lukujono voi olla päättyvä tai päättymätön

$$\text{esim } \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{64} \quad (\text{päättävä})$$

$$\underbrace{1}_{a_1}, \underbrace{3}_{a_2}, 5, \dots, \underbrace{2n-1}_{a_n} (\text{päättymätön})$$

a_n (yleinen termi)

Lukujonon esitystavat

1. Luetellaan muutamia lukujonon alkupään termejä siten, että lukujonon laki/sääntö tulee selvästi näkyviin.
2. Määritellään lukujono yleisen termin a_n avulla

$$\text{esim } a_n = \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\text{tai } a_n = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

3. Määritellään lukujono rekursiivisesti: annetaan jonon 1. termi ja sääntö, joka kertoo miten seuraava termi saadaan edellisen avulla

$$\begin{array}{l} \text{esim. } a_1 = 3 \quad \text{ja} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \\ \text{nyt } a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{3}{4}, \quad a_4 = \frac{3}{8} \quad \text{jne} \\ \quad \quad \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\frac{1}{2}a_1} \quad \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\frac{1}{2}a_2} \end{array}$$

Lukujonon täsmällinen määritelmä

Päätymätön lukujono on funktio eli kuvaus

$$f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \text{ jolle } f(n) = a_n$$

Lukujonon monotonisuus

Lukujono on monotoninen, jos se on kasvava tai vähenevä

$$\text{-kasvavaalle jonolle } a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$$

peräkkäisten termien erotus tai suhde

$$a_n - a_{n+1} < 0$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$$

- väheneväle jonolle $a_1 > a_2 > \dots > \underline{a_n > a_{n+1} > \dots}$

eli $a_n - a_{n+1} > 0$ tai

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$$

Tutki luvujonon $a_n = \frac{n}{2n+1}$ monotonisuutta

$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots$ (näyttäisi olevan kasvava)

yleisesti tutkitaan erotusta

$$\underline{a_n - a_{n+1}} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n+1}{\overset{2n+3}{2(n+1)+1}} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n+1}{\overset{2n+1}{2n+3}}$$

$$= \frac{n(2n+3) - (n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{2n^2 + 3n - 2n^2 - 3n - 1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{-1}{\underbrace{(2n+1)(2n+3)}_{>0}} < 0 \Rightarrow a_n \text{ on kasvava}$$

Lukujonon raja-arvo

- kyseessä on ns. epäoleellinen raja-arvo, jossa $n \rightarrow \infty$
eli tarkemmin lukujonon a_n raja-arvoa merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

- jos raja-arvo on äärellinen, niin lukujono suppenee
- jos raja-arvo on ääretön tai sitä ei ole, niin lukujono hajaantuu

esim. Määritä lukujonon a_n raja-arvo, kun

$$a) \quad a_n = 2n - 1 \quad b) \quad a_n = \frac{n}{2n+1}$$

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1) = \infty \quad (2 \cdot \infty - 1 = \infty)$$

"äärettömyydessä" (askeeminen)

$$- k \cdot \infty = \infty \quad (k = \text{vakio})$$

$$- \infty \pm k = \infty$$

$$- k^\infty = \begin{cases} \infty, & \text{kun } k > 1 \\ 0, & \text{kun } -1 < k < 1 \\ \text{ei ole}, & \text{kun } k \leq -1 \end{cases}$$

$$- \frac{k}{\infty} = 0 \quad (k = \text{vakio})$$

- ns. epämääräisiä muotoja (kuten $\frac{0}{0}$ -muoto)
ovat $\frac{\infty}{\infty}$ ja $\infty - \infty$

$$\begin{aligned} b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n} \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{\infty} = 0\right) \end{aligned}$$

$$\text{koska } a_1 = \frac{1}{3}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{3} \leq a_n < \frac{1}{2}$$

Aritmeettinen lukujono ja summa

- Jos lukujonossa a_n kahden peräkkäisen termin erotus on muuttumaton eli vakio, niin lukujono a_n on aritmeettinen

eli aritm. jonossa $a_{n+1} - a_n = d$, d = erotusluku, vakio

- yleinen termi

jos aritm. jonon 1. termi on a_1 ja erotusluku d ^{differentssi}

niin $a_2 = \underline{a_1} + d \quad (a_2 - a_1 = d)$

$a_3 = \underline{a_2} + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$

⋮

$a_n = a_1 + (n-1)d$

esim. Maarita lukejonon $3, 7, 11, 15, \dots$

tuhannes termi. Kuinka mones termi on 999?

jono on aritmeettinen, sillä $d=4$ ($a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots$)

ja $a_1 = 3$

nyt yleisen termi

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$$

tuhannes termi

$$\begin{aligned} a_{1000} &= 3 + 999 \cdot 4 = 4 \cdot 1000 - 1 \\ &= 3999 \end{aligned}$$

$$a_n = 999$$

$$4n - 1 = 999$$

$$4n = 1000 \quad |:4$$

$$n = 250$$

$$\Rightarrow a_{250} = 999$$

- aritm. summa

o kun lasketaan aritm. jonon $a_1, a_2, \dots, a_n$ termit yhteen saadaan aritm. summa

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{n \text{ kpl}} \left(= \sum_{k=1}^n a_k \right)$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

esim. Laske lukujonon $3, 7, 11, 15, \dots$ tuhannen ensimmäisen termin summa

edellä laskettiin $a_{1000} = 3999$ ($a_n = 3 + (n-1) \cdot 4$)

kyseessä summa

$$\begin{aligned} S_{1000} &= \overset{a_1}{3} + 7 + 11 + \dots + 3991 + 3995 + \overset{a_{1000}}{3999} \\ &= 1000 \cdot \frac{3 + 3999}{2} \end{aligned}$$

Geometrinen lukujono ja summa

- lukujono a_n on geometrinen, jos kahden peräkkäisen termin suhde on vakio

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ (=vakio)}$$

q = suhdeluku

- jos geom. jonon 1. termi on a_1 ja suhdeluku q , niin
 $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_2 q = a_1 q^2$, $a_4 = a_1 q^3$, ...
yleinen termi $a_n = a_1 q^{n-1}$

esim. Kuinka mones lukujonon 16, 24, 36, ... termi ylittää arvon 100000?

$$\frac{24}{16} = \frac{3}{2} = \frac{36}{24} \quad \text{eli } q = \frac{3}{2} \quad \text{eli kyseessä geom. jono}$$

$$\text{yleinen termi } a_n = \underline{16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > 10^5}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > \frac{10^5}{16} \quad (\text{otetaan ln t\u00e4i log})$$

$$\ln \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > \ln \frac{10^5}{16}$$

$$(n-1) \cdot \ln \frac{3}{2} > \ln \frac{10^5}{16} \quad | : \ln \frac{3}{2} > 0$$

$$n-1 > \frac{\ln \frac{10^5}{16}}{\ln \frac{3}{2}} \approx 21,56$$

$$n > 22,56 \quad \text{eli } n = 23$$

eli jonoa 23. termi ylitt\u00e4\u00e4 $10^5 : n$

$$\left(\begin{array}{l} a_{23} = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{22} \approx 119709, \dots \\ a_{22} = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{21} \approx 79806, \dots \end{array} \right)$$

- geometrinen summa

$$S_n = a_1 + \underbrace{a_1 q}_{a_2} + \underbrace{a_1 q^2}_{a_3} + \dots + \underbrace{a_1 q^{n-1}}_{a_n}$$

$$= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ kun } q \neq 1$$

jos $q=1$ eli $a_1=a_2=\dots=a_n$ (jokainen termi on sama)

$$\text{t\u00f6n} \quad S_n = n \cdot a_1$$

esim. Laske edellisen esimerkin lukujonon 16, 24, 36, ...
10 ensimmäisen termin summa

$$S_{10} = \frac{16(1-(\frac{3}{2})^{10})}{1-\frac{3}{2}} \left(= \frac{16((\frac{3}{2})^{10}-1)}{\frac{3}{2}-1} \right)$$

=