

# 1 LUKUJONON MUODOSTAMINEN JA YLEINEN JÄSEN

**Lukujono** on järjestetty ja päättymätön luettelo reaalilukuja. Lukujonon lukuja kutsutaan jäseniksi.

lukujono neljäs jäsen

$\overbrace{1, 3, 5, 7, \dots}$

**Esimerkki 1** Jatka lukujonoa kolmella jäsenellä.

- a) 2, 4, 6,
- b)  $-1, -3, -5,$
- c)  $\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2,$
- d) 1, 2, 4, 8,

**Esimerkki 2** Lukujono on  $-3, -1, 1, 3, 5, \dots$  Määritä lukujonon

- a) 9. jäsen
- b) 100. jäsen
- c) sanallinen sääntö, jolla voidaan laskea mikä tahansa jäsen.

## Lukujonoihin liittyviä merkintöjä

Lukujonon nimeämisessä käytetään yleensä aakkosten alkupään kirjaimia  $a, b, c$  jne.

Jos lukujonon nimeämisessä käytetään kirjainta  $a$ , niin

- merkintä  $a_3$  tarkoittaa lukujonon 3. jäsentä
- järjestyslukua  $n$  kutsutaan muuttujaksi
- $n$ . jäseneen eli yleiseen jäseneen viitataan merkinnällä  $a_n$
- koko lukujonoon viitataan merkinnällä  $(a_n)$ .

Lukujonon  $n$ . jäsen voidaan usein esittää lausekkeena.

Esimerkiksi  $n$ . jäsen  $a_n = n^2 + 4n$

**Esimerkki 3** Lukujonon  $n$ . jäsen on  $a_n = \frac{n+3}{3n}$ . Laske lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä.

**\*Lukujonon analyyttinen ja rekursiivinen sääntö**

- Sääntö on **analyyttinen**, jos lukujonon jäsen voidaan laskea sen järjestysluvun  $n$  avulla. Analyyttisellä säännöllä voidaan laskea mikä tahansa lukujonon jäsen.
- Sääntö on **rekursiivinen**, jos lukujonon jäsen voidaan laskea edeltävien jäsenten avulla. Rekursiivista sääntöä ei voi käyttää, jos edeltäviä jäseniä ei tiedetä.

Esimerkin 3 sääntö  $a_n = \frac{n+3}{3n}$  on analyyttinen. Sitä käyttäen voidaan laskea suoraan esimerkiksi jäsen  $a_{100}$  sijoittamalla muuttujan  $n$  paikalle arvo 100.

Rekursiivinen sääntö voi olla esimerkiksi ”Ensimmäinen jäsen  $a_1 = 3$  ja toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 2.”

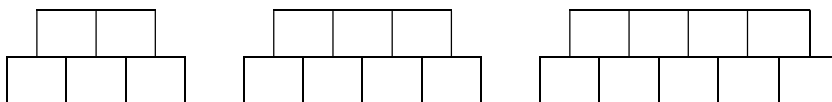
**\*Esimerkki 4** Lukujono alkaa 2, 4, 8, 16, ... Muotoile lukujonolle jokin sääntö, joka on **a)** rekursiivinen **b)** analyyttinen.

## Tehtäviä

1. Lukujonon ensimmäinen jäsen on 3. Kirjoita lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä, kun toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan
  - a) lisäämällä edelliseen jäsenen luku 4
  - b) kertomalla edellinen jäsen luvulla 2
  - c) vähentämällä edellisestä jäsenestä luku 2.
2. Määritä lukujonon viides ja kuudes jäsen.
  - a) 4, 7, 10, 13, ...
  - b) 7, - 14, 28, - 56, ...
  - c) 11, 6, 1, - 4, ...
3. Muodosta lukujonolle sääntö, jolla lukujonon jäsen saadaan edellisestä jäsenestä. Laske puuttuvat jäsenet.
  - a) 11, 17, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, 35, ...
  - b) \_\_\_\_\_, 3, 9, \_\_\_\_\_, 81, ...
  - c) 64, \_\_\_\_\_, 16, \_\_\_\_\_, 4, 2, ...
4. Lukujonon jäsen saadaan kertomalla järjestysluku viidellä ja vähentämällä tuloksesta luku 2. Täydennä taulukko.

| Järjestysluku | Lauseke         | Jäsen |
|---------------|-----------------|-------|
| 1             | $5 \cdot 1 - 2$ | 3     |
| 2             |                 |       |
| 3             |                 |       |
| 4             |                 |       |
| 100           |                 |       |

5. Piirrä kuviojonon seuraava kuvio.

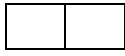


- a) Kuinka monta neliötä on kymmenennessä kuviossa?
- b) Kuinka monta neliötä on sadannessa kuviossa?
- c) Muotoile sääntö, jolla kuvion muodostavien neliöiden lukumäärä saadaan laskettua kuvion järjestysluvun perusteella.

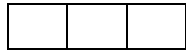
6. Lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat  $-5$  ja  $2$ . Selvitä lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä, jos kolmannesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen on kahden edellisen jäsenen
- a) summa
  - b) tulo.
7. Jalkapalloturnauksen ensimmäinen ottelu alkaa klo 10.30. Jokainen ottelu kestää 30 minuuttia, ja otteluiden välissä on 10 minuutin tauko.
- a) Luettele viiden ensimmäisen ottelun alkamisajat.
  - b) Mihin aikaan alkaa päivän viimeinen eli 9. ottelu?
8. Lukujonon  $n$ . jäsen  $a_n = \frac{12}{n}$ . Laske lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä.
9. Lukujonon jäsen saadaan lisäämällä sen järjestyslukuun  $n$  luku 5.
- a) Laske lukujonon jäsenet  $a_1$ ,  $a_2$  ja  $a_3$  sekä sadas jäsen  $a_{100}$ .
  - b) Kirjoita lukujonon  $n$ . jäsen  $a_n$ .
10. Kirjoita lukujonon  $n$ . jäsen  $a_n$  sekä 10. jäsen  $a_{10}$ , kun jäsen saadaan
- a) korottamalla järjestysluku  $n$  potenssiin 3
  - b) kertomalla järjestysluku  $n$  luvulla 3 ja vähentämällä tulosta luku 2.
11. Mikä on lukujonon 5, 10, 15, 20, ...
- a) sadas jäsen  $a_{100}$
  - b)  $n$ . jäsen  $a_n$ ?
12. Selvitä lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä, kun jonon rekursiivinen sääntö on seuraava: ”Ensimmäinen jäsen  $a_1 = 2$  ja toisesta jäsenestä alkaen jonon jäsen saadaan vähentämällä edellisestä jäsenestä luku 3.”
13. Lukujonon ensimmäinen jäsen  $a_1 = 5$  ja toisesta jäsenestä alkaen jonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 4. Laske lukujonon 5 ensimmäistä jäsentä.
14. Laske lukujonon  $(a_n)$  neljä ensimmäistä jäsentä.
- a)  $a_n = n \cdot \frac{1}{6}$
  - b)  $a_n = \frac{n}{2} + \frac{2}{n}$
  - c)  $a_n = 1 - 3n^2$

**15. a)** Kirjoita kuviojonon neljän ensimmäisen ja 100. kuvion neliöiden lukumäärät.

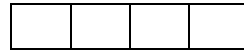
**b)** Muodosta sääntö  $a_n$ , jolla voidaan laskea  $n$ . kuvion neliöiden lukumäärä.



kuvio 1



kuvio 2



kuvio 3

**16.** Mikä on lukujonon  $-2, -4, -6, -8, \dots$

**a)** sadas jäsen  $a_{100}$

**b)**  $n$ . jäsen  $a_n$ ?

**17.\*** Lukujonon rekursiivinen sääntö on

**a)**  $a_1 = 5$  ja  $a_n = a_{n-1} + 2$

**b)**  $a_1 = 3$  ja  $a_n = a_{n-1} - 4$

Kirjoita lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä, kun  $n = 2, 3, 4, \dots$

**18.\*** Esitä lukujonon rekursiivinen sääntö lausekkeena, kun

**a)** lukujonon ensimmäinen jäsen  $a_1 = 3$  ja toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 5

**b)** lukujonon ensimmäinen jäsen  $a_1 = 5$  ja toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 10.

# Vastaukset

1. a) 3, 7, 11, 15, 19                      b) 3, 6, 12, 24, 48                      c) 3, 1, -1, -3, -5
2. a) 16, 19                                      b) 112, -224                                      c) -9, -14
3. a) 23 ja 29                                      b) 1 ja 27                                      c) 32 ja 8

4.

| Järjestysluku | Lauseke           | Jäsen |
|---------------|-------------------|-------|
| 1             | $5 \cdot 1 - 2$   | 3     |
| 2             | $5 \cdot 2 - 2$   | 8     |
| 3             | $5 \cdot 3 - 2$   | 13    |
| 4             | $5 \cdot 4 - 2$   | 18    |
| 100           | $5 \cdot 100 - 2$ | 498   |

5.

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

- a) 23                      b) 203                      c) Järjestysluku kerrotaan luvulla 2 ja tuloon lisätään luku 3
6. a) -5, 2, -3, -1, -4                                      b) -5, -2, 10, -20, -200
7. a) 10.30, 11.10, 11.50, 12.30, 13.10                                      b) 15.50
8. 12, 6, 4, 3
9. a)  $a_1 = 6, a_2 = 7, a_3 = 8, a_{100} = 105$                                        $a_n = n + 5$
10. a)  $a_n = n^3, a_{10} = 1000$                                       b)  $a_n = 3n - 2, a_{10} = 28$
11. a)  $a_{100} = 500$                                       b)  $a_n = 5n$
12.  $a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = -4, a_4 = -7$
13.  $a_1 = 5, a_2 = 9, a_3 = 13, a_4 = 17, a_5 = 21$
14. a)  $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$                       b)  $2\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{6}, 2\frac{1}{2}$                       c) -2, -11, -26, -47
15. a)  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5, a_{100} = 101$                       b)  $a_n = n + 1$
16. a)  $a_{100} = -200$                       b)  $a_n = -2n$
17. a)  $a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 9, a_4 = 11$                                       b)  $a_1 = 3, a_2 = -1, a_3 = -5, a_4 = -9$
18. a)  $a_1 = 3$  ja  $a_n = a_{n-1} + 5$                                       a)  $a_1 = 5$  ja  $a_n = 10 \cdot a_{n-1}$