# K1.

**a)** Lasketaan 1,7 %:n korko vuoden ajalta.
$0{,}017 \cdot 27\,500 = 467{,}50$ (€) 1,7 % = 0,017

Korosta pankki perii ja tilittää valtiolle 30 %:n lähdeveron. Lasketaan 30 % korosta 467,50 €.
$0{,}30 \cdot 467{,}50 = 140{,}25$ (€) 30 % = 0,30

Lähdeveron pyöristyssäännön mukaan lähdeveron suuruus on 140,20 €.

Leevi saa korkoa 467,50 € – 140,20 € = 327,30 €.

**b)** Talletuksen reaaliarvon muutos saadaan selville laskemalla tilin pääoma vuoden kuluttua ja vertaamalla sitä pääomaan, jossa huomioidaan inflaatio eli yleisen hintatason muutos.

Tilin pääoma koron lisäämisen jälkeen on
27 500,00 € + 327,30 € = 27 827,30 €.

Talletusaikana inflaatio oli 0,8 %, joten pääoman 27 500 € ostovoima säilyy samana, jos pääoma kasvaa 0,8 %.
$1{,}008 \cdot 27\,500{,}00$ € = 27 720,00 € 100 % + 0,8 % = 100,8 % = 1,008

Verrataan pääomaa 27 827,30 € pääomaan 27 720,00 €.
$\frac{27\,827{,}30}{27\,720{,}00} \approx 1{,}0039 = 100{,}39\ \%$
Pääoman reaaliarvo kasvoi 100,39 % – 100 % = 0,39 %.

Talletuksen reaalikorkokanta oli 0,39 %.

**Vastaus**
**a)** 327,30 €
**b)** 0,39 %

# K2.

**a)** Korkoa ei makseta laskun eräpäivältä, joten ensimmäinen korkopäivä on 21. kesäkuuta ja viimeinen 3. elokuuta.

Saksalaisessa korkotavassa jokaisessa kuukaudessa ajatellaan olevan 30 päivää ja vuodessa 360 päivää.

Korkopäiviä on
kesäkuussa $30 - 20 = 10$
heinäkuussa 30 ja
elokuussa 3.

Korkopäiviä on yhteensä $10 + 30 + 3 = 43$, joten korkoaika vuosina on $t = \frac{43}{360}$.

Lasketaan viivästyskoron suuruus.

$$r = 800{,}05 \cdot 0{,}070 \cdot \frac{43}{360} \approx 6{,}69 \ (€)$$

$r = Kit$,
missä $K = 800{,}05$; $i = 0{,}070$ ja
$t = \frac{43}{360}$

Viivästyskoron suuruus on 6,69 €.

**b)** Merkitään korkopäivien lukumäärää kirjaimella $n$ ja muodostetaan lauseke viivästyskorolle.

$$r = 800{,}05 \cdot 0{,}070 \cdot \frac{n}{360}$$

$r = Kit$,
missä $K = 800{,}05$; $i = 0{,}070$ ja
$t = \frac{n}{360}$

Ratkaistaan, kuinka monessa korkopäivässä kertyy 15 euron viivästyskorko.

$$800{,}05 \cdot 0{,}070 \cdot \frac{n}{360} = 15$$

Ratkaistaan CAS-laskimella

$$n \approx 96{,}4$$

Viivästyskorko olisi ylittänyt 15 euroa 97 päivän kuluttua.

Korkopäiviä on
kesäkuussa 30 – 20 = 10
heinäkuussa 30 ja
elokuussa 30.

10 + 30 = 40
40 + 30 = 70

Tähän mennessä kertyneitä korkopäiviä on 70. Lisäksi tarvitaan 97 – 70 = 27 syyskuun päivää. Kertyneen koron määrä ylittää 15 euroa 27.9.

**Vastaus**
**a)** 6,69 €
**b)** 27.9.

# K3.

Lasketaan tilin nettokorkokanta.

$0{,}70 \cdot 1{,}90\ \% = 1{,}33\ \%$ $\qquad$ $100\ \% - 30\ \% = 70\ \% = 0{,}70$

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A kuukausitalletukset.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 12 kuukautta, toinen 11 kuukautta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa yhden kuukauden. Kirjoitetaan sarakkeeseen B kunkin talletuksen korkoaika kuukausina.

Lasketaan soluun C2 ensimmäisen talletuksen koron suuruus kaavalla $r = Kit$ ja kopioidaan kaavaa soluihin C3–C13. Tilin nettokorkokanta on 1,33 %, joten $i = 0{,}0133$.

Lasketaan soluun D2 ensimmäisen talletuksen suuruus vuoden lopussa koron lisäämisen jälkeen ja kopioidaan kaavaa soluihin D3–D13.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **1** | **Talletus (€)** | **Korko-aika (kk)** | **Koron määrä (€)** | **Talletus vuoden lopussa (€)** |
| **2** | 253 | 12 | =A2*0,0133*B2/12 | =A2+C2 |
| **3** | 253 | 11 | | |
| **4** | 253 | 10 | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | |
| **13** | 253 | 1 | | |

Ilmaistaan koron määrä ja talletuksen suuruus vuoden lopussa sentin tarkkuudella. Lasketaan lopuksi talletusten summa soluun D14.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **1** | **Talletus (€)** | **Korko-aika (kk)** | **Koron määrä (€)** | **Talletus vuoden lopussa (€)** |
| **2** | 253 | 12 | 3,36 | 256,36 |
| **3** | 253 | 11 | 3,08 | 256,08 |
| **4** | 253 | 10 | 2,80 | 255,80 |
| **5** | 253 | 9 | 2,52 | 255,52 |
| **6** | 253 | 8 | 2,24 | 255,24 |
| **7** | 253 | 7 | 1,96 | 254,96 |
| **8** | 253 | 6 | 1,68 | 254,68 |
| **9** | 253 | 5 | 1,40 | 254,40 |
| **10** | 253 | 4 | 1,12 | 254,12 |
| **11** | 253 | 3 | 0,84 | 253,84 |
| **12** | 253 | 2 | 0,56 | 253,56 |
| **13** | 253 | 1 | 0,28 | 253,28 |
| **14** | | | **Yhteensä** | 3057,87 |

=SUMMA(D2:D13)

Tilillä on rahaa vuoden lopussa koron maksamisen jälkeen 3057,87 €.

**Vastaus**
3057,87 €

# K4.

**a)** Lasketaan tilin nettokorkokanta.
$0{,}70 \cdot 1{,}25\ \% = 0{,}875\ \%$

Kun pääomaan lisätään $0{,}875\ \%$:n nettokorko, niin korkokerroin on $100\ \% + 0{,}875\ \% = 100{,}875\ \% = 1{,}00875$. Lasketaan pääoma viiden vuoden kuluttua.

$K_5 = 80\,000 \cdot 1{,}00875^5$
$\approx 83\,561{,}79\ (€)$

$K_n = Kq^n$, missä $K = 80\,000$, $q = 1{,}00875$ ja $n = 5$.

Talletus kasvaa viidessä vuodessa $83\,561{,}79$ euroksi.

**b)** Merkitään vuosien lukumäärää kirjaimella $n$ ja muodostetaan lauseke talletuksen arvolle.

$K_n = 80\,000 \cdot 1{,}00875^n$

$K_n = Kq^n$,
missä $K = 80\,000$ ja $q = 1{,}00875$.

Ratkaistaan, kuinka monen vuoden kuluttua talletuksen arvo on $90\,000$ euroa.

$80\,000 \cdot 1{,}00875^n = 90\,000$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$n \approx 13{,}5$

Talletuksen arvo ylittää 90 000 euroa $14$ vuodessa.

**Vastaus**
**a)** $83\,561{,}79$ euroksi
**b)** $14$ vuodessa

# K5.

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A talletukset. Ensimmäisen talletuksen talletusaika on viisi vuotta, toisen neljä vuotta ja niin edelleen. Viimeisen talletuksen talletusaika on kaksi vuotta.

Kirjoitetaan sarakkeeseen B kunkin talletuksen talletusaika vuosina.

Lasketaan soluun C2 ensimmäisen talletuksen arvo viiden vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta ja kopioidaan kaavaa soluihin C3–C5. Tilin nettokorkokanta on $0{,}70 \cdot 1{,}70\ \% = 1{,}19\ \%$, joten korkokerroin $q = 100\ \% + 1{,}19\ \% = 101{,}19\ \% = 1{,}0119$.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **1** | **Talletus (€)** | **Talletusaika (v)** | **Talletuksen arvo lopussa (€)** |
| **2** | 2000 | 5 | =A2*1,0119^B2 |
| **3** | 3000 | 4 | |
| **4** | 4000 | 3 | |
| **5** | 5000 | 2 | |

$K_n = Kq^n$

Ilmaistaan kasvaneet pääomat sentin tarkkuudella. Lasketaan lopuksi pääomien summa soluun C6.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **1** | **Talletus (€)** | **Talletusaika (v)** | **Talletuksen arvo lopussa (€)** |
| **2** | 2000 | 5 | 2121,87 |
| **3** | 3000 | 4 | 3145,37 |
| **4** | 4000 | 3 | 4144,51 |
| **5** | 5000 | 2 | 5119,71 |
| **6** | | **Yhteensä** | 14531,45 |

=SUMMA(C2:C5)

Tilillä on rahaa viiden vuoden kuluttua 14 531,45 €.

**Vastaus**
14 531,45 €

# K6.

Lasketaan syntymäpäivälahjojen nykyarvot. Talletuksen nettokorkokanta on $0{,}70 \cdot 1{,}5\ \% = 1{,}05\ \%$.

18 vuoden kuluttua annettavan lahjan nykyarvo on
$1800 \cdot 1{,}0105^{-18} \approx 1491{,}48$ (€). $K_{18} = 1800$, $q = 1{,}0105$ ja $n = 18$

19 vuoden kuluttua annettavan lahjan nykyarvo on
$1900 \cdot 1{,}0105^{-19} \approx 1557{,}99$ (€). $K_{19} = 1900$, $q = 1{,}0105$ ja $n = 19$

20 vuoden kuluttua annettavan lahjan nykyarvo on
$2000 \cdot 1{,}0105^{-20} \approx 1622{,}94$ (€). $K_{20} = 2000$, $q = 1{,}0105$ ja $n = 20$

Lasketaan lahjojen nykyarvojen summa.
1491,48 + 1557,99 + 1622,94 = 4672,41 (€)

Pääoman tulee olla vähintään 4673 €.

**Vastaus**
4673 €

# K7.

Merkitään Anjan tilille tehtävän talletuksen arvoa euroina kirjaimella $x$.
Tällöin Arton tilille tehtävän talletuksen arvo euroina on $9500 - x$.

Anjan talletus on tilillä $21 - 16 = 5$ vuotta. Anjan talletuksen arvo euroina on viiden vuoden kuluttua $x \cdot 1{,}025^5$.

Arton talletus on tilillä $21 - 12 = 9$ vuotta. Arton talletuksen arvo euroina on yhdeksän vuoden kuluttua $(9500 - x) \cdot 1{,}025^9$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan Anjan tilille tehtävän talletuksen arvo $x$.

$$x \cdot 1{,}025^5 = (9500 - x) \cdot 1{,}025^9$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 4984{,}39 \ (€)$$

Vanhempien on sijoitettava Anjan tilille $4984{,}39$ € ja
Arton tilille $9500$ € $- 4984{,}39$ € $= 4515{,}61$ €.

**Vastaus**
Anjan tilille 4984,39 €, Arton tilille 4515,61 €

# K8

**a)** Määritetään lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä. Lausekkeeseen $a_n = 10n - n^2$ sijoitetaan $n$:n arvot 1, 2, 3, 4 ja 5.

$a_1 = 10 \cdot 1 - 1^2 = 9$ Sijoitetaan $n = 1$.
$a_2 = 10 \cdot 2 - 2^2 = 16$ Sijoitetaan $n = 2$.
$a_3 = 10 \cdot 3 - 3^2 = 21$ Sijoitetaan $n = 3$.
$a_4 = 10 \cdot 4 - 4^2 = 24$ Sijoitetaan $n = 4$.
$a_5 = 10 \cdot 5 - 5^2 = 25$ Sijoitetaan $n = 5$.

**b)** Lukujonon ensimmäisen jäsen $a_1 = 8$.

Toisesta jäsenestä alkaen käytetään rekursiokaavaa $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 3$.

Määritetään lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä.

$a_1 = 8$
$a_2 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$
$a_3 = 2 \cdot 13 - 3 = 23$
$a_4 = 2 \cdot 23 - 3 = 43$
$a_5 = 2 \cdot 43 - 3 = 83$

## Vastaus

**a)** Viisi ensimmäistä jäsentä ovat 9, 16, 21, 24 ja 25.
**b)** Viisi ensimmäistä jäsentä ovat 8, 13, 23, 43, 83

# K9

**a)** Luku –40 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku $n$, jolla $a_n = -40$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan $n$.

$$\begin{aligned} a_n &= -40 && \text{Sijoitetaan } a_n = 17 - 3n. \\ 17 - 3n &= -40 \quad |-17 \\ -3n &= -57 \quad |:(-3) \\ n &= 19 \end{aligned}$$

Ratkaisu $n = 19$ on positiivinen kokonaisluku, joten luku –40 on lukujonon 19. jäsen.

**b)** Luku –40 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku $n$, jolla $a_n = -40$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan $n$.

$$\begin{aligned} a_n &= -40 && \text{Sijoitetaan } a_n = 2n - 6. \\ 2n - 6 &= -40 \quad |+6 \\ 2n &= -34 \quad |:2 \\ n &= -17 \end{aligned}$$

Ratkaisu $n = -17$ ei ole positiivinen kokonaisluku, joten luku –40 ei ole lukujonon jäsen.

**Vastaus**

**a)** on, 19. jäsen
**b)** ei ole

# K10

**a)** Kirjoitetaan sarakkeeseen A jäsenten järjestysluvut 1, 2, 3, ... , 20. Lasketaan sarakkeeseen B lukujonon 20 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

| | A | B | |
|---|---|---|---|
| **1** | **n** | **jäsen** | |
| **2** | 1 | –4 | ”=A2^2 – 5 |
| **3** | 2 | –1 | |
| **4** | 3 | 4 | |
| **5** | 4 | 11 | |
| **6** | 5 | 20 | |
| **7** | 6 | 31 | |
| **8** | 7 | 44 | |
| **9** | 8 | 59 | |
| **10** | 9 | 76 | |
| **11** | 10 | 95 | |
| **12** | 11 | 116 | |
| **13** | 12 | 139 | |
| **…** | … | … | |
| **20** | 19 | 356 | |
| **21** | 20 | 395 | 30. jäsen |
| **22** | **Summa** | 2770 | "=summa(B2:B21) |

Kahdeskymmenes jäsen on 395 ja kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa 2770.

**b)** Kirjoitetaan sarakkeeseen A jäsenten järjestysluvut 1, 2, 3, ... , 20. Lasketaan sarakkeeseen B lukujonon 20 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

| | A | B | |
|---|---|---|---|
| **1** | **n** | **jäsen** | |
| **2** | 1 | -4 | |
| **3** | 2 | 3 | ”=3*B2 + 15 |
| **4** | 3 | 24 | |
| **5** | 4 | 87 | |
| **6** | 5 | 276 | |
| **7** | 6 | 843 | |
| **8** | 7 | 2544 | |
| **9** | 8 | 7647 | |
| **10** | 9 | 22 956 | |
| **11** | 10 | 68 883 | |
| **12** | 11 | 206 664 | |
| **13** | 12 | 620 007 | |
| **…** | … | … | |
| **20** | 19 | 1 355 971 704 | |
| **21** | 20 | 4 067 915 127 | 30. jäsen |
| **22** | **Summa** | 6 101 872 550 | "=summa(B2:B21) |

Kahdeskymmenes jäsen on 4 067 915 127 ja kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa 6 101 872 550.

## Vastaus

**a)** kahdeskymmenes jäsen on 395;
kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa 2770

**b)** kahdeskymmenes jäsen on 4 067 915 127;
kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa 6 101 872 550

# K11

**a)** Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$d = 6 - (-3) = 9$ $\qquad$ $d = a_2 - a_1$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$a_n = -3 + (n-1) \cdot 9$ $\qquad$ $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
$= -3 + 9n - 9$
$= 9n - 12$

Lasketaan jonon 10. jäsen.

$a_{10} = 9 \cdot 10 - 12 = 78$

**b)** Jonon suhdeluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.

$q = \frac{6}{-3} = -2$ $\qquad$ $q = \frac{a_2}{a_1}$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$ $\qquad$ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Lasketaan jonon 10. jäsen.

$a_{10} = -3 \cdot (-2)^9 = 1536$

**Vastaus**

**a)** $a_n = 9n - 12$, $a_{10} = 78$

**b)** $a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$, $a_{10} = 1536$

# K12

**a)** Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$d = 6 - 2 = 4$ $\qquad\qquad$ $d = a_2 - a_1$

Lasketaan jonon 25. jäsen.

$a_{25} = 2 + 24 \cdot 4 = 98$ $\qquad\qquad$ $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 2$, viimeinen yhteenlaskettava $a_{25} = 98$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 25$. Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$S_{25} = 25 \cdot \frac{2 + 98}{2} = 1250$ $\qquad\qquad$ $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

**b)** Jonon suhdeluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.

$q = \frac{6}{2} = 3$ $\qquad\qquad$ $q = \frac{a_2}{a_1}$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_2 = 2$, jonon suhdeluku $q = 3$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 25$. Lasketaan geometrisen summan arvo.

$S_{25} = \frac{2 \cdot (1 - 3^{25})}{1 - 3}$ $\qquad\qquad$ $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$

$= 847\,288\,609\,442$

**Vastaus**

**a)** 1250

**b)** 847 288 609 442

# K13

**a)** Ensimmäinen yhteenlaskettava on $21$ ja viimeinen yhteenlaskettava $636$.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon $21,\ 26,\ \ldots,\ 636$ yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Ensimmäinen jäsen $a_1 = 21$ ja erotusluku $d = 26 - 21 = 5$.
Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 21 + (n-1)\cdot 5 \\ &= 21 + 5n - 5 \\ &= 5n + 16 \end{aligned}$$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku $636$.

$$\begin{aligned} a_n &= 636 && \text{Sijoitetaan } a_n = 5n + 16. \\ 5n + 16 &= 636 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &= 124 \end{aligned}$$

Luku $636$ on jonon $124$. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on $124$.

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$S_{124} = 124 \cdot \frac{21 + 636}{2} = 40\,734$$

$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

**b)** Ensimmäinen yhteenlaskettava on $1$ ja suhdeluku $q = \frac{3}{1} = 3$.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä geometrisen jonon $1,\ 3,\ \ldots,\ 1\,594\,323$ yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$ $\qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku $1\,594\,323$.

$a_n = 1\,594\,323$ $\qquad$ Sijoitetaan $a_n = 3^{n-1}$.

$3^{n-1} = 1\,594\,323$ $\qquad$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$n = 14$

Luku $1\,594\,323$ on jonon $14.$ jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on $14$.

Lasketaan geometrisen summan arvo.

$S_{14} = \frac{1 \cdot (1 - 3^{14})}{1 - 3} = 2\,391\,484$ $\qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$

**Vastaus**
**a)** 40 734
**b)** 2 391 484

# K14

**a)** Jonon erotusluku on

$d = 492 - 500 = -8.$ $\qquad d = a_2 - a_1$

Jonon yleisen jäsenen lauseke on

$a_n = 500 + (n-1) \cdot (-8)$ $\qquad a_n = a_1 + (n-1)d$

$= 500 - 8n + 8$

$= 508 - 8n$

**Tapa 1.** Yhtälön avulla

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan $n$.

$a_n = 10$ $\qquad$ Sijoitetaan $a_n = 508 - 8n.$

$508 - 8n = 10$ $\qquad$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$n = 62,25$

Koska lukujonon jäsenet pienenevät koko ajan, viimeinen kymmentä suurempi jäsen on jonon $62.$ jäsen.

Jonon $62$ ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin $10.$

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan $n$.

$a_n > 10$ $\qquad$ Sijoitetaan $a_n = 508 - 8n.$

$508 - 8n > 10$ $\qquad$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$n < 62,25$

Suurin positiivinen kokonaisluku $n$, joka toteuttaa epäyhtälön, on $62.$

Jonon $62$ ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin $10.$

**b)** Jonon suhdeluku on

$$q = \frac{490}{500} = 0{,}98. \qquad q = \frac{a_2}{a_1}$$

Jonon yleisen jäsenen lauseke on

$$a_n = 500 \cdot 0{,}98^{n-1} \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

**Tapa 1.** Yhtälön avulla

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan $n$.

$$\begin{aligned} a_n &= 10 && \text{Sijoitetaan } a_n = 500 \cdot 0{,}98^{n-1}. \\ 500 \cdot 0{,}98^{n-1} &= 10 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &\approx 194{,}64 \end{aligned}$$

Koska lukujonon jäsenet pienenevät koko ajan, viimeinen kymmentä suurempi jäsen on jonon 194. jäsen.

Jonon 194 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin 10.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan $n$.

$$\begin{aligned} a_n &> 10 && \text{Sijoitetaan } a_n = 500 \cdot 0{,}98^{n-1}. \\ 500 \cdot 0{,}98^{n-1} &> 10 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &< 194{,}64 \end{aligned}$$

Suurin positiivinen kokonaisluku $n$, joka toteuttaa epäyhtälön, on 194.

Jonon 194 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin 10.

## Vastaus

**a)** 62 ensimmäistä jäsentä
**b)** 194 ensimmäistä jäsentä

# K15

**a)** Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$d = 14 - 10 = 4$ $\qquad\qquad$ $d = a_2 - a_1$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$a_n = 10 + (n-1) \cdot 4$ $\qquad\qquad$ $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$= 10 + 4n - 4$

$= 4n + 6$

Kun lasketaan yhteen jonon $n$ ensimmäistä jäsentä,
ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 10$ ja
viimeinen yhteenlaskettava on $a_n = 4n + 6$.

Summan arvo on

$$S_n = n \cdot \frac{10 + (4n + 6)}{2} = n \cdot \frac{4n + 16}{2}.$$

**Tapa 1.** Yhtälön avulla.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan $n$.

$S_n = 10\,000$ $\qquad\qquad$ Sijoitetaan $S_n = n \cdot \frac{4n + 16}{2}$

$n \cdot \frac{4n + 16}{2} = 10\,000$ $\qquad\qquad$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$n \approx -72{,}7$ tai $n \approx 68{,}7$

Koska jonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, summan arvo suurenee,
kun yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärä kasvaa.

On siis laskettava yhteen vähintään 69 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan $n$.

$S_n > 10\,000$ Sijoitetaan $S_n = n \cdot \frac{4n+16}{2}$

$n \cdot \frac{4n+16}{2} > 10\,000$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$n < -72{,}7$ tai $n > 68{,}7$

Pienin positiivinen kokonaisluku $n$, joka toteuttaa epäyhtälön, on $69$.

On siis laskettava yhteen vähintään $69$ lukujonon ensimmäistä jäsentä.

**b)** Merkitään yhteenlaskettavien lukumäärää kirjaimella $n$.
Jonon suhdeluku on

$q = \frac{11}{10} = 1{,}1.$ $q = \frac{a_2}{a_1}$

Geometrisen jonon $10;\ 11;\ 12{,}1;\ \ldots$ $n$:n ensimmäisen jäsenen summa on

$S_n = \frac{10 \cdot (1-1{,}1^n)}{1-1{,}1}.$ $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

**Tapa 1.** Yhtälön avulla

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan $n$.

$S_n = 10\,000$ Sijoitetaan $S_n = \frac{10 \cdot (1-1{,}1^n)}{1-1{,}1}.$

$\frac{10 \cdot (1-1{,}1^n)}{1-1{,}1} = 10\,000$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$n \approx 48{,}42$

Koska lukujonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, summan arvo kasvaa, kun yhteenlaskettavien lukumäärä $n$ kasvaa.

On siis laskettava yhteen vähintään $49$ lukujonon ensimmäistä jäsentä.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan $n$.

$$S_n > 10\,000 \qquad \text{Sijoitetaan } S_n = \frac{10 \cdot (1-1{,}1^n)}{1-1{,}1}.$$

$$\frac{10 \cdot (1-1{,}1^n)}{1-1{,}1} > 10\,000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n > 48{,}42$$

Pienin positiivinen kokonaisluku $n$, joka toteuttaa epäyhtälön, on $49$.

On siis laskettava yhteen vähintään $49$ lukujonon ensimmäistä jäsentä.

## Vastaus

**a)** vähintään $69$
**b)** vähintään $49$

# K16

**a)** Aritmeettisen summan $\sum_{n=5}^{75}(3n-4)$

ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_5 = 3\cdot 5 - 4 = 11$,
viimeinen yhteenlaskettava on $a_{75} = 3\cdot 75 - 4 = 221$ ja
yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 75 - 4 = 71$.

Lasketaan summan arvo.

$$S_{71} = 71\cdot\frac{11+221}{2} \qquad S_n = n\cdot\frac{a_1+a_n}{2}$$
$$= 8236$$

**b)** Geometrisen summan $\sum_{n=1}^{15}(4\cdot 3^n)$

ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 4\cdot 3^1 = 12$,
suhdeluku $q = 3$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 15$.

Lasketaan summan arvo.

$$S_{15} = \frac{12\cdot(1-3^{15})}{1-5} \qquad S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$
$$= 86\,093\,436$$

**Vastaus**
**a)** 8236
**b)** 86 093 436

# K17

**a)** Muodostetaan toisen jäsenen ja viidennen jäsenen perusteella kaksi yhtälöä, joissa muuttujina ovat $a_1$ ja $d$. Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_2 = 14 & a_2 = a_1 + d \\ a_5 = 36{,}5 & a_5 = a_1 + 4d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + d = 14 \\ a_1 + 4d = 36{,}5 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$a_1 = 6{,}5$ ja $d = 7{,}5$

Lukujonon ensimmäinen jäsen on 6,5.

**b)** Muodostetaan toisen jäsenen ja neljännen jäsenen perusteella kaksi yhtälöä, joissa muuttujina ovat $a_1$ ja $q$. Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_2 = 18 & a_2 = a_1 \cdot q \\ a_4 = 162 & a_4 = a_1 \cdot q^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q = 18 \\ a_1 \cdot q^3 = 162 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$a_1 = -6$ ja $q = -3$ tai $a_1 = 6$ ja $q = 3$

Lukujonon ensimmäinen jäsen on –6 tai 6.

**Vastaus**

**a)** 6,5

**b)** –6 tai 6

# K18

**a)** Lukujono on aritmeettinen, jos peräkkäisten jäsenten erotus $a_{n+1} - a_n$ on vakio kaikilla $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$ .

Muodostetaan peräkkäisten jäsenten lausekkeet.

$$a_n = 4 - 17n$$
$$a_{n+1} = 4 - 17(n+1) = 4 - 17n - 17 = -13 - 17n$$

Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotus.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (-13 - 17n) - (4 - 17n) \\ &= -13 - 17n - 4 + 17n \\ &= -17 \end{aligned}$$

Koska $a_{n+1} - a_n = -17$ kaikilla $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$, lukujono $(a_n)$ on aritmeettinen. □

**b)** Lukujonon jäsenistä mikään ei ole nolla, joten lukujono on geometrinen, jos peräkkäisten jäsenten suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ on vakio kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ .

Muodostetaan peräkkäisten jäsenten lausekkeet.

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{4n}$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot 3^{4(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot 3^{4n+4}$$

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhde.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3^{4n+4}}{\frac{1}{2} \cdot 3^{4n}} \qquad \frac{u^n}{u^m} = u^{n-m}$$

$$= 3^{4n+4-4n}$$

$$= 3^4 = 81$$

Koska $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 81$ kaikilla $n = 1, 2, 3, ...$, lukujono $(a_n)$ on geometrinen. $\square$

# K19

Merkitään kuukausittaisen talletuksen suuruutta kirjaimella $x$.

Mirja tallettaa tilille rahaa yhteensä $12x$ (€).

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa $12$ kuukautta, toinen talletus $11$ kuukautta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa $1$ kuukauden.

Tilin nettokorkokanta on $0{,}70 \cdot 2{,}65\ \% = 1{,}855\ \%$.

Muodostetaan lauseke, joka ilmaisee talletukselle kertyvän koron määrän.

$$x \cdot 0{,}01855 \cdot \frac{12}{12} + x \cdot 0{,}01855 \cdot \frac{11}{12} + \ldots + x \cdot 0{,}01855 \cdot \frac{1}{12}$$

Erotetaan yhteinen tekijä.

$$= x \cdot 0{,}01855 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \ldots + 1)$$

Lasketaan sulkeista aritmeettinen summa.

$$= x \cdot 0{,}01855 \cdot \frac{1}{12} \cdot \ 12 \cdot \frac{12+1}{2}$$

$$= x \cdot 0{,}01855 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78$$

Vuoden lopussa koron maksamisen jälkeen tilin pääoma on

$$12x + x \cdot 0{,}01855 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78.$$

Ratkaistaan, kuinka suurella kuukausittaisella talletuksella $x$ tilillä on vuoden lopussa rahaa $3500$ €.

$$12x + x \cdot 0{,}01855 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78 = 3500$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 289\ \text{(€)}$$

Kuukausittaisen talletuksen tulisi olla $289$ euroa.

**Vastaus**
289 €

# K20

Tilin nettokorkokanta on 1,25 %. Pääoma kasvaa vuosittain 1,0125-kertaiseksi.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 64 – 45 = 19 vuotta, toinen talletus 18 vuotta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 64 – 55 = 9 vuotta.

Lasketaan, kuinka paljon tilillä on rahaa Matiaksen 64-vuotispäivänä.

$$1000 \cdot 1{,}0125^{19} + 1000 \cdot 1{,}0125^{18} + \ldots + 1000 \cdot 1{,}0125^{10} + 1000 \cdot 1{,}0125^{9}$$
$$= 1000 \cdot 1{,}0125^{9} + 1000 \cdot 1{,}0125^{10} + \ldots + 1000 \cdot 1{,}0125^{18} + 1000 \cdot 1{,}0125^{19}$$

Kyseessä on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1000 \cdot 1{,}0125^{9}$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n$ =19 – 8 = 11 ja suhdeluku $q$ = 1,0125. Lasketaan summan arvo.

$$S_{11} = \frac{1000 \cdot 1{,}0125^{9} \cdot (1 - 1{,}0125^{11})}{1 - 1{,}0125}$$
$$\approx 13\,099{,}60 \ (€)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Matiaksella on matkarahaa 13 099,60 €

**Vastaus**
13 099,60 €

# K21

Merkitään vuotuisen talletuksen suuruutta kirjaimella $x$.

Tilin nettokorkokanta on 1,95 %. Pääoma kasvaa vuosittain 1,0195-kertaiseksi.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 20 vuotta, toinen talletus 19 vuotta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 1 vuoden.

Muodostetaan lauseke, joka ilmaisee tilillä olevan rahamäärän 20 vuoden kuluttua.

$$x \cdot 1{,}0195^{20} + x \cdot 1{,}0195^{19} + \ldots + x \cdot 1{,}0195^{2} + x \cdot 1{,}0195^{1}$$
$$= x \cdot 1{,}0195^{1} + x \cdot 1{,}0195^{2} + \ldots + x \cdot 1{,}0195^{19} + x \cdot 1{,}0195^{20}$$

Kyseessä on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = x \cdot 1{,}0195$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 20$ ja suhdeluku $q = 1{,}0195$. Muodostetaan summan lauseke.

$$S_{20} = \frac{x \cdot 1{,}0195 \cdot (1 - 1{,}0195^{20})}{1 - 1{,}0195} \qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Ratkaistaan, kuinka suurella vuotuisella talletuksella $x$ tilillä on 20 vuoden kuluttua rahaa 8000 €.

$$\frac{x \cdot 1{,}0195 \cdot (1 - 1{,}0195^{20})}{1 - 1{,}0195} = 8000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 325 \text{ (€)}$$

Tilille kertyy 8000 €, jos vuotuinen talletus on 325 €.

**Vastaus**
325 €

# K22

**a)** Pitää laskea stipendien nykyarvot. Myönnettyjen stipendien yhteenlasketun nykyarvon tulee olla yhtä suuri kuin lahjoitettu rahamäärä $15\,000$ euroa.

Merkitään yhden stipendin suuruutta kirjaimella $x$.

Toisen, vuoden kuluttua jaettavan stipendin, nykyarvo on $x \cdot 1{,}045^{-1}$.

Kahden vuoden kuluttua jaettavan stipendin nykyarvo on $x \cdot 1{,}045^{-2}$.
...
Viimeisen, $20$ vuoden kuluttua jaettavan stipendin, nykyarvo on $x \cdot 1{,}045^{-20}$.

Joka vuosi jaetaan kaksi stipendiä. Kaikkien stipendien nykyarvojen summa on
$2x + 2x \cdot 1{,}045^{-1} + 2x \cdot 1{,}045^{-2} + ... + 2x \cdot 1{,}045^{-20}$.

Summa on geometrinen summa, jossa yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 20$, ensimmäisen yhteenlaskettava $a_1 = 2x$ ja suhdeluku $q = 1{,}045^{-1}$.

Summan arvo on

$$S_{20} = \frac{2x \cdot (1 - (1{,}045^{-1})^{20})}{1 - 1{,}045^{-1}} \qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$= \frac{2x \cdot (1 - 1{,}045^{-20})}{1 - 1{,}045^{-1}}.$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan stipendin suuruus $x$.

$$\frac{2x \cdot (1 - 1{,}045^{-20})}{1 - 1{,}045^{-1}} = 15\,000$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 551{,}74 \text{ (€)}$$

Stipendin suuruus voi olla $550$ euroa.

**b)** Stipendin suuruus on 700 euroa.
Merkitään korkokerrointa kirjaimella $q$.

a-kohdan perusteella stipendien nykyarvojen summa on

$$S_{20} = \frac{2 \cdot 700 \cdot (1 - (q^{-1})^{20})}{1 - q^{-1}}$$
$$= \frac{2 \cdot 700 \cdot (1 - q^{-20})}{1 - q^{-1}}.$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkokerroin $q$.

$$\frac{2 \cdot 700 \cdot (1 - q^{-20})}{1 - q^{-1}} = 15\,000$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q \approx 1{,}0784 \ (€)$$

Korkokerroin 1,0784 = 107,84 % vastaa 7,84 %:n vuotuista korkoa.

## Vastaus

**a)** 550 €
**b)** 7,84 %

# K23

**a)** Merkitään ensimmäisen pallon sädettä kirjaimella $r_1$ ja sen sisään asetetun kuution särmän pituutta kirjaimella $a_1$.

Pallon sisään asetetun kuution avaruuslävistäjä on pallon halkaisija. Kun kuution särmän pituus on $a_1$, avaruuslävistäjän pituus on $\sqrt{{a_1}^2 + {a_1}^2 + {a_1}^2} = \sqrt{3{a_1}^2} = \sqrt{3} \cdot a_1$.

Siis

$$\sqrt{3} \cdot a_1 = 2r_1 \quad \Big| : \sqrt{3}$$

$$a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} r_1$$

Kuution sisään asetetun pallon halkaisijan pituus on yhtä suuri kuin kuution särmän pituus. Toisen pallon säde on siis puolet ensimmäisen kuution särmän pituudesta.

$$r_2 = \frac{1}{2} a_1 \qquad \text{Sijoitetaan } a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} r_1.$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} r_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} r_1$$

Seuraava pallo sijoitetaan samalla tavalla $r_2$-säteisen pallon sisään, joten sen säde on $r_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} r_2$ ja niin edelleen.

Koska seuraavan pallon säde saadaan aina edellisen pallon säteestä kertomalla luvulla $\frac{1}{\sqrt{3}}$, pallojen säteen muodostavat geometrisen jonon, jonka suhdeluku $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

**b)** Kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia, joten niiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Säteiden suhde on pallojen mittakaava. Siis peräkkäisten pallojen pinta-alojen suhde on

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Pinta-alat muodostavat siis geometrisen jonon, jonka suhdeluku $q = \frac{1}{3}$

.

**c)** Kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia, joten niiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Säteiden suhde on pallojen mittakaava. Siis peräkkäisten pallojen tilavuuksien suhde on

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{(\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Tilavuudet muodostavat siis geometrisen jonon, jonka suhdeluku $q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

## Vastaus

**a)** $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **b)** $q = \frac{1}{3}$ **c)** $q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

# K24.

**a)** Maksueriä on yhteensä $15 \cdot 12 = 180$ kappaletta.

Kertalyhennys on $\dfrac{90\ 000\ €}{180} = 500\ €$.

Lasketaan ensimmäisen kuukauden korko.

$90\ 000 \cdot 0{,}036 \cdot \dfrac{1}{12} = 270\ (€)$ $r = Kit$, missä $K = 90\ 000$, $i = 0{,}036$ ja $t = \dfrac{1}{12}$.

Lasketaan ensimmäinen takaisinmaksuerä.

$500 + 270 = 770\ (€)$ kertalyhennys + korko

**b)** Viimeisen 500 euron takaisinmaksuerän jälkeen lainapääoma on 0 €.
Lasketaan viimeisen puolivuotiskauden korko.

$500 \cdot 0{,}036 \cdot \dfrac{1}{12} = 1{,}50\ (€)$ $r = Kit$, missä $K = 500$, $i = 0{,}036$ ja $t = \dfrac{1}{12}$.

Lasketaan viimeinen takaisinmaksuerä. kertalyhennys + korko

$500 + 1{,}50 = 501{,}50\ (€)$

**c)** Kuukausittaiset korot muodostavat aritmeettisen summan, jonka ensimmäinen jäsen on 270 € ja viimeinen jäsen on 1,50 €.

Summassa on jäseniä 180 kappaletaa.

Lasketaan maksetun koron määrä.

$n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$ $n = 180,\ a_1 = 270\ €,\ a_{96} = 1{,}50\ €$

$= 180 \cdot \dfrac{270\ € + 1{,}50\ €}{2}$

$= 24\ 435\ €$

**Vastaus**

**a)** 770 € **b)** 501,50 € **c)** 24 435 €

# K25.

**a)** Takaisinmaksueriä on kaikkiaan $\frac{60\ 000}{1000} = 60$.

Lainakuukausia on yhtä monta kuin lyhennyseriä, joten lainan takaisinmaksuaika on 60 kk = 5 vuotta.

**b)** Vuosikorko 5,00 % = 0,05.

Ensimmäisen kuukauden korko on

$r = Kit$ $\qquad K = 60\ 000\ €, i = 0{,}05, t = \frac{1}{12}$

$= 60\ 000\ € \cdot 0{,}05 \cdot \frac{1}{12}$

$= 250\ €$

Viimeisen kuukauden korko on

$r = Kit$ $\qquad K = 1000\ €, i = 0{,}05, t = \frac{1}{12}$

$= 1000\ € \cdot 0{,}05 \cdot \frac{1}{12}$

$\approx 4{,}17\ €$

Kuukausittaiset korot muodostavat aritmeettisen summan.

$n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ $\qquad n = 60,\ a_1 = 250\ €,\ a_{10} = 4{,}17\ €$

$= 60 \cdot \frac{250\ € + 4{,}17\ €}{2}$

$= 7625{,}10\ €$

Lainan kokonaiskustannukset koostuvat koroista ja pääomasta.

Kokonaiskustannukset ovat
60 000 € + 7625,10 € = 67 625,10 € ≈ 67 625 €.

**Vastaus**
**a)** 5 vuotta
**b)** 67 625 €

# K26.

**Huomaa:**
Tehtävän voi ratkaista joko ensimmäisen tai viimeisen maksuerän avulla, molempia ei tarvita.

Merkitään lainan alkupääomaa kirjaimella $a$.

Maksueriä on $18 \cdot 12 = 216$.

Kertalyhennys on $\frac{a}{216}$.

**Tapa 1: Ratkaisu ensimmäisen maksuerän avulla**

Ensimmäisen kuukauden korko on

$$r = Kit \qquad K = a,\ i = 0{,}039,\ t = \frac{1}{12}$$
$$= a \cdot 0{,}039 \cdot \frac{1}{12}$$
$$= \frac{0{,}039a}{12}$$

Ensimmäinen maksuerä on $\frac{a}{216} + \frac{0{,}039a}{12}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan $a$.

$$\frac{a}{216} + \frac{0{,}039a}{12} = 1875{,}35 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$a \approx 237\ 999{,}77$$
$$\approx 238\ 000\ (€)$$

**Vastaus**
238 000 €

**Tapa 2: Ratkaisu viimeisen maksuerän avulla**

Viimeisen kuukauden korko on

$$r = Kit \qquad K = \frac{a}{216},\ i = 0{,}039,\ t = \frac{1}{12}$$
$$= \frac{a}{216} \cdot 0{,}039 \cdot \frac{1}{12}$$
$$= \frac{0{,}039a}{216 \cdot 12}$$

Viimeinen maksuerä on $\frac{a}{216} + \frac{0{,}039a}{216 \cdot 12}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan $a$.

$$\frac{a}{216} + \frac{0{,}039a}{216 \cdot 12} = 1105{,}43 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$a \approx 237\,999{,}38$$
$$\approx 238\,000 \ (€)$$

**Vastaus**
238 000 €

# K27.

**a)** Maksueriä on yhteensä $17 \cdot 12 = 204$ kappaletta.

Lasketaan maksukauden korkokerroin.

$$q = 100\ \% + \frac{4{,}8\ \%}{12} = 100{,}4\ \% = 1{,}004$$

Lasketaan takaisinmaksuerän suuruus.

$$A = 90\ 000 \cdot 1{,}004^{204} \cdot \frac{1 - 1{,}004}{1 - 1{,}004^{204}}$$

$$\approx 646{,}22\ (€)$$

$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$, missä $K$ = 90 000, $q$ = 1,004 ja $n$ = 204.

Takaisinmaksuerän suuruus on 646,22 €.

**b)** Lainasta maksetaan kaikkiaan 204 kappaletta 646,22 euron maksueriä. Lainan lyhennykset ja korot ovat yhteensä

$$204 \cdot 646{,}22\ € = 131\ 828{,}88\ €.$$

Tästä summasta korkoa on 131 828,88 € – 90 000 € ≈ 41 829 €.

**Vastaus**
**a)** 646,22 € **b)** 41 829 €

# K28.

**a)** Maksueriä on yhteensä $2 \cdot 12 = 24$ kappaletta.

Lasketaan maksukauden korkokerroin.

$$q = 100\ \% + \frac{6{,}6\ \%}{12} \approx 100{,}55\ \% = 1{,}0055$$

Lasketaan takaisinmaksuerän eli annuiteetin suuruus.

$$A = 8000 \cdot 1{,}0055^{24} \cdot \frac{1 - 1{,}0055}{1 - 1{,}0055^{24}} \approx 356{,}73\ (€)$$

$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$, missä $K = 8000$, $q = 1{,}0055$ ja $n = 24$.

Tasaerän suuruus on 356,73 €.

**b)** Lasketaan jäljellä oleva lainapääoma 1 vuoden kuluttua lainan lyhentämisen jälkeen. Lainaa on tällöin lyhennetty 12 kertaa.

$$V_{12} = 8000 \cdot 1{,}0055^{12} - 356{,}73 \cdot \frac{1 - 1{,}0055^{12}}{1 - 1{,}0055} \approx 4131{,}61\ (€)$$

$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q}$, missä $K = 8000$, $q = 1{,}0055$, $k = 12$ ja $A = 356{,}73$.

Lainaa on jäljellä 1 vuoden kuluttua 4131,61 €.

**c)** Lainasta maksetaan kaikkiaan 24 kappaletta 356,73 euron maksueriä.

Lainan lyhennykset ja korot ovat yhteensä
$24 \cdot 356{,}73\ € = 8561{,}52\ €$.

Tästä summasta korkoa on 8561,52 € – 8000 € = 561,52 €.

**Vastaus**
**a)** 356,73 € **b)** 4131,61 € **c)** 561,52 €

# K29.

Merkitään maksuerien lukumäärää kirjaimella $n$.

Lasketaan maksukauden korkokerroin.

$$q = 100\ \% + \frac{6{,}0\ \%}{12} = 100{,}5\ \% = 1{,}005$$

Tasaerän suuruus on $1150$ €.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan tarvittavien maksuerien lukumäärä $n$.

$$1150 = 64\,000 \cdot 1{,}005^n \cdot \frac{1-1{,}005}{1-1{,}005^n}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx 65{,}4$$

$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$, missä $K$ = 64 000, $q$ = 1,005 ja $A$ = 1150.

Maksueriä tarvitaan $65{,}4$ kappaletta, joten laina-ajaksi on sovittava vähintään $66$ kk = 5 v 6 kk eli $5{,}5$ vuotta.

**Vastaus**
5,5 vuotta

# A1.

**a)** Kun pääomaan lisätään 1,35 %:n korko, niin korkokerroin on 100 % + 1,35 % = 101,35 % = 1,0135.

Lasketaan pääoma 7 vuoden kuluttua.

$K_7 = 46\,000 \cdot 1{,}0135^7 \approx 50\,527{,}07 \ (€)$

Pääoma kasvaa 7:ssä vuodessa 50 527,07 euroksi.

**b)** Merkitään vuosien lukumäärää kirjaimella $n$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan $n$.

$K_n = 60\,000$ $\quad K_n = Kq^n$, missä $K = 46\,000$ ja $q = 1{,}0135$

$46\,000 \cdot 1{,}0135^n = 60\,000$ $\quad$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$n \approx 19{,}8$

Pääoman arvo ylittää 60 000 euroa 20 vuoden kuluttua.

**c)** Merkitään korkokanraa kirjaimella $q$. Laaditaan yhtälö ja ratkaistaan $q$.

$K_n = 2K$ $\quad K_n = Kq^n$, missä $K = 46\,000$ ja $n = 30$

$46\,000 \cdot q^{30} = 2 \cdot 46\,000$ $\quad$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$q \approx -1{,}023374$ tai $q \approx 1{,}023374$

Korkokerroin on positiivinen luku, joten $q$ = 1,023374 = 102,3374 %.

Koska tilillä pitää olla vähintään alkuperäinen pääoma kaksinkertaisena, pyöristetään korkokanta ylöspäin. Nettokorkokannan on oltava vähintään 2,34 %.

**Vastaus**
**a)** 50 527,07 €
**b)** 20 vuoden
**c)** 2,34 %

# A2.

**a)** Lasketaan jonon viisi ensimmäistä jäsentä.

$a_n = 6n + 3$, missä $n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$

$a_1 = 6 \cdot 1 + 3 = 9$

$a_2 = 6 \cdot 2 + 3 = 15$

$a_3 = 6 \cdot 3 + 3 = 21$

$a_4 = 6 \cdot 4 + 3 = 27$

$a_5 = 6 \cdot 5 + 3 = 33$

$a_{20} = 6 \cdot 20 + 3 = 123$

**b)** Muodostetaan yhtälö $a_n = 395$ ja ratkaistaan $n$.

$$\begin{aligned} a_n &= 395 \\ 6n + 3 &= 395 \quad \big| -3 \\ 6n &= 392 \quad \big| :6 \\ n &\approx 65{,}3 \end{aligned}$$

Koska $n$:n arvo ei ole positiivinen kokonaisluku, niin luku $395$ ei ole jonon jäsen.

**c)** Lasketaan 20 ensimmäisen jäsenen summa.

$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$, missä $n = 20$, $a_1 = 9$ ja $a_{20} = 123$

$S_{20} = 20 \cdot \frac{9 + 123}{2} = 1320$

**Vastaus**

**a)** $a_1 = 9,\ a_2 = 15,\ a_3 = 21,\ a_4 = 27,\ a_5 = 33$ ja $a_{20} = 123$

**b)** ei ole

**c)** $S_{20} = 1320$

# A3.

**a)** Jonon suhdeluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.

$$q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

**b)** Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \qquad a_1 = 4,\ q = \frac{3}{2}$$

$$= 4 \cdot (\frac{3}{2})^{n-1}$$

Lasketaan jonon 10. jäsen.

$$a_{10} = 4 \cdot (\frac{3}{2})^9 = \frac{19\,683}{128} \ (= 153\frac{99}{128})$$

**c)** Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan $n$.

$$a_n < 1\,000\,000 \qquad a_n = 4 \cdot (\frac{3}{2})^{n-1}$$

$$4 \cdot (\frac{3}{2})^{n-1} < 1\,000\,000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n < 31{,}7$$

Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa saadun ehdon, on 31. Viimeinen jonon jäsen, joka on pienempi, kuin 1 000 000 on $a_{31}$.

Jonon 31 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 1 000 000.

**Vastaus**

**a)** $q = \frac{3}{2}$

**b)** $a_n = 4 \cdot (\frac{3}{2})^{n-1}$ ja $a_{10} = \frac{19\,683}{128}$

**c)** 31 jäsentä

# A4.

**a)** Maksueriä on yhteensä $15 \cdot 12 = 180$ kappaletta.

Kertalyhennys on $\dfrac{88\,000\ €}{180} \approx 488{,}89\ €$.

**b)** Lasketaan ensimmäisen kuukauden korko.

$88\,000 \cdot 0{,}032 \cdot \dfrac{1}{12} \approx 234{,}67\ (€)$ $r = Kit$, missä $K = 88\,000$, $i = 0{,}032$ ja $t = \dfrac{1}{12}$.

Lasketaan ensimmäinen takaisinmaksuerä.

$488{,}89 + 234{,}67 = 723{,}56\ (€)$ kertalyhennys + korko

**c)** Viimeisen 488,89 euron takaisinmaksuerän jälkeen lainapääoma on 0 €. Lasketaan viimeisen kuukauden korko.

$488{,}89 \cdot 0{,}032 \cdot \dfrac{1}{12} \approx 1{,}30\ (€)$ $r = Kit$, missä $K = 488{,}89$, $i = 0{,}032$ ja $t = \dfrac{1}{12}$.

Lasketaan viimeinen takaisinmaksuerä.

$488{,}89 + 1{,}30 = 490{,}19\ (€)$ kertalyhennys + korko

**d)** Lasketaan jäljellä oleva lainan määrä viiden vuoden kuluttua, kun lainaa on lyhennetty kaikkiaan $5 \cdot 12 = 60$ kertaa.

88 000 € – 60 · 488,89 € = 58 666,60 €

**Vastaus**

**a)** 488,89 € **b)** 723,56 € **c)** 490,19 € **d)** 58 666,60 €

# A5.

**a)** Maksueriä on yhteensä $15 \cdot 12 = 180$ kappaletta.
Lasketaan maksukauden korkokerroin.

$$q = 100\ \% + \frac{3{,}2\ \%}{12}$$
$$\approx 100{,}2666667\ \%$$
$$= 1{,}002666667$$

Huomaa:
Voit käyttää korkokertoimena myös tarkkaa arvoa
$q = 100\ \% + \frac{3{,}2\ \%}{12} = \frac{376}{375}$.

Lasketaan takaisinmaksuerän eli annuiteetin suuruus.

$$A = 88\,000 \cdot 1{,}002666667^{180} \cdot \frac{1 - 1{,}002666667}{1 - 1{,}002666667^{180}}$$
$$\approx 616{,}21\ (€)$$

$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$, missä
$K$ = 88 000,
$q$ = 1,002666667
ja $n$ = 180.

Takaisinmaksuerän suuruus on 616,21 €.

**b)** Lasketaan jäljellä oleva lainapääoma 5 vuoden kuluttua lainan lyhentämisen jälkeen. Lainaa on tällöin lyhennetty $5 \cdot 12 = 60$ kertaa.

$$V_{60} = 88\,000 \cdot 1{,}002666667^{60} - 616{,}21 \cdot \frac{1 - 1{,}002666667^{60}}{1 - 1{,}002666667}$$
$$\approx 63\,210{,}04\ (€)$$

$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q}$,
missä
$K$ = 88 000,
$q$ = 1,00266667,
$k$ = 60 ja $A$ = 616,21.

Lainaa on jäljellä 5 vuoden kuluttua 63 210,04 €.

**c)** Lainasta maksetaan kaikkiaan 180 kappaletta 616,21 euron maksueriä. Lainan lyhennykset ja korot ovat yhteensä

$$180 \cdot 616{,}21\ € = 110\,917{,}80\ €\,.$$

Tästä summasta korkoa on 110 917,80 € – 88 000 € = 22 917,80 €.

**Vastaus**
**a)** 616,21 €
**b)** 63 210,04 €
**c)** 22 917,80 €

# B1.

**a)** Lasketaan viivästykoron suuruus.

$$r = 498{,}76 \cdot 0{,}090 \cdot \frac{24}{366}$$

$$\approx 2{,}94 \ (€)$$

$r = Kit$, missä $K = 498{,}76$, $i = 0{,}090$ ja $t = \frac{24}{366}$.

Lasketaan muistutuslaskun loppusumma.

$$498{,}76\ € + 2{,}94\ € + 8{,}50\ € \approx 510{,}20\ €$$

**b)** Merkitään korkopäivien lukumäärää kirjaimella $n$.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan $n$.

$$r = 20$$

$$498{,}76 \cdot 0{,}090 \cdot \frac{n}{366} = 20$$

$$n \approx 163{,}1$$

$r = Kit$, missä $K = 498{,}76$, $i = 0{,}090$ ja $t = \frac{n}{366}$.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Viivästyskoron pitää ylittää 20 euroa, joten pyöristetään korkopäivien lukumäärä ylöspäin. Tarvitaan siis 164 korkopäivää.

**Vastaus**
**a)** 510,20 €
**b)** 164 päivän

# B2.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Talletus (€)** | **Talletusaika (€)** | **Talletuksen arvo lopussa (€)** | |
| 2 | 1 | 4500 | 10 | 5464,00 | (=1,0196^C2*B2) |
| 3 | 2 | 4500 | 9 | 5358,97 | |
| 4 | 3 | 4500 | 8 | 5255,95 | |
| 5 | 4 | 4500 | 7 | 5154,91 | |
| 6 | 5 | 4500 | 6 | 5055,82 | |
| 7 | 6 | 4500 | 5 | 4958,63 | |
| 8 | 7 | 4500 | 4 | 4863,31 | |
| 9 | 8 | 4500 | 3 | 4769,82 | |
| 10 | 9 | 4500 | 2 | 4678,13 | |
| 11 | | | | | |
| 12 | | | Yhteensä | 45559,53 | |

10 vuoden kuluttua talletuksen aloittamisesta
tilillä on  45 559,53 € ≈ 45 560 €.

**Vastaus**
45 560 €

# B3.

**a)** $a_n = 7 \cdot 0{,}8^n$

Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten suhde.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7 \cdot 0{,}8^{n+1}}{7 \cdot 0{,}8^n} = 0{,}8 \ .$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhde ei riipu $n$:n arvosta, jono on geometrinen ja $q = 0{,}8$.

Lasketaan jonon $25$ ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{25} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \qquad a_1 = 7 \cdot 0{,}8^1 = 5{,}6,$$
$$q = 0{,}8, \ n = 25$$
$$= \frac{5{,}6 \cdot (1 - 0{,}8^{25})}{1 - 0{,}8}$$
$$\approx 27{,}9$$

**b)** $a_n = 13 - 9n$

Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten erotus.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (13 - 9 \cdot (n+1)) - (13 - 9n) \\ &= 13 - 9n - 9 - 13 + 9n \\ &= -9 \end{aligned}$$

Koska peräkkäisten jäsenten erotus ei riipu $n$:n arvosta, jono on aritmeettinen.

Lasketaan jonon $25$ ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad n = 25$$

$$S_{25} = 25 \cdot \frac{a_1 + a_{25}}{2} \qquad a_1 = 13 - 9 \cdot 1 = 4,$$

$$a_{25} = 13 - 9 \cdot 25 = -212$$

$$= 25 \cdot \frac{4 + (-212)}{2}$$

$$= -2600$$

**c)** $a_n = 3n - 2^n$

Jonon kolme ensimmäistä jäsentä on

$$a_1 = 3 \cdot 1 - 2^1 = 1$$
$$a_2 = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2$$
$$a_3 = 3 \cdot 3 - 2^3 = 1$$

Koska $a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ ja $a_3 - a_2 = 1 - 2 = -1$, jonon peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio. Jono ei ole aritmeettinen.

Koska $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$ ja $\frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{2}$, jonon peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio. Jono ei ole geometrinen.

Jono ei siis ole geometrinen eikä aritmeettinen.

Lasketaan jonon $25$ ensimmäisen jäsenen summa taulukkolaskentaohjelmalla.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | n | a_n | |
| 2 | 1 | 1 | (=3*A2-2^A2) |
| 3 | 2 | 2 | |
| 4 | 3 | 1 | |
| 5 | 4 | -4 | |
| 6 | 5 | -17 | |
| 7 | 6 | -46 | |
| 8 | 7 | -107 | |
| 9 | 8 | -232 | |
| 10 | 9 | -485 | |
| 11 | 10 | -994 | |
| 12 | 11 | -2015 | |
| 13 | 12 | -4060 | |
| 14 | 13 | -8153 | |
| 15 | 14 | -16342 | |
| 16 | 15 | -32723 | |
| 17 | 16 | -65488 | |
| 18 | 17 | -131021 | |
| 19 | 18 | -262090 | |
| 20 | 19 | -524231 | |
| 21 | 20 | -1048516 | |
| 22 | 21 | -2097089 | |
| 23 | 22 | -4194238 | |
| 24 | 23 | -8388539 | |
| 25 | 24 | -16777144 | |
| 26 | 25 | -33554357 | |
| 27 | | | |
| 28 | S_25= | -67107887 | |

Jonon 25 ensimmäisen jäsenen summa on $S_{25} = -6\,710\,887$.

**Vastaus**

**a)** geometrinen jono, $S_{25} \approx 27{,}9$

**b)** aritmeettinen jono, $S_{25} = -2600$

**c)** ei kumpikaan, $S_{25} = -67\,107\,887$

# B4.

**a)** Kun pääomaan lisätään 6,0 %:n korko, niin korkokerroin on 100 % + 6,0 % = 106,0 % = 1,060.

Lasketaan arvio pääomalle, kun Sari täytää 65 vuotta.Tähän kuluu aikaa 65 – 40 = 25 vuotta.

Ensimmäinen sijoituserä kasvaa korkoa korolle 25 vuotta, seuraava 24 vuotta jne. Viimeisen sijoituksensa Sari tekee 59-vuotispäivänään, se kasvaa korkoa korolle 6 vuotta.

$$K_{25} + K_{24} + K_{23} + ... + K_6$$
$$= 3000 \cdot 1{,}060^{25} + 3000 \cdot 1{,}060^{24} + 3000 \cdot 1{,}060^{23} + ... + 3000 \cdot 1{,}060^{6}$$
$$= \underbrace{3000 \cdot 1{,}060^{6} + 3000 \cdot 1{,}060^{7} + ... + 3000 \cdot 1{,}060^{24} + 3000 \cdot 1{,}060^{25}}_{\text{geometrinen summa } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ missä } a_1 = 3000 \cdot 1{,}060^6,\ q = 1{,}060 \text{ ja } n = 20.}$$
$$= \frac{3000 \cdot 1{,}060^{6} \cdot (1 - 1{,}060^{20})}{1 - 1{,}060}$$
$$\approx 156\,543{,}19 \ (€)$$

Sarin arvion mukaan sijoituksen arvo on hänen 65-vuotispäivänään noin 156 500 €.

**b)** Merkitään vuotuisen sijoituksen suuruutta kirjaimella $K$.
Muodostetaan a-kohdan geometrisen summan lausekkeen avulla yhtälö ja ratkaistaan $K$.

$$\frac{K \cdot 1{,}060^{6} \cdot (1 - 1{,}060^{20})}{1 - 1{,}060} = 500\,000$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$K \approx 9582{,}02 \ (€)$$

Vuotuisen sijoituksen pitäisi olla vähintään 9583 €.

**Vastaus**
**a)** 156 500 €
**b)** 9583 €

# B5.

**a)** Maksueriä on yhteensä $18 \cdot 12 = 216$ kappaletta.
Lasketaan maksukauden korkokerroin.

$$q = 100\ \% + \frac{3{,}80\ \%}{12} \approx 100{,}316667\ \% = 1{,}00316667$$

Lasketaan takaisinmaksuerän eli annuiteetin suuruus.

$$A = 180\,000 \cdot 1{,}00316667^{216} \cdot \frac{1 - 1{,}00316667}{1 - 1{,}00316667^{216}}$$

$$\approx 1151{,}84\ (€)$$

$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$, missä
$K$ = 180 000,
$q$ = 1,00316667
ja $n$ = 216.

Takaisinmaksuerän suuruus on 1151,84 €.

**b)** Merkitään maksuerien lukumäärää kirjaimella $n$.
Maksukauden korkokerroin on $q \approx 1{,}00316667$.

Tasaerän suuruus on 1400 €. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan tarvittavien maksuerien lukumäärä $n$.

$$1400 = 180\,000 \cdot 1{,}00316667^n \cdot \frac{1 - 1{,}00316667}{1 - 1{,}00316667^n}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx 165{,}4$$

$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$, missä
$K$ = 180 000,
$q$ = 1,00316667
ja $A$ = 1400.

Maksueriä tarvitaan 165,4 kappaletta, joten laina-ajaksi on sovittava vähintään 166 kk ≈ 13,83 v ≈ 14 v.

**Vastaus**

**a)** 1151,84 €  **b)** 14 vuotta