

LYHYT MATEMATIIKKA 30.3.2020
MAB3 GEOMETRIA, ratkaisut

B-OSA

Tässä osiossa saa olla apuvälineenä erilaiset ohjelmistot ja taulukkokirja.

B1-osa: Vastaa tehtävistä 1 - 4 kahteen (2) tehtävään.

B2-osa: Vastaa tehtävistä 5 - 8 yhteen (1) tehtävään.

Yhteensä siis palautettuna on **maksimissaan kolme (3)** tehtävää.

Huom! Katso, että olet laskenut tehtävät oikeista osioista!

Muuten pisteet lasketaan huonoimman pistemäärän mukaan.

VASTAA lopuksi **itsearvioinnin** loppuosaan O365:ssä ja Wilmassa olevan linkin kautta **kurssikyselyyn!**

Tarkista samalla, että olet merkannut itsetekemäsi testiesi tulokset ja tehnyt vertaisarvioinnin. Tehtävälustasta ja tehtävistä on ohje Wilma-viestissä.

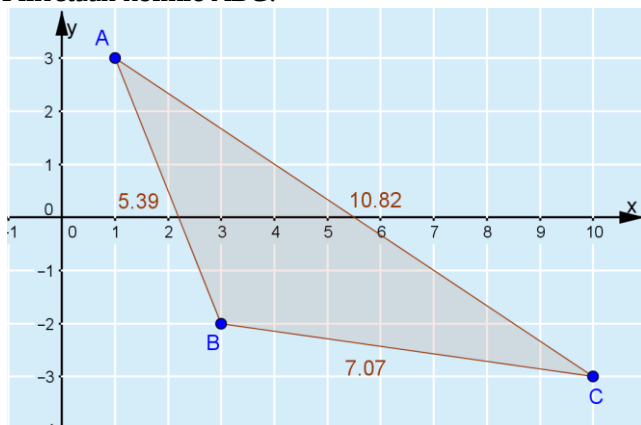
KIITOS!

B1-OSA

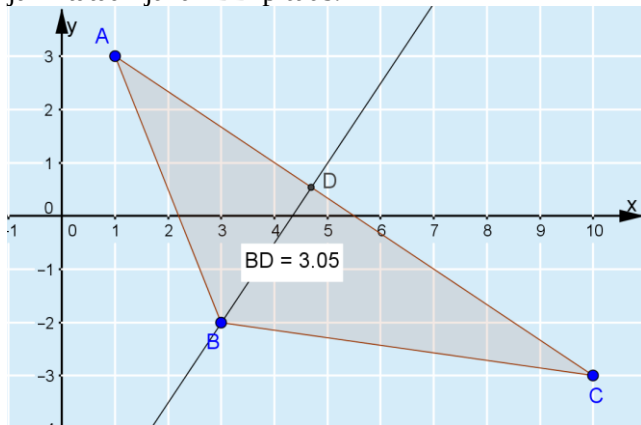
1. Kolmion kärkipisteet ovat $A(1, 3)$, $B(3, -2)$ ja $C(10, -3)$.
 - a) Määritä kolmion ABC kaikkien korkeusjanojen pituudet piirtämällä. (Jos piirrät ohjelmistolla, tallenna ja palauta tiedosto.)
 - b) Laske kolmion pinta-ala kahdella tavalla käyttäen kantana ensin sivua AC ja sitten sivua BC . Vertaa tuloksia.

Ratkaisu

a) Piirretään kolmio ABC .

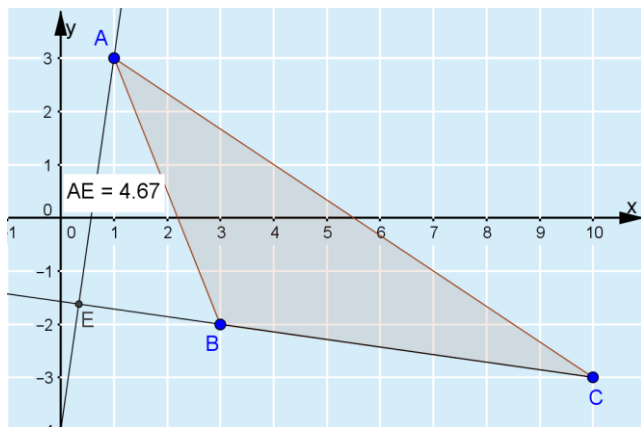


Piirretään janan AC normaali pisteen B kautta. Määritetään normaalin ja janan AC leikkauspiste D ja mitataan janan BD pituus.



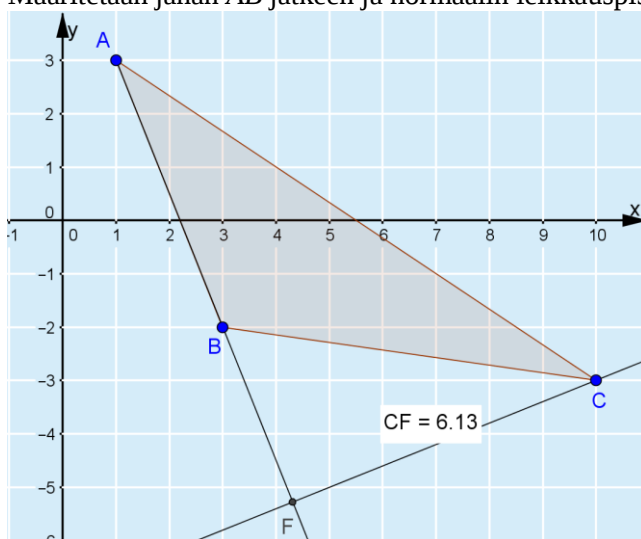
(1 p.)

Jatketaan sivua BC ja piirretään sivun jatkeelle normaali, joka kulkee pisteen A kautta. Määritetään janan BC jatkeen ja normaalin leikkauspiste E ja mitataan janan AE pituus.



(1 p.)

Jatketaan sivua AB ja piirretään sivun jatkeelle normaali, joka kulkee pisteen C kautta. Määritetään janan AB jatkeen ja normaalin leikkauspiste F ja mitataan janan CF pituus.



(1 p.)

- b)** Kannan AC pituus on 10,82 ja korkeusjanan pituus 3,05. Kolmion pinta-ala on

$$A_1 = \frac{10,82 \cdot 3,05}{2} = 16,5005 \approx 16,5. \quad (1 \text{ p.})$$

Kannan BC pituus on 7,07 ja korkeusjanan pituus 4,67. Kolmion pinta-ala on

$$A_2 = \frac{7,07 \cdot 4,67}{2} = 16,50845 \approx 16,5. \quad (1 \text{ p.})$$

Tulokset ovat yhtä suuria yhden desimaalin tarkkuudella.

(1 p.)

- 2.** Maapallon pinta-alasta $\frac{2}{3}$ on merien peitossa. Maapallon säde on 6 370 km.

- a)** Merten pinta on noussut 18 cm viimeisen sadan vuoden aikana. Kuinka suurta vesimäärää lukema vastaa?
b) Kuinka paljon merten pinta nousisi, jos Grönlannin jäätikkö sulaisi? Grönlannin jäätikön tilavuus on noin $2,5 \cdot 10^6 \text{ km}^3$.

Ratkaisu

- a)** Veden määrä muodostaa kappaleen, jonka pohja on pallopinta ja korkeus 18 cm. Lasketaan ensin pohjan pinta-ala.

$$A_{\text{pohja}} = \frac{2}{3} \cdot 4\pi r^2 \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 4\pi \cdot (6370 \text{ km})^2$$

$$= 339\,936\,242,521 \dots \text{ km}^2 \quad (1 \text{ p.})$$

Muutetaan korkeus kilometreiksi.

$$18 \text{ cm} = 0,18 \text{ m} = 0,00018 \text{ km}$$

Veden tilavuus on

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 339\,936\,242,521 \dots \text{ km}^2 \cdot 0,00018 \text{ km} = 61\,188,523 \dots \text{ km}^3 \\ \approx 61\,000 \text{ km}^3. \quad (1 \text{ p.})$$

- b) Merkitään vesikappaleen korkeutta kirjaimella h . Muodostetaan yhtälö veden tilavuudelle ja ratkaistaan siitä korkeus h .

$$A_{\text{pohja}} \cdot h = V \\ 339\,936\,242,521 \dots \cdot h = 2,5 \cdot 10^6 \quad || : 339\,936\,242,521 \dots \quad (1 \text{ p.}) \\ h = 0,00735 \dots \quad (1 \text{ p.})$$

Merten pinta nousisi

$$0,00735 \dots \text{ km} = 7,35 \dots \text{ m} \approx 7,4 \text{ m}. \quad (1 \text{ p.})$$

3. Jalkapallomaali on 7,32 metriä leveä. Rangaistuspotku laukaistaan kohdasta, josta on kohtisuora näkymä maalin keskikohtaan. Kun Niklas valmistautuu rangaistuspotkuun, hän näkee maalin 37° :n kulmassa. Ratkaise piirtämällä, kuinka kaukana maalista Niklas on. Tee tarkat välivaiheet ja merkinnät. (Tallenna ja palauta tiedosto.)

Ratkaisu

Piirretään jana AB , jonka pituus on 7,32. (1 p.)

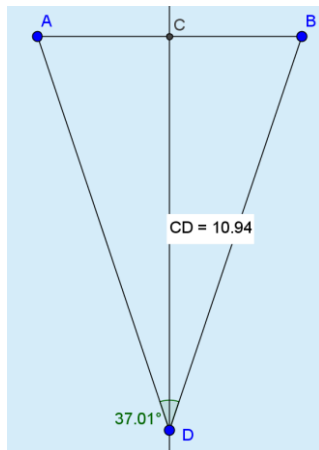
Määritetään janan AB keskipiste C ja piirretään sen kautta janan AB keskinormaali. (1 p.)

Valitaan janan AB keskinormaalilta jokin piste D ja piirretään janat AD ja BD . (1 p.)

Mitataan kulma BDA . (1 p.)

Liikutetaan pistettä D , kunnes kulman BDA suuruus on 37° . (1 p.)

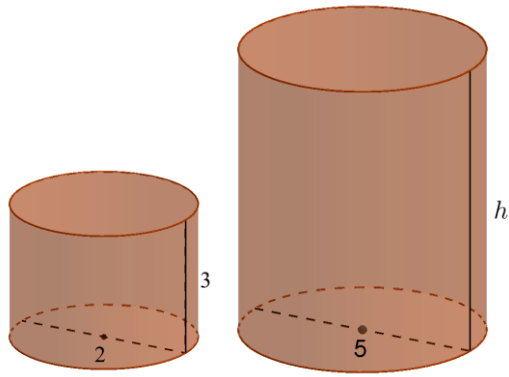
Mitataan janan CD pituus. (1 p.)



Niklas on noin 11 metrin päässä maalista.

4. a) Määritä isomman ja pienemmän ympyrälieriön tilavuuksien suhde. (2 p.)

Kuvien ympyrälieriöt ovat yhdenmuotoisia.



- b) Jos litra maitoa pakattaisiin pallon muotoiseen pakkaukseen, mikä olisi pallon halkaisija?
(4 p.)

Ratkaisu

- a) Ympyrälieriöiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. (1 p.)

$$\frac{V_{iso}}{V_{pieni}} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8} \quad (1 \text{ p.})$$

- b) Muutetaan maidon tilavuus kuutiodesimetreiksi.

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 \quad (1 \text{ p.})$$

Merkitään pallon sädettä kirjaimella r . Muodostetaan yhtälö pallon tilavuudelle ja ratkaistaan siitä säde r .

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 1 \quad \parallel : \frac{4}{3}\pi \quad (1 \text{ p.})$$

$$r^3 = 0,238\dots$$

$$r = \sqrt[3]{0,238\dots}$$

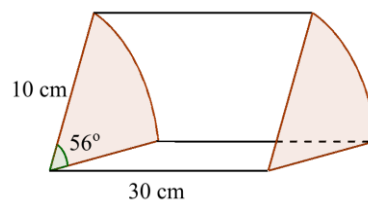
$$r = 0,620\dots \quad (1 \text{ p.})$$

Pallon halkaisija on

$$2r = 2 \cdot 0,620\dots \text{ dm} = 1,240\dots \text{ dm} = 12,40\dots \text{ cm} \approx 12 \text{ cm}. \quad (1 \text{ p.})$$

B2-OSA

5. Puuklapi on suora lieriö, jonka pohja on ympyräsektori. Laske klapin massa, kun puun tiheys on 550 kg/m^3 .



Ratkaisu

Lasketaan ensiksi pohjan pinta-ala.

$$A_{\text{pohja}} = \frac{56^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (10 \text{ cm})^2 \quad (1 \text{ p.})$$

$$= 48,869\dots \text{ cm}^2 \quad (1 \text{ p.})$$

Klapin tilavuus on

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 48,869\dots \text{ cm}^2 \cdot 30 \text{ cm} = 1466,076\dots \text{ cm}^3 \quad (1 \text{ p.})$$

Muutetaan klapin tilavuus kuutiometreiksi.

$$1466,076... \text{ cm}^3 = 1,466076... \text{ dm}^3 = 0,001466076... \text{ m}^3 \quad (1 \text{ p.})$$

Ratkaistaan massa m tiheyden kaavasta.

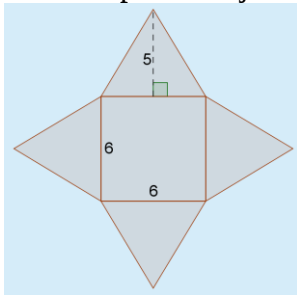
$$\rho = \frac{m}{V} \quad || \cdot V$$
$$m = \rho V \quad (1 \text{ p.})$$

Lasketaan klapin massa.

$$m = 550 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,001466076... \text{ m}^3 = 0,80634... \text{ kg} \approx 0,8 \text{ kg} = 800 \text{ g} \quad (1 \text{ p.})$$

Klapin massa on noin 800 g.

6. Kuvassa on suora neliöpohjainen pyramidi tasoon levitettynä. Laske pyramidin kokonaispinta-ala ja tilavuus. Piirrä pyramidi kavaljeeriperspektiivissä.



(6 p.)

Ratkaisu

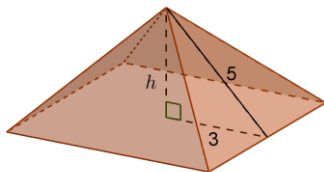
Pyramidin pinta koostuu pohjaneliöstä ja neljästä tasakylkisestä kolmiosta. Yhden kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15. \quad (1 \text{ p.})$$

Pyramidin kokonaispinta-ala on

$$A = A_{\text{neliö}} + 4 \cdot A_{\text{kolmio}} = 6 \cdot 6 + 4 \cdot 15 = 36 + 60 = 96. \quad (1 \text{ p.})$$

Merkitään pyramidin korkeusjanaa kirjaimella h . Piirretään pyramidista mallikuva.



Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan siitä korkeus h .

$$h^2 + 3^2 = 5^2 \quad (1 \text{ p.})$$

$$h^2 + 9 = 25$$

$$h^2 = 16$$

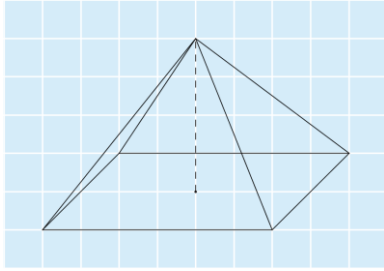
$$h = (\pm) \sqrt{16}$$

$$h = 4 \quad (1 \text{ p.})$$

Pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 48. \quad (1 \text{ p.})$$

Piirretään pyramidi kavaljeeriperspektiivissä.



(1 p.)

7. Oslo ja Helsinki ovat molemmat leveyspiirillä 60°N . Oslo on pituuspiirillä 11°E ja Helsinki 25°E . Kuinka pitkä matka Helsingistä on Osloon leveyspiiriä 60°N pitkin? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.

Ratkaisu

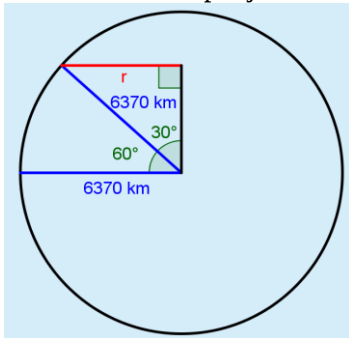
Merkitään maapallon sädettä kirjaimella R . Muodostetaan yhtälö maapallon ympärysmitalle ja ratkaistaan siitä säde R .

$$2\pi R = 40\,000 \quad || : 2\pi$$

$$R = 6366,197\dots$$

(1 p.)

Merkitään 60° :n pohjoisen leveyspiirin sädettä r . Piirretään mallikuva.



(1 p.)

Helsingistä Osloon kuljetaan pikkuympyrää, 60° :n pohjoista leveyspiiriä pitkin. Muodostetaan yhtälö sinin avulla ja ratkaistaan siitä pikkuympyrän säde r .

$$\sin 30^\circ = \frac{r}{6366,197\dots} \quad || \cdot 6366,197\dots$$

(1 p.)

$$r = 6366,197\dots \cdot \sin 30^\circ$$

$$r = 3183,098\dots$$

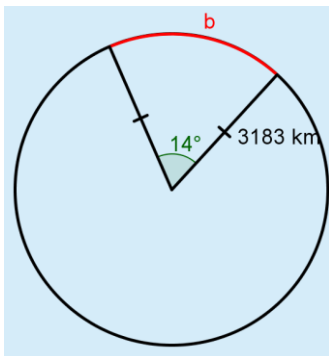
(1 p.)

Pikkuympyrää pitkin kuljettavan kaaren asteluku on pituuskoordinaattien erotus.

$$25^\circ - 11^\circ = 14^\circ$$

(1 p.)

Merkitään kysyttyä matkaa kirjaimella b . Piirretään mallikuva reitistä pohjoisnavan yläpuolelta katsottuna.



Reitin pituus on

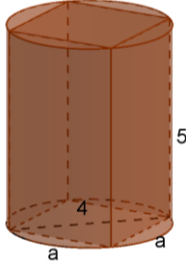
$$b = \frac{14^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3183,098\dots \text{ km} = 777,777\dots \text{ km} \approx 780 \text{ km}.$$

(1 p.)

8. Suoran ympyrälieriön korkeus on 5 ja pohjan halkaisija 4. Ympyrälieriön sisään asetetaan mahdollisimman suuri suora neliöpohjainen särmiö. Laske särmiön ja ympyrälieriön tilavuuksien suhde. Anna vastaukseksi tarkka arvo ja likiarvo kolmen desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu

Merkitään särmiön pohjaneliön särmän pituutta kirjaimella a . Piirretään mallikuva.



(1 p.)

Lasketaan ensin särmiön pohjaneliön sivun a pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$a^2 + a^2 = 4^2$$

(1 p.)

$$2a^2 = 16 \quad \parallel : 2$$

$$a^2 = 8$$

$$a = (\pm)\sqrt{8}$$

(1 p.)

Särmiön tilavuus on

$$V_{\text{särmiö}} = A_{\text{pohja}} \cdot h = a^2 \cdot 5 = (\sqrt{8})^2 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40.$$

(1 p.)

Ympyrälieriön tilavuus on

$$V_{\text{lieriö}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi.$$

(1 p.)

Särmiön tilavuuden suhde ympyrälieriön tilavuuteen on

$$\frac{V_{\text{särmiö}}}{V_{\text{lieriö}}} = \frac{40}{20\pi} = \frac{2}{\pi} = 0,6366... \approx 0,637.$$

(1 p.)