

4 AVARUUSGEOMETRIAA

POHDITTAVAA

1. Muovinappulan tilavuus on
 $V = 1 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^3 = 8000 \text{ mm}^3$.

Tulostus kestää

$$\frac{8000 \text{ mm}^3}{10 \text{ mm}^3 / \text{s}} = 800 \text{ s}.$$

Muutetaan aika minuuteiksi ja sekunneiksi.

$$\frac{800 \text{ s}}{60 \text{ s} / \text{min}} = 13,333\dots$$

$$800 \text{ s} - 13 \cdot 60 \text{ s} = 20 \text{ s}$$

Tulostus kestää 13 min 20 s.

Vastaus: 13 min 20 s

2. Muutetaan tiheys yksikköön g/cm^3 .

$$\rho = \frac{1 \text{ kg}}{\text{dm}^3} = \frac{1000 \text{ g}}{1000 \text{ cm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Lasketaan muovinappulan massa tiheyden ja tilavuuden avulla.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad || \cdot V$$

$$m = \rho V$$

$$m = 1 \text{ g}/\text{cm}^3 \cdot 8 \text{ cm}^3 = 8 \text{ g}.$$

$$\text{Tulostuksen hinta on } 8 \text{ g} \cdot \frac{30 \text{ €}}{750 \text{ g}} = 0,32 \text{ €}.$$

Vastaus: 0,32 €

4.1 Särmiö

ALOITA PERUSTEISTA

401. a) Särmiön tilavuus on
 $V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 25 \text{ dm}^2 \cdot 3,8 \text{ dm} = 95 \text{ dm}^3$.

Vastaus: 95 dm^3

- b) Särmiön tilavuus on
 $V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 13 \text{ m}^2 \cdot 2,9 \text{ m} = 37,7 \text{ m}^3 \approx 38 \text{ m}^3$.

Vastaus: 38 m^3

402. a) Särmiössä on kaksi yhtenevää ja yhdensuuntaista pohjaa. Seuraavat monikulmiot täyttävät edellä mainitut ehdot:

Särmiö	Pohjan muoto
I	suorakulmio
II	viisikulmio
III	kuusikulmio
IV	kolmio

Vastaus: I: suorakulmio, II: viisikulmio, III: kuusikulmio ja IV: kolmio

- b) Lasketaan särmien lukumäärät kuvien perusteella.

Särmiö	Särmien lukumäärä
I	12
II	15
III	18
IV	9

Tapa II:

Jos särmiön pohja on n -kulmio, pohjamonikulmiossa on n janaa. Koska särmiössä on kaksi pohjaa, pohjamonikulmiossa on yhteensä $2n$ janaa. Lisäksi pohjamonikulmioiden vastinpisteet on yhdistetty janoilla, joten särmiössä on yhteensä $2n + n = 3n$ janaa eli särmää.

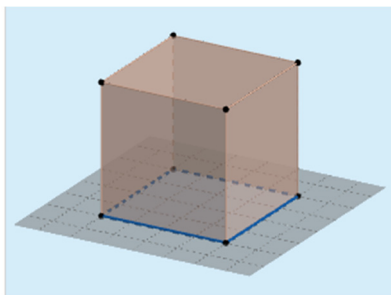
Vastaus: I: 12, II: 15, III: 18 ja IV: 9

- c) Suoran särmiön sivutahkot ovat suorakulmioita, vinon särmiön suunnikkaita.

Särmiö	Sivutahkon muoto
I	suorakulmio
II	suorakulmio
III	suunnikas
IV	suorakulmio

Vastaus: I, II ja IV: suorakulmioita sekä III: suunnikkaita

403. Videossa <https://vimeo.com/182669990/4d70f90c01> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista appletin avulla.



- a) Kuution kaikki tahkot ovat neliöitä, joiden sivun pituus on 4,0 cm. Yhden tahkon pinta-ala on $4,0 \text{ cm} \cdot 4,0 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$.

Vastaus: 16 cm^2

- b) Kuutiossa on 6 tahkoa, joten kokonaispinta-ala on $6 \cdot 16 \text{ cm}^2 = 96 \text{ cm}^2$.

Vastaus: 96 cm^2

- c) Kuution tilavuus on

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 16 \text{ cm}^2 \cdot 4,0 \text{ cm} = 64 \text{ cm}^3.$$

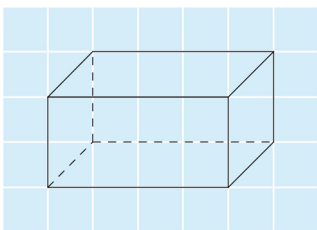
Vastaus: 64 cm^3

- 404.** Suorakulmaisessa särmiössä vastakkaiset tahkot ovat yhteneviä, joten mitkä tahansa kaksi suorakulmiota voidaan valita särmiön pohjiksi. Valitaan särmiön pohjaksi suurin suorakulmio, jonka mitat ovat 4×3 . Tähän suorakulmioon kiinnittyneet suorakulmiot ovat sivutahkoja. Asettamalla sivutahkot kohtisuorasti pohjaa vastaan havaitaan, että suorakulmion korkeus on 2. Viimeinen suorakulmio taitetaan särmiön ”kanneksi”.

Piirretään särmiö kavaljeeriperspektiivissä. Pohjasuorakulmion toiset vastakkaiset särmät piirretään ruutujen suuntaisesti ja toiset 45° :n kulmassa eli ruutujen lävistäjien suuntaisesti. Ruutujen lävistäjien suuntaisesti piirrettyjen särmien pituus on puolet annetusta pituudesta eli 1,5. Yhden ruudun lävistäjän pituus on

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1,41,$$

mikä on melko lähellä lukua 1,5. Kolmen yksikön mittaiset sivut piirretään siten yhden ruudun lävistäjinä.



- a)** Särmiön tilavuus on
 $V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$

Vastaus: 24

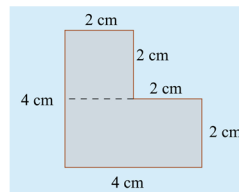
- b)** Sijoitetaan särmien pituudet $a = 4$, $b = 3$ ja $c = 2$ avaruuslävistäjän laskukaavaan.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5,385... \approx 5,4$$

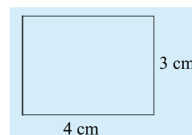
Vastaus: $\sqrt{29} \approx 5,4$

405. a) Särmiön pohja on muodoltaan L-kirjain, joka koostuu kahdesta suorakulmiosta. Pohjan pinta-ala on

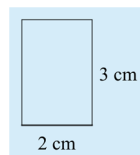
$$\begin{aligned}A_{\text{pohja}} &= 4 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} + 2 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \\&= 8 \text{ cm}^2 + 4 \text{ cm}^2 \\&= 12 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$



Särmiössä on kaksi suorakulmion muotoista sivutahkoa, joiden kanta on 4 cm ja korkeus 3 cm. Yhden tällaisen sivutahkon pinta-ala on

$$A_1 = 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2.$$


Lisäksi särmiössä on neljä yhtenevää suorakulmion muotoista sivutahkoa, joiden kanta on 2 cm ja korkeus 3 cm. Yhden tällaisen sivutahkon pinta-ala on

$$A_2 = 2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2.$$


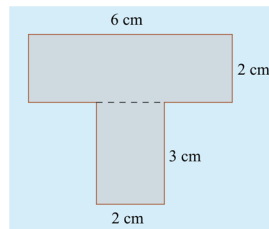
Kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned}A &= 2A_{\text{pohja}} + 2A_1 + 4A_2 \\&= 2 \cdot 12 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 12 \text{ cm}^2 + 4 \cdot 6 \text{ cm}^2 \\&= 72 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

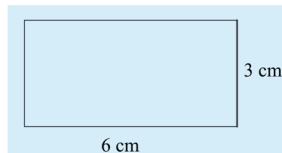
Vastaus: 72 cm^2

- b) Särmiön pohja on muodoltaan T-kirjain, joka koostuu kahdesta suorakulmiosta. Pohjan pinta-ala on

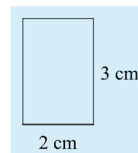
$$\begin{aligned}A_{\text{pohja}} &= 2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} + 6 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \\&= 6 \text{ cm}^2 + 12 \text{ cm}^2 \\&= 18 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$



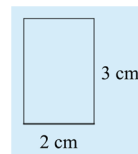
Isoimman sivutahkon pinta-ala on
 $A_1 = 6 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$.



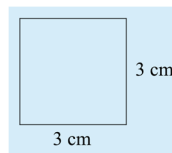
Isoimman sivutahkon kanssa yhdensuuntaisia sivutahkoja on kolme kappaletta ja ne ovat keskenään yhteneviä. Yhden tällaisen sivutahkon pinta-ala on
 $A_2 = 2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$.



Isoimman sivutahkon kanssa erisuuntaisia sivutahkoja on kaikkiaan neljä kappaletta. Isoimman sivutahkon viereiset sivutahkot ovat keskenään yhteneviä ja niiden pinta-ala on
 $A_3 = 2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$.



Kaksi muuta erisuuntaista sivutahkoa ovat keskenään yhtenevät. Niiden pinta-ala on
 $A_4 = 3 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}^2$.



Kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned}A &= 2A_{\text{pohja}} + A_1 + 3A_2 + 2A_3 + 2A_4 \\&= 2 \cdot 18 \text{ cm}^2 + 18 \text{ cm}^2 + 3 \cdot 6 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 6 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 9 \text{ cm}^2 \\&= 102 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Vastaus: 100 cm^2

406. Parkkipaikan veden tilavuus saadaan kertomalla parkkipaikan pinta-ala veden korkeudella $30 \text{ mm} = 0,03 \text{ m}$.

Vesimäärän tilavuus on

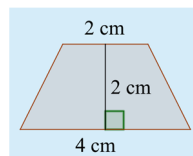
$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot h \\ &= 18,0 \text{ m} \cdot 25,0 \text{ m} \cdot 0,03 \text{ m} \\ &= 13,5 \text{ m}^3 \\ &= 13\,500 \text{ dm}^3 \\ &= 13\,500 \text{ l.} \end{aligned}$$

Vastaus: 13 500 l

VAHVISTA OSAAMISTA

407. a) Särmiön pohja on puolisuunnikas, jonka yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 4 cm ja 2 cm ja korkeus 2 cm. Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{pohja}} &= \frac{a+b}{2} \cdot h \\ &= \frac{4 \text{ cm} + 2 \text{ cm}}{2} \cdot 2 \text{ cm} \\ &= 6 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$



Särmiön tilavuus on

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 6 \text{ cm}^2 \cdot 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 18 cm^3

- b) Särmiön pohja on suorakulmainen kolmio, jonka toisen kateetin pituus on 8 cm ja hypotenuusan pituus 10 cm. Pohjan pinta-alan laskemista varten selvitetään toisen kateetin pituus.

Merkitään tuntemattoman kateetin pituutta kirjaimella x . Ratkaistaan pituus x Pythagoraan lauseen avulla.

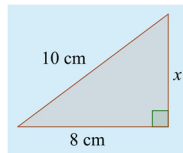
$$8^2 + x^2 = 10^2$$

$$64 + x^2 = 100$$

$$x^2 = 36$$

$$x = (\pm)\sqrt{36}$$

$$x = 6$$



Pohjakolmion pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = \frac{8 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}}{2} = 24 \text{ cm}^2.$$

Särmiön tilavuus on

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 24 \text{ cm}^2 \cdot 5 \text{ cm} = 120 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 120 cm^3

408. a) Merkitään särmiön korkeutta kirjaimella h . Muodostetaan yhtälö särmiön tilavuudelle ja ratkaistaan siitä korkeus h .

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h$$

$$56 = 14h$$

$$14h = 56 \quad || : 14$$

$$h = 4$$

Särmiön korkeus on 4,0 metriä.

Vastaus: 4,0 m

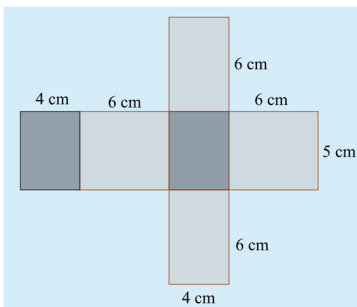
- b) Merkitään särmiön korkeutta kirjaimella h . Muodostetaan yhtälö särmiön tilavuudelle ja ratkaistaan siitä korkeus h .

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot h \\ 185 &= 25h \\ 25h &= 185 & \parallel : 25 \\ h &= 7,4 \end{aligned}$$

Särmiön korkeus on 7,4 cm.

Vastaus: 7,4 cm

409. Särmiön mitat ovat 4 cm, 5 cm ja 6 cm. Piirretään särmiö tasoon levitettyinä. Väritetään särmiön pohjat sivutahkoja tummemmiksi.



Särmiön pohjan pinta-ala on
 $A_{\text{pohja}} = 4 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}^2$.

Särmiössä on neljä suorakulmion muotoista sivutahkoa.
Kahden sivutahkon mitat ovat $5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ ja
kahden sivutahkon $4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$.

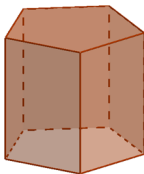
Sivutahkojen yhteispinta-ala on
 $A_{\text{sivutahkot}} = 2 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} + 2 \cdot 4 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 108 \text{ cm}^2$.

Särmiön kokonaispinta-ala on
 $A = 2A_{\text{pohja}} + A_{\text{sivutahkot}} = 2 \cdot 20 \text{ cm}^2 + 108 \text{ cm}^2 = 148 \text{ cm}^2$.

Vastaus: 148 cm^2

410. Videossa <https://vimeo.com/182670389/3596993fb8> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

Kappaleen f tilavuus = 20,65



Sopivan ohjelman avulla särmiön tilavuudeksi saadaan 20,65.

Vastaus: 20,65

411. a) Merkitään kuution särmän pituutta kirjaimella a . Muodostetaan yhtälö kuution tilavuudelle ja ratkaistaan siitä särmän pituus a .

$$V = a^3$$

$$a^3 = 61$$

$$a = \sqrt[3]{61}$$

$$a = 3,936\dots$$

$$a \approx 3,9$$

Kuution särmän pituus on noin 3,9 cm.

Vastaus: 3,9 cm

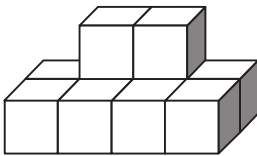
- b) Sijoitetaan särmien pituudet avaruusläivistäjän laskukaavaan.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{(3,936\dots \text{ cm})^2 + (3,936\dots \text{ cm})^2 + (3,936\dots \text{ cm})^2} \\ &= \sqrt{48 \text{ cm}^3} \\ &= 6,818\dots \text{ cm} \\ &\approx 6,8 \text{ cm} \end{aligned}$$

Kuution avaruusläivistäjän pituus on noin 6,8 cm.

Vastaus: 6,8 cm

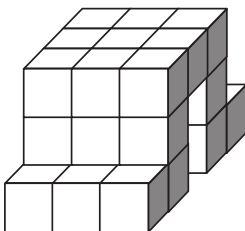
412. a) Hahmotellaan rakennelma kavaljeeriperspektiivissä. Esimerkiksi



Rakennelmassa on yhteensä 10 kuutiota.

Vastaus: esim 10

- b) Hahmotellaan rakennelma kavaljeeriperspektiivissä. Esimerkiksi



Rakennelmassa on yhteensä 27 kuutiota.

Vastaus: esim 27

413. a) Maalattavan alueen pinta-ala saadaan vähentämällä seinien pinta-alasta ikkunan, komeroiden ja oven yhteispinta-ala.

Huone on suorakulmaisen särmiön muotoinen. Seinät ovat suorakulmioita, joiden korkeus on 2,5 m. Vastakkaiset seinät ovat yhteneviä, joten seinien pinta-ala on

$$A_{\text{seinät}} = 2 \cdot 2,4 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m} + 2 \cdot 3,5 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m} = 29,5 \text{ m}^2.$$

Seinien pinta-alan ja ikkunan, komeroiden ja oven yhteispinta-alan erotus on

$$A = 29,5 \text{ m}^2 - 6,5 \text{ m}^2 = 23 \text{ m}^2.$$

Maalattava pinta-ala on 23 m².

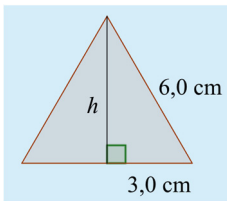
Vastaus: 23 m²

- b) Yhdellä litralla pystyy maalaamaan 8 m^2 , joten seinien maalaamiseen tarvitaan $\frac{23 \text{ m}^2}{8 \text{ m}^2 / \text{l}} = 2,875 \text{ l}$.

Koska maalaus tehdään kahteen kertaan, maalia tarvitaan $2 \cdot 2,875 \text{ l} = 5,75 \text{ l} \approx 5,8 \text{ l}$.

Vastaus: 5,8 litraa

414. a) Pakkauksen tilavuuden laskemista varten selvitetään pohjan pinta-ala. Pohja on tasasivuinen kolmio, joten korkeusjana jakaa kolmion kahteen yhtenevään kolmioon. Merkitään korkeusjanaa kirjaimella h .



Ratkaistaan h Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}h^2 + 3,0^2 &= 6,0^2 \\h^2 &= 36 - 9 \\h &= (\pm)\sqrt{27} \\h &= 5,196\dots\end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = \frac{6,0 \text{ cm} \cdot 5,196\dots \text{ cm}}{2} = 15,588\dots \text{ cm}^2.$$

Särmiön tilavuus on

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 15,588\dots \text{ cm}^2 \cdot 30,5 \text{ cm} = 475,447\dots \text{ cm}^3 \approx 480 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 480 cm^3

- b) Särmiön kolme sivutahkoa ovat suorakulmioita, joiden sivut ovat 6,0 cm ja 30,5 cm. Yhden sivutahkon pinta-ala on
 $A_{\text{sivutahko}} = 6,0 \text{ cm} \cdot 30,5 \text{ cm} = 183 \text{ cm}^2$.

Särmiön kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= 2A_{\text{pohja}} + 3A_{\text{sivutahko}} \\ &= 2 \cdot 15,588... \text{ cm}^2 + 3 \cdot 183 \text{ cm}^2 \\ &= 580,176... \text{ cm}^2 \\ &\approx 580 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Pahvia tarvitaan noin 580 cm^2 .

Vastaus: 580 cm^2

415. Merkitään vesikerroksen korkeutta kirjaimella h .
Vesikerros on muodoltaan suora särmiö, jonka tilavuus on 5,6 litraa eli $5,6 \text{ dm}^3$ ja jonka pohjan pinta-ala on $8,0 \text{ m}^2$ eli 800 dm^2 .

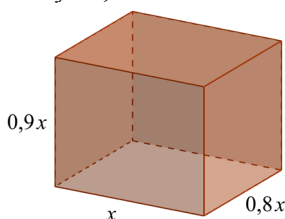
Muodostetaan yhtälö vesikerroksen tilavuudelle ja ratkaistaan siitä vesikerroksen korkeus h .

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot h \\ 5,6 &= 800 \cdot h \quad || : 800 \\ h &= 0,007 \end{aligned}$$

Vesikerroksen korkeus on $0,007 \text{ dm}$ eli $0,70 \text{ mm}$.

Vastaus: $0,70 \text{ mm}$

416. Merkitään särmiön pituutta kirjaimella x , jolloin korkeus on $0,9x$ ja leveys $0,8x$.



Pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = x \cdot 0,8x = 0,8x^2.$$

Sivutahkoja on kaikkiaan neljä. Vastakkaiset tahkot ovat keskenään yhteneviä. Sivutahkojen yhteispinta-ala on

$$A_{\text{sivutahkot}} = 2 \cdot x \cdot 0,9x + 2 \cdot 0,8x \cdot 0,9x = 1,8x^2 + 1,44x^2 = 3,24x^2.$$

Muodostetaan yhtälö särmiön kokonaispinta-alalle ja ratkaistaan siitä pituus x .

$$2A_{\text{pohja}} + A_{\text{sivutahkot}} = A$$

$$2 \cdot 0,8x^2 + 3,24x^2 = 484$$

$$4,84x^2 = 484$$

$$x^2 = 100$$

$$x = (\pm)\sqrt{100}$$

$$x = 10$$

$$\parallel : 4,84$$

Särmiön pituus on $x = 10$ cm, korkeus $0,9x = 9$ cm ja leveys $0,8x = 8$ cm.

Särmiön tilavuus on

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 10 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} = 720 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 720 cm^3

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

417. a) Merkitään särmän pituutta kirjaimella x . Sijoitetaan särmien pituudet avaruuslävistäjän pituuden laskukaavaan.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{x^2 + x^2 + x^2} = \sqrt{3x^2}$$

Ratkaistaan yhtälöstä särmän pituus x .

$$\sqrt{3x^2} = 24 \quad || x > 0$$

$$\sqrt{3} x = 24 \quad || : \sqrt{3}$$

$$x = 13,856\dots$$

Särmiön tilavuus on

$$x^3 = (13,856\dots \text{ cm})^3 = 2660,430\dots \text{ cm}^3 \approx 2700 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 2700 cm^3

- b) Merkitään särmien pituuksia lausekkeilla x , $2x$ ja $3x$. Sijoitetaan särmien pituudet avaruuslävistäjän pituuden laskukaavaan.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (2x)^2 + (3x)^2} = \sqrt{x^2 + 4x^2 + 9x^2} = \sqrt{14x^2} \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälöstä pituus x .

$$\sqrt{14x^2} = 24 \quad || x > 0$$

$$\sqrt{14} x = 24 \quad || : \sqrt{14}$$

$$x = 6,414\dots$$

Särmien pituudet ovat

$$x = 6,414\dots \text{ cm}$$

$$2x = 2 \cdot 6,414\dots \text{ cm} = 12,828\dots \text{ cm}$$

$$3x = 3 \cdot 6,414\dots \text{ cm} = 19,242\dots \text{ cm}.$$

Särmiön tilavuus on

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h$$

$$= 6,414\dots \text{ cm} \cdot 12,828\dots \text{ cm} \cdot 19,242\dots \text{ cm}$$

$$= 1583,408\dots \text{ cm}^3$$

$$\approx 1600 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 1600 cm^3

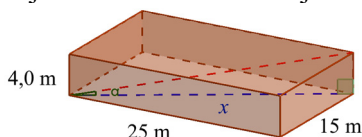
418. a) Sijoitetaan hallin pituus, leveys ja korkeus särmiön avaruuslävistäjän pituuden laskukaavaan.

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\&= \sqrt{(25 \text{ m})^2 + (15 \text{ m})^2 + (4,0 \text{ m})^2} \\&= \sqrt{866 \text{ m}^2} \\&= 29,427... \text{ m} \\&\approx 29 \text{ m}\end{aligned}$$

Vaijerin pituus on noin 29 m.

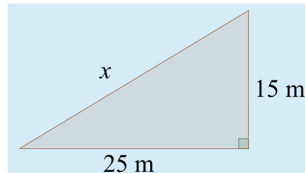
Vastaus: 29 m

- b) Merkitään hallin lattian lävistäjää kirjaimella x sekä lävistäjän x ja vaijerin välistä kulmaa kirjaimella α .



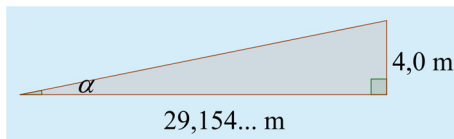
Lasketaan ensin pohjan lävistäjän x pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}x^2 &= 25^2 + 15^2 \\x &= (\pm)\sqrt{850} \\x &= 29,154...\end{aligned}$$



Lasketaan kulma α tangentin avulla.

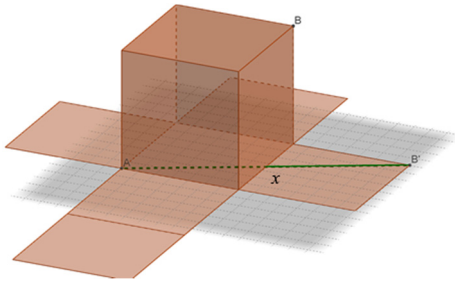
$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{4,0}{29,154...} \\ \alpha &= 7,812...^\circ \\ \alpha &\approx 7,8^\circ\end{aligned}$$



Vaijerin ja lattian välinen kulma on noin $7,8^\circ$.

Vastaus: $7,8^\circ$

419. Levitetään kuutio tasoon ja yhdistetään pisteet A ja B janalla toisiinsa. Merkitään janaa AB kirjaimella x .



Janan x pituus on pisteiden A ja B lyhin etäisyys kuution pintaa pitkin. Ratkaistaan pituus x Pythagoraan lauseen avulla.

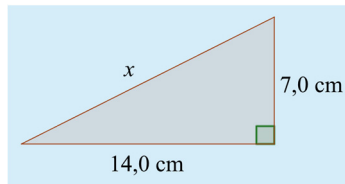
$$x^2 = 7^2 + 14^2$$

$$x^2 = 245$$

$$x = (\pm)\sqrt{245}$$

$$x = 15,652\dots$$

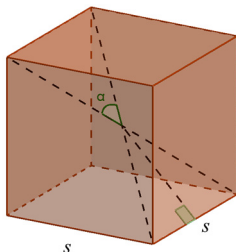
$$x \approx 16$$



Muurahainen kulkee noin 16 cm.

Vastaus: 16 cm

- 420.** Piirretään kuution kahdesta vierekkäisestä kärjestä avaruuslävistäjät. Tällöin muodostuu kaksi tasakylkistä kolmiota, joiden kylkinä ovat avaruuslävistäjien puolikkaat ja kantana kuution särmä. Kysytty kulma on tasakylkisen kolmion huippukulma α .



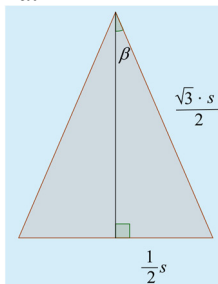
Merkitään kuution särmää kirjaimella s . Sijoitetaan särmän pituudet avaruuslävistäjän pituuden kaavaan ja sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{s^2 + s^2 + s^2} \\ &= \sqrt{3s^2} \quad || s > 0 \\ &= \sqrt{3} \cdot s \end{aligned}$$

Avaruuslävistäjän puolikas on siten $\frac{d}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot s}{2}$.

Piirretään avaruuslävistäjien leikkauspisteestä kolmion korkeusjana. Korkeusjana jakaa tasakylkisen kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon, jonka hypotenuusa on lävistäjän puolikas ja toinen kateetti on särmän puolikas. Merkitään huippukulman puolikasta kirjaimella β ja ratkaistaan se sinin avulla.

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{\sqrt{3}s}{2}} \\ \sin \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \beta &= 35,264 \dots^\circ \end{aligned}$$



Huippukulman suuruus on

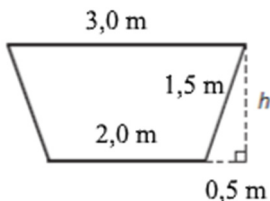
$$\alpha = 2\beta = 2 \cdot 35,264\dots^\circ = 70,528\dots^\circ \approx 70,5^\circ.$$

Avaruuslävistäjien välisen terävän kulman suuruus on noin $70,5^\circ$.

Vastaus: $70,5^\circ$

421.

Vesimäärä muodostaa särmiön. Koska veden alla olevan poikkileikkauskuvion kaksi sivua ovat yhdensuuntaiset ja erisuuntaiset sivut ovat yhtä pitkiä, poikkileikkauskuvio on tasakylkinen puolisuunnikas. Särmiön korkeutena on tunnin aikana kulkevan vesipatsaan pituus. Merkitään puolisuunnikkaan korkeutta kirjaimella h .



Lasketaan ojan syvyys eli puolisuunnikkaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + 0,5^2 = 1,5^2$$

$$h^2 = 2$$

$$h = (\pm)\sqrt{2}$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2,0 \text{ m} + 3,0 \text{ m}}{2} \cdot \sqrt{2} \text{ m} = 3,535\dots \text{ m}^2.$$

Yhdessä sekunnissa kulkevan veden tilavuus on

$$V = A \cdot 0,25 \text{ m} = 3,535\dots \text{ m}^2 \cdot 0,25 \text{ m} = 0,883\dots \text{ m}^3.$$

Tunnissa kulkevan veden tilavuus $3600 \cdot 0,883\dots \text{ m}^3 \approx 3200 \text{ m}^3$.

Joessa virtaa tunnin aikana noin 3200 m^3 vettä.

Vastaus: 3200 m^3

4.2 Ympyrälieriö

ALOITA PERUSTEISTA

422. a) Ympyrälieriön tilavuus on

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 13 \text{ m}^2 \cdot 4,2 \text{ m} = 54,6 \text{ m}^3 \approx 55 \text{ m}^3.$$

Vastaus: 55 m^3

- b) Lieriön tilavuus on

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 28 \text{ cm}^2 \cdot 8,5 \text{ cm} = 238 \text{ cm}^3 \approx 240 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 240 cm^3

- c) Ympyrälieriön pohjaympyrän säde on $r = \frac{0,8 \text{ dm}}{2} = 0,4 \text{ dm} = 4,0 \text{ cm}$.

Ympyrälieriön tilavuus on

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (4,0 \text{ cm})^2 \cdot 15,0 \text{ cm} = 753,98 \dots \text{ cm}^3 \approx 750 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 750 cm^3

423. Särmiöllä ja ympyrälieriöllä on kaksi yhtenevää ja yhdensuuntaista pohjaa, ja pohjien vastinpiisteet on yhdistetty janoilla. Särmiön pohja on monikulmio ja ympyrälieriön ympyrä. Jos edellä mainitut ehdot eivät täyty, kappale on muu avaruuskappale.

- a) Särmiöitä ovat kappaleet III ja V. Kappale IV ei ole särmiö, koska sillä ei ole yhdensuuntaisia pohjia, joiden vastinpiisteet olisi yhdistetty janoilla.

Vastaus: III ja V

- b) Kappale I on ympyrälieriö. Kappale II ei ole ympyrälieriö, koska pohjien vastinpiisteitä ei ole yhdistetty janoilla vaan kaarilla. Myöskään kappale VI ei ole ympyrälieriö, koska sen pohjat eivät ole yhdensuuntaiset.

Vastaus: I

- c) Edellisten kohtien perusteella lieriöitä ovat I, III ja V.

Vastaus: I, III ja V

424. Pohjaympyrän säde on

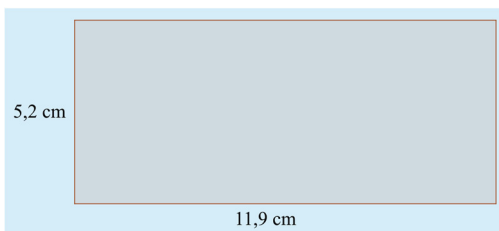
$$r = \frac{3,8 \text{ cm}}{2} = 1,9 \text{ cm}.$$

Suoran ympyrälieriön vaippa on suorakulmio, jonka korkeus on sama kuin ympyrälieriön korkeus ja kanta on pohjaympyrän kehän pituus.

Pohjaympyrän kehän pituus on

$$p = 2\pi r = 2\pi \cdot 1,9 \text{ cm} = 11,938\dots \text{ cm} \approx 11,9 \text{ cm}.$$

Piirretään ympyrälieriön vaippa tasoon levitettynä.



- a) Vaipan pinta-ala on suorakulmion kannan ja korkeuden tuoto.

$$A_{\text{vaippa}} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 1,9 \text{ cm} \cdot 5,2 \text{ cm} = 62,077\dots \text{ cm}^2 \approx 62 \text{ cm}^2$$

Vastaus: 62 cm^2

- b) Kokonaispinta-ala saadaan, kun vaipan pinta-alaan lisätään pohjien pinta-alat. Kokonaisala on

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{vaippa}} + 2A_{\text{pohja}} = 62,077\dots \text{ cm}^2 + 2 \cdot \pi \cdot (1,9 \text{ cm})^2 \\ &= 84,760\dots \text{ cm}^2 \approx 85 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Vastaus: 85 cm^2

425. Putkihuivi on ontto suora lieriö, jonka vaippa on suorakulmio. Suorakulmion pinta-ala on pohjan piirin ja lieriön korkeuden tulo.
 $A_{\text{vaippa}} = 24 \text{ cm} \cdot 175 \text{ cm} = 4200 \text{ cm}^2$

Putkihuivin pinta-ala on 4200 cm^2 .

Vastaus: 4200 cm^2

426. Vulkaaninen aine muodostaa lieriön, jonka korkeus $h = 1 \text{ m} = 0,001 \text{ km}$. Merkitään pohjan pinta-alaa kirjaimella A . Muodostetaan yhtälö lieriön tilavuudelle ja ratkaistaan siitä pohjan pinta-ala A .

$$V = Ah$$

$$2500 = A \cdot 0,001 \quad || \cdot 1000$$

$$A = 2\,500\,000$$

Vulkaaninen aine olisi peittänyt $2\,500\,000 \text{ km}^2$:n suuruisen alueen.

Verrataan tämän pinta-alan suuruutta Suomen pinta-alaan.

$$\frac{2\,500\,000 \text{ km}^2}{338\,000 \text{ km}^2} = 7,396... \approx 7$$

Vulkaanisen aineen peittämä pinta-ala on noin 7-kertainen Suomen pinta-alan verrattuna.

Vastaus: $2\,500\,000 \text{ km}^2$, 7-kertainen

VAHVISTA OSAAMISTA

427. a) Epätosi. Ratkaistaan ympyrälieriön korkeus h Pythagoraan lauseella.

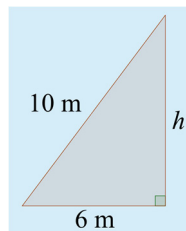
$$6^2 + h^2 = 10^2$$

$$36 + h^2 = 100$$

$$h^2 = 64$$

$$h = (\pm)\sqrt{64}$$

$$h = 8$$



Vastaus: epätosi, 8 m

- b) Pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2 = \pi \cdot (4 \text{ m})^2 = 50,265 \dots \text{ m}^2 \approx 50 \text{ m}^2.$$

Vastaus: tosi

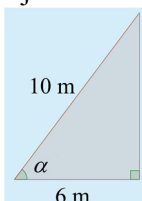
- c) Ympyrälieriön kaltevuus on säteen jatkeen ja sivujanan välinen kulma. Merkitään kulmaa kirjaimella α ja ratkaistaan se kosinin avulla.

$$\cos \alpha = \frac{6}{10}$$

$$\cos \alpha = 0,6$$

$$\alpha = 53,130 \dots^\circ$$

$$\alpha \approx 53^\circ$$



Vastaus: tosi

- d) Vinon ympyrälieriön tilavuus on pohjan pinta-alan ja korkeuden tulo.

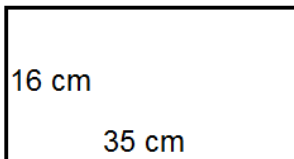
$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (4 \text{ m})^2 \cdot 8 \text{ m} = 402,123 \dots \text{ m}^3$$

$$\approx 400 \text{ m}^3 = 400\,000 \text{ dm}^3 = 400\,000 \text{ l}$$

Väite on epätosi, sillä oikea tilavuuden yksikkö on kuutiometri.

Vastaus: epätosi, 400 m³

428. Ympyrälieriön vaippa tasoon levitettynä:



Tapa 1:

Kääritään suorakulmio ympyrälieriön vaipaksi siten, että ympyrälieriön korkeudeksi tulee 16 cm. Tällöin pohjaympyrän piiri on 35 cm. Muodostetaan yhtälö pohjaympyrän piirille ja ratkaistaan siitä pohjaympyrän säde r .

$$2\pi r = 35 \quad || : 2\pi$$
$$r = 5,570\dots$$

Ympyrälieriön tilavuus on

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (5,570\dots \text{ cm})^2 \cdot 16 \text{ cm} = 1559,71\dots \text{ cm}^3 \approx 1600 \text{ cm}^3.$$

Tapa 2:

Kääritään suorakulmio ympyrälieriön vaipaksi siten, että ympyrälieriön korkeudeksi tulee 35 cm. Tällöin pohjaympyrän piiri on 16 cm. Muodostetaan yhtälö pohjaympyrän piirille ja ratkaistaan siitä pohjaympyrän säde r .

$$2\pi r = 16 \quad || : 2\pi$$
$$r = 2,546\dots$$

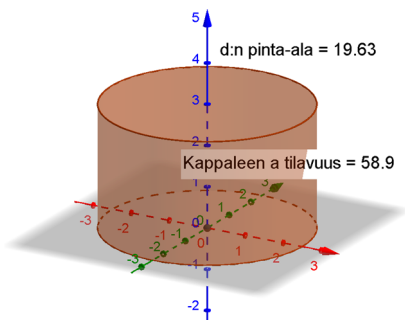
Ympyrälieriön tilavuus on

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (2,546\dots \text{ cm})^2 \cdot 35 \text{ cm} = 713,01\dots \text{ cm}^3 \approx 713 \text{ cm}^3.$$

Ympyrälieriön tilavuus on suurempi, kun suorakulmio kääritään ympyrälieriön vaipaksi siten, että ympyrälieriön korkeudeksi tulee 16 cm.

Vastaus: Käärimällä siten, että ympyrälieriön korkeus on 16 cm.

429. Videossa <https://vimeo.com/182670531/9d805fe6ab> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista appletin avulla.



Appletin perusteella pohjan pinta-ala on 19,63 ja ympyrälieriön tilavuus 58,9.

Vastaus: tilavuus 58,9 ja pohjan pinta-ala 19,63

430. Hammastahnatuubin suuaukko on pyöreä, joten hammastahnapötkö on suoran ympyrälieriön muotoinen.
Ympyrälieriön pohjaympyrän säde on

$$r = \frac{5 \text{ mm}}{2} = 2,5 \text{ mm} = 0,25 \text{ cm}.$$

Pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2 = \pi \cdot (0,25 \text{ cm})^2 = 0,196... \text{ cm}^2.$$

Merkitään ympyrälieriön korkeutta kirjaimella h . Ympyrälieriön tilavuus on $100 \text{ ml} = 100 \text{ cm}^3$. Muodostetaan yhtälö ympyrälieriön tilavuudelle ja ratkaistaan siitä ympyrälieriön korkeus h .

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot h \\ 100 &= 0,196... \cdot h \quad || : 0,196... \\ h &= 509,295... \\ h &\approx 510 \text{ cm} = 5,1 \text{ m} \end{aligned}$$

Hammastahnatuubista pystyy puristamaan noin 5,1 m pitkän pötkön.

Vastaus: 5,1 m

431. Suoran ympyrälieriön muotoisen peltitynnnyrin tilavuus on
 $V = 200 \text{ l} = 200 \text{ dm}^3 = 200\,000 \text{ cm}^3$.

Merkitään tynnyrin pohjaympyrän sädettä kirjaimella r . Muodostetaan yhtälö tynnyrin tilavuudelle ja ratkaistaan siitä pohjaympyrän säde r .

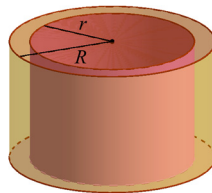
$$\begin{array}{ll} V = \pi r^2 h & \parallel V = 200\,000, h = 120 \\ 200\,000 = \pi \cdot r^2 \cdot 120 & \parallel : 120\pi \\ r^2 = 530,516\dots & \\ r = (\pm)\sqrt{530,516\dots} & \\ r = 23,032\dots & \end{array}$$

Tynnyrin pohjan halkaisija on

$$2r = 2 \cdot 23,032\dots \text{ cm} = 46,065\dots \text{ cm} \approx 46 \text{ cm}.$$

Vastaus: 46 cm

432. Leivoksen reuna on ontto ympyrälieriö, jonka tilavuus saadaan vähentämällä ulomman lieriön tilavuudesta sisemmän lieriön tilavuus. Merkitään ulomman ympyrälieriön pohjaympyrän sädettä kirjaimella R ja sisemmän ympyrälieriön pohjaympyrän sädettä kirjaimella r .



Ulomman ympyrälieriön pohjaympyrän säde on

$$R = \frac{11 \text{ cm}}{2} = 5,5 \text{ cm}$$

ja sisemmän ympyrälieriön pohjaympyrän säde

$$r = R - 1,0 \text{ cm} = 5,5 \text{ cm} - 1,0 \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}.$$

Lasketaan koko leivoksen eli ulomman ympyrälieriön tilavuus.

$$\begin{aligned} V_{\text{leivos}} &= \pi R^2 h & \parallel R = 5,5 \text{ cm}, h = 4,0 \text{ cm} \\ &= \pi \cdot (5,5 \text{ cm})^2 \cdot 4,0 \text{ cm} \\ &= 380,132 \dots \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Täytteen eli sisemmän ympyrälieriön tilavuus on

$$\begin{aligned} V_{\text{täyte}} &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot (4,5 \text{ cm})^2 \cdot 4,0 \text{ cm} \\ &= 254,469 \dots \text{ cm}^3 \\ &\approx 250 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Lasketaan ulomman ja sisemmän ympyrälieriön tilavuuksien erotus.

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{leivos}} - V_{\text{täyte}} \\ &= 380,132 \dots \text{ cm}^3 - 254,469 \dots \text{ cm}^3 \\ &= 125,663 \dots \text{ cm}^3 \\ &\approx 130 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Reunan tilavuus on noin 130 cm^3 ja täytteen noin 250 cm^3 .

Vastaus: reuna 130 cm^3 ja täyte 250 cm^3

433. Metallin määrä saadaan laskemalla ympyrälieriön muotoisen tölkin kokonaispinta-ala. Ensiksi on selvitettävä pohjaympyrän säde. Merkitään sädettä kirjaimella r .

Tölkin tilavuus on $0,25 \text{ l} = 0,25 \text{ dm}^3 = 250 \text{ cm}^3$. Muodostetaan yhtälö tölkin tilavuudelle ja ratkaistaan siitä pohjaympyrän säde r .

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h & \parallel V &= 250, h = 4,5 \\ 250 &= \pi r^2 \cdot 4,5 & \parallel & : 4,5\pi \\ r^2 &= 17,683... \\ r &= (\pm)\sqrt{17,683...} \\ r &= 4,205... \end{aligned}$$

Pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2 = \pi \cdot (4,205... \text{ cm})^2 = 55,555... \text{ cm}^2.$$

Vaipan pinta-ala on

$$A_{\text{vaippa}} = 2\pi r h = 2\pi \cdot 4,205... \text{ cm} \cdot 4,5 \text{ cm} = 118,899... \text{ cm}^2.$$

Tölkin kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= 2A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\ &= 2 \cdot 55,555... \text{ cm}^2 + 118,899... \text{ cm}^2 \\ &= 230,010... \text{ cm}^2 \\ &\approx 230 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Metallia tarvitaan noin 230 cm^2 .

Vastaus: 230 cm^2

434. Yksi tonni on 1000 kg, joten 2 miljardia tonnia on
2 000 000 000 000 kg.
Viljan tiheys on $700 \text{ g/l} = 0,7 \text{ kg/l}$.

Lasketaan viljamäärän tilavuus tiheyden kaavan avulla.

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{m}{V} & || \cdot V \\ \rho V &= m & || : \rho \\ V &= \frac{m}{\rho} & || m = 2\,000\,000\,000\,000 \text{ kg}, \rho = 0,7 \text{ kg/l} \\ V &= \frac{2\,000\,000\,000\,000 \text{ kg}}{0,7 \text{ kg/l}} = 2,857\ldots \cdot 10^{12} \text{ l} = 2,857\ldots \cdot 10^{12} \text{ dm}^3 \\ &= 2,857\ldots \cdot 10^9 \text{ m}^3\end{aligned}$$

Ympyrälieriön muotoisen siilon pohjaympyrän säde on

$$r = \frac{20,0 \text{ m}}{2} = 10,0 \text{ m}$$

Viljasiilon pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = \pi \cdot (10,0 \text{ m})^2 = 314,159\ldots \text{ m}^2.$$

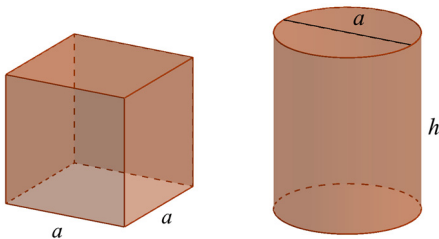
Muodostetaan yhtälö siilon tilavuudelle ja ratkaistaan siitä siilon korkeus h .

$$\begin{aligned}V &= A_{\text{pohja}} \cdot h & || : A_{\text{pohja}} \\ h &= \frac{V}{A_{\text{pohja}}} & || V = 2,857\ldots \cdot 10^9 \text{ m}^3, A_{\text{pohja}} = 314,159\ldots \text{ m}^2 \\ h &= \frac{2,857\ldots \cdot 10^9 \text{ m}^3}{314,159\ldots \text{ m}^2} = 9\,094\,568,177\ldots \text{ m} \approx 9\,100\,000 \text{ m} = 9100 \text{ km}\end{aligned}$$

Viljamäärä mahtuisi noin 9100 km korkeaan siiloon.

Vastaus: 9100 km

435. Merkitään kuution särmän pituutta ja ympyrälieriön halkaisijaa kirjaimella a ja ympyrälieriön korkeutta kirjaimella h .



Kuution ja ympyrälieriön tilavuus on $1,0 \text{ l} = 1,0 \text{ dm}^3$.

Muodostetaan yhtälö kuution tilavuudelle ja ratkaistaan siitä kuution särmän pituus a .

$$\begin{aligned} V &= a^3 & \parallel V &= 1,0 \text{ l} = 1,0 \text{ dm}^3 \\ 1,0 &= a^3 \\ a &= \sqrt[3]{1,0 \text{ dm}^3} \\ a &= 1,0 \text{ dm} \end{aligned}$$

- a) Ympyrälieriön pohjaympyrän säde on

$$r = \frac{1,0 \text{ dm}}{2} = 0,5 \text{ dm}.$$

Muodostetaan yhtälö ympyrälieriön tilavuudelle ja ratkaistaan siitä ympyrälieriön korkeus h .

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h & \parallel V &= 1,0 \text{ dm}^3, r = 0,5 \text{ dm} \\ 1,0 &= \pi \cdot 0,5^2 \cdot h \\ 1,0 &= \pi \cdot 0,25 \cdot h & \parallel : 0,25\pi \\ h &= 1,273\dots \\ h &\approx 1,3 \end{aligned}$$

Ympyrälieriön korkeus on noin $1,3 \text{ dm}$.

Vastaus: $1,3 \text{ dm}$

- b) Kuution yhden tahkon pinta-ala on

$$A_{\text{tahko}} = a^2 = 1,0 \text{ dm} \cdot 1,0 \text{ dm} = 1,0 \text{ dm}^2.$$

Kuutiossa on kuusi yhtenevää tahkoa, joten kuution kokonaispinta-ala on

$$A_{\text{kuutio}} = 6 \cdot A_{\text{tahko}} = 6 \cdot 1,0 \text{ dm}^2 = 6,0 \text{ dm}^2.$$

Ympyrälieriön pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2 = \pi \cdot (0,5 \text{ dm})^2 = 0,785... \text{ dm}^2.$$

Ympyrälieriön vaipan pinta-ala on

$$A_{\text{vaippa}} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 0,5 \text{ dm} \cdot 1,273... \text{ dm} = 4,0 \text{ dm}.$$

Ympyrälieriön kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{lieriö}} &= A_{\text{vaippa}} + 2 \cdot A_{\text{pohja}} \\ &= 4,0 \text{ dm} + 2 \cdot 0,785... \text{ dm}^2 \\ &= 5,570... \text{ dm}^2 \\ &\approx 5,6 \text{ dm}^2. \end{aligned}$$

Kuution kokonaispinta-ala on $6,0 \text{ dm}^2$ ja ympyrälieriön noin $5,6 \text{ dm}^2$.

Vastaus: kuutio $6,0 \text{ dm}^2$ ja ympyrälieriö $5,6 \text{ dm}^2$

- c) Lasketaan kuution pinta-alan suhde ympyrälieriön pinta-alaan.

$$\frac{6,0 \text{ dm}^2}{5,570... \text{ dm}^2} = 1,0770... = 107,70... \% \approx 107,7 \%$$

Kuution pinta-ala on $107,7 \%$ ympyrälieriön pinta-alasta, joten kuution pinta-ala on $7,7 \%$ suurempi.

Vastaus: kuution pinta-ala, $7,7 \%$

436. Muutetaan porausreiän mitat samaan yksikköön.

Porausreiän

$$\text{säde on } r = \frac{140 \text{ mm}}{2} = 70 \text{ mm} = 7,0 \text{ cm ja}$$

$$\text{syvyys } h = 57,2 \text{ m} = 5720 \text{ cm.}$$

Porausreikä on suoran ympyrälieriön muotoinen, joten porausreiän tilavuus on

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (7,0 \text{ cm})^2 \cdot 5720 \text{ cm} = 880\,525,588... \text{ cm}^3.$$

Mökipolku on suorakulmio, jonka pinta-ala on pituuden ja leveyden tulo.

$$A = 45 \text{ cm} \cdot 7250 \text{ cm} = 326\,250 \text{ cm}^2$$

Polulle levitettävä kiviaines muodostaa suorakulmaisen särmiön.

Merkitään poluille levitettävän kerroksen paksuutta eli särmiön korkeutta kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö kiviaineksen tilavuudelle ja ratkaistaan siitä paksuus x .

$$V = Ax \quad || : A$$

$$x = \frac{V}{A} \quad || V = 880\,525,588... \text{ cm}^3, A = 326\,250 \text{ cm}^2$$

$$x = \frac{880\,525,588... \text{ cm}^3}{326\,250 \text{ cm}^2} = 2,698... \text{ cm} \approx 2,7 \text{ cm}$$

Kerroksen paksuus on noin 2,7 cm.

Vastaus: 2,7 cm

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

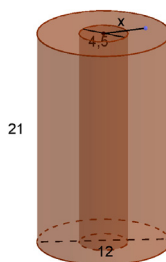
437. Piirretään mallikuva. Talouspaperirulla on ontto ympyrälieriö, jonka ulkohalkaisija on 12 cm ja sisähalkaisija 4,5 cm.

Isomman ympyrälieriön pohjaympyrän

$$\text{säde on } R = \frac{12 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm}$$

ja pienemmän ympyrälieriön
pohjaympyrän säde

$$r = \frac{4,5 \text{ cm}}{2} = 2,25 \text{ cm}.$$



Talouspaperin tilavuus saadaan, kun isomman ympyrälieriön tilavuudesta vähennetään pienemmän ympyrälieriön tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \pi R^2 h - \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot (6,0 \text{ cm})^2 \cdot 21 \text{ cm} - \pi \cdot (2,25 \text{ cm})^2 \cdot 21 \text{ cm} \\ &= 2041,053... \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Puolet talouspaperin tilavuudesta on

$$\frac{V}{2} = \frac{2041,053... \text{ cm}^3}{2} = 1020,526... \text{ cm}^3.$$

Merkitään sädettä kirjaimella x tilanteessa, jossa talouspaperin tilavuudesta on jäljellä puolet. Muodostetaan yhtälö talouspaperin tilavuudelle ja ratkaistaan siitä säde x .

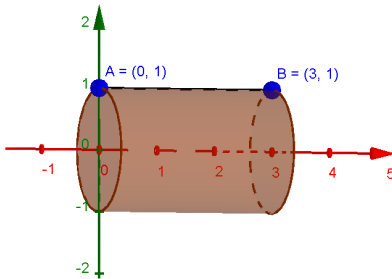
$$\begin{aligned} \pi x^2 h - \pi r^2 h &= 1020,526... \\ \pi \cdot x^2 \cdot 21 - \pi \cdot 2,25^2 \cdot 21 &= 1020,526... \\ 65,973... \cdot x^2 - 333,990... &= 1354,517... \\ 65,973... \cdot x^2 &= 1354,517... & \parallel : 65,973... \\ x^2 &= 20,531... \\ x &= (\pm) \sqrt{20,531...} \\ x &= 4,531... \end{aligned}$$

Kun talouspaperin tilavuudesta on puolet jäljellä, talouspaperirullan ulkohalkaisija on

$$2x = 2 \cdot 4,531 \dots \text{ cm} = 9,062 \dots \text{ cm} \approx 9,1 \text{ cm}.$$

Vastaus: 9,1 cm

438. Videossa <https://vimeo.com/182670626/3cfc83f959> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.



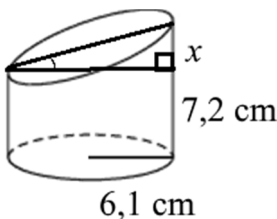
Pyörähdyskappale on ympyrälieriö, jonka pohjaympyrän säde $r = 1$ ja korkeus $h = 3$.

Ympyrälieriön tilavuus on

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = 3\pi = 9,424 \dots \approx 9,4.$$

Vastaus: $3\pi \approx 9,4$

439. Juustopala muodostuu ympyrälieriöstä, jonka korkeus $h = 7,2$ cm ja ympyrälieriön puolikkaasta, jonka korkeus on x .



Kokonaisen ympyrälieriön tilavuus on

$$V_{\text{kokonainen}} = \pi r^2 h = \pi \cdot (6,1 \text{ cm})^2 \cdot 7,2 \text{ cm} = 841,670... \text{ cm}^3.$$

Ympyrälieriön pohjan halkaisija on

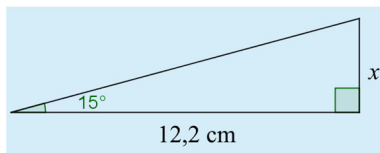
$$2r = 2 \cdot 6,1 \text{ cm} = 12,2 \text{ cm}.$$

Ratkaistaan korkeus x suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\tan 15^\circ = \frac{x}{12,2} \quad || \cdot 12,2$$

$$x = 12,2 \cdot \tan 15^\circ$$

$$x = 3,268...$$



Ylemmän lieriön puolikkaan tilavuus on

$$V_{\text{puolikas}} = 0,5 \cdot \pi \cdot (6,1 \text{ cm})^2 \cdot 3,268... \text{ cm} = 191,069... \text{ cm}^3.$$

Yhteistilavuus on

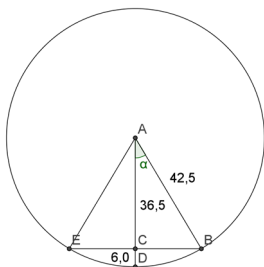
$$\begin{aligned} V &= V_{\text{kokonainen}} + V_{\text{puolikas}} \\ &= 841,670... \text{ cm}^3 + 191,069... \text{ cm}^3 \\ &= 1032,74... \text{ cm}^3 \\ &\approx 1030 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Jäljellä olevan juuston tilavuus on noin 1030 cm^3 .

Vastaus: 1030 cm^3

440. Vesi muodostaa lieriön, jonka pohja on ympyrän segmentti ja korkeutena on tien leveys $10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$.

Putken säde on $r = \frac{85 \text{ cm}}{3} = 42,5 \text{ cm}$.



Segmentin korkeus on $6,0 \text{ cm}$, joten kolmion korkeus on säteen pituuden ja segmentin korkeuden erotus.

$$42,5 \text{ cm} - 6,0 \text{ cm} = 36,5 \text{ cm}$$

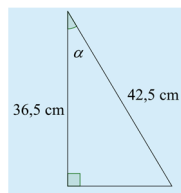
Segmentin pinta-ala saadaan vähentämällä sektorin pinta-alasta keskuskolmion pinta-ala. Sektorin pinta-alaa varten on selvitettävä ensin sektorin keskuskulman suuruus.

Merkitään sektorin keskuskulman puolikasta kirjaimella α . Ratkaistaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\cos \alpha = \frac{36,5}{42,5}$$

$$\cos \alpha = 0,858\dots$$

$$\alpha = 30,815\dots^\circ$$



Sektorin keskuskulman suuruus on

$$2\alpha = 2 \cdot 30,815\dots^\circ = 61,630\dots^\circ.$$

Sektorin pinta-ala on

$$A_{\text{sektori}} = \frac{61,630\dots^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (42,5 \text{ cm})^2 = 971,451\dots \text{ cm}^2.$$

Merkitään keskuskolmion AEB kannan puolikasta CB kirjaimella x .
Ratkaistaan kannan puolikas x Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}x^2 + 36,5^2 &= 42,5^2 \\x^2 &= 42,5^2 - 36,5^2 \\x^2 &= 474 \\x &= (\pm) \sqrt{474} \\x &= 21,771 \dots\end{aligned}$$

Keskuskolmion kanta on $2x = 2 \cdot 21,771 \dots \text{ cm} = 43,543 \dots \text{ cm}$.

Keskuskolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{43,543 \dots \text{ cm} \cdot 36,5 \text{ cm}}{2} = 794,661 \dots \text{ cm}^2.$$

Segmentin pinta-ala on

$$\begin{aligned}A_{\text{pohja}} &= A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} \\&= 971,451 \dots \text{ cm}^2 - 794,661 \dots \text{ cm}^2 = 176,789 \dots \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

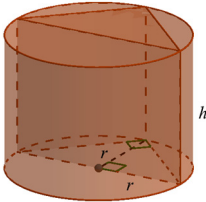
Lieriön tilavuus

$$\begin{aligned}V &= A_{\text{pohja}} \cdot h \\&= 176,789 \dots \text{ cm}^2 \cdot 1000 \text{ cm} = 176789,9 \dots \text{ cm}^3 \approx 180\,000 \text{ cm}^3.\end{aligned}$$

Vettä on noin $180\,000 \text{ cm}^3 = 180 \text{ dm}^3 = 180 \text{ l}$.

Vastaus: 180 l

441. Kolmion suoran kulman kärki on ympyrän kehällä, joten kehäkulma on suora. Sitä vastaava keskuskulma on 180° , joten kolmion hypotenuusana on ympyrän halkaisija $2r$.
Kolmion korkeus on suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta. Tämä korkeus on suurimmillaan ympyrän säde r .



Särmiön pohjakolmion suurin mahdollinen pinta-ala on siis

$$A_{\text{pohja}} = \frac{2r \cdot r}{2} = r^2.$$

Särmiön tilavuus on tällöin

$$V_{\text{särmiö}} = A_{\text{pohja}} \cdot h = r^2 h.$$

Ympyrälieriön pohjaympyrän pinta-ala on πr^2 ja tilavuus $V_{\text{lieriö}} = \pi r^2 h$.

Tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_{\text{lieriö}}}{V_{\text{särmiö}}} = \frac{r^2 h}{\pi r^2 h} = \frac{1}{\pi} = 0,318... \approx 0,32.$$

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{\pi} \approx 0,32$$

4.3 Pyramidi

ALOITA PERUSTEISTA

442. a) Pyramidin tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot 17 \text{ cm}^2 \cdot 5,2 \text{ cm} = 29,466\dots \text{ cm}^3 \approx 29 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Vastaus: 29 cm^3

- b) Pyramidin tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot 10,4 \text{ m}^2 \cdot 3,0 \text{ m} = 10,4 \text{ m}^3 \approx 10 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Vastaus: 10 m^3

- c) Pyramidin pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = (1,3 \text{ dm})^2 = 1,69 \text{ dm}^2.$$

Pyramidin tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1,69 \text{ dm}^2 \cdot 1,8 \text{ dm} = 1,014 \text{ dm}^3 \approx 1,0 \text{ dm}^3. \end{aligned}$$

Vastaus: $1,0 \text{ dm}^3$

443. a) Väärin. Pyramidin korkeus on $1,5 \text{ m}$.

Vastaus: väärin, $1,5 \text{ m}$

- b) Oikein, sillä $2,0 \text{ m} \cdot 3,0 \text{ m} = 6,0 \text{ m}^2$.

Vastaus: oikein

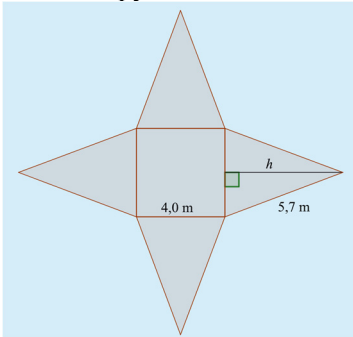
c) Väärin. Värjätyn tahkon pinta-ala on $\frac{3,0 \text{ m} \cdot 1,8 \text{ m}}{2} = 2,7 \text{ m}^2$.

Vastaus: väärin, $2,7 \text{ m}^2$

d) Väärin. Pyramidin tilavuus on $\frac{1}{3} \cdot 6,0 \text{ m}^2 \cdot 1,5 \text{ m} = 3,0 \text{ m}^3$.

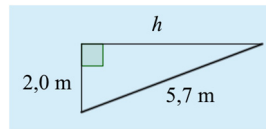
Vastaus: väärin, $3,0 \text{ m}^3$

444. a) Piirretään pyramidi tasoon levitettynä.



b) Merkitään kolmion muotoisen sivutahkon korkeusjanaa kirjaimella h . Korkeusjana h jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}h^2 + 2,0^2 &= 5,7^2 \\h^2 &= 5,7^2 - 2,0^2 \\h^2 &= 28,49 \\h &= (\pm)\sqrt{28,49} \\h &= 5,337\dots \\h &\approx 5,3\end{aligned}$$



Sivutahkon korkeus on noin 5,3 m.

Vastaus: 5,3 m

- c) Yhden sivutahkon pinta-ala on

$$A_{\text{sivutahko}} = \frac{4,0 \text{ m} \cdot 5,337... \text{ m}}{2} = 10,675... \text{ m}^2.$$

Pohjan pinta-ala on

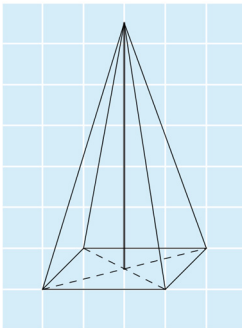
$$A_{\text{pohja}} = 4,0 \text{ m} \cdot 4,0 \text{ m} = 16 \text{ m}^2.$$

Pyramidin kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{pohja}} + 4 \cdot A_{\text{sivutahko}} \\ &= 16 \text{ m}^2 + 4 \cdot 10,675... \text{ m}^2 \\ &= 58,700... \text{ m}^2 \\ &\approx 59 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Vastaus: 59 m^2

445. a) Piirretään pyramidi kavaljeeriperspektiivissä. Paperia vastaan kohtisuorien särmien pituudet piirretään 45° :n kulmassa vaakatasoon nähden ja niiden pituudet ovat puolet todellisesta pituudesta. Korkeusjana piirretään pohjaneliön lävistäjien leikkauspisteestä.

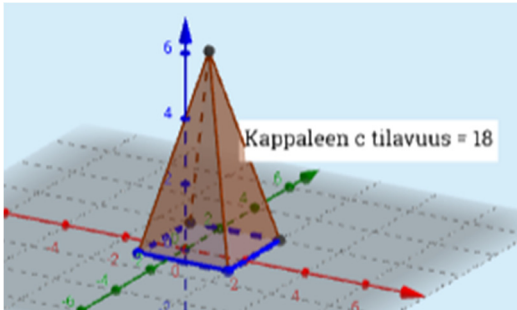


b) Pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 6 = 18.$$

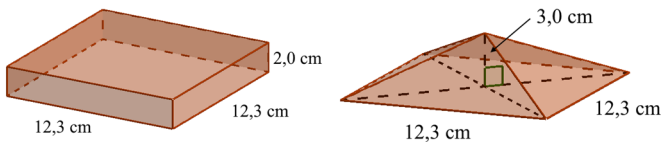
Tarkistus:

Videossa <https://vimeo.com/182670740/b1df5d7082> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista appletin avulla.



Vastaus: 18

446. Tolpanhattu koostuu särmiöstä ja pyramidista. Tolpanhatun korkeus on 5,0 cm ja särmiön 2,0 cm, joten pyramidin korkeus on $5,0 \text{ cm} - 2,0 \text{ cm} = 3,0 \text{ cm}$.



Särmiön ja pyramidin pohjan pinta-ala on
 $A_{\text{pohja}} = (12,3 \text{ cm})^2 = 151,29 \text{ cm}^2$.

Särmiön tilavuus on

$$V_{\text{särmiö}} = A_{\text{pohja}} \cdot h_{\text{särmiö}} = 151,29 \text{ cm}^2 \cdot 2,0 \text{ cm} = 302,58 \text{ cm}^3.$$

Pyramidin tilavuus on

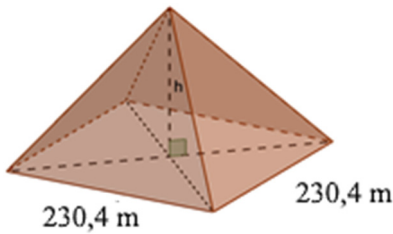
$$V_{\text{pyramidi}} = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h_{\text{pyramidi}} = \frac{1}{3} \cdot 151,29 \text{ cm}^2 \cdot 3,0 \text{ cm} = 151,29 \text{ cm}^3.$$

Tolpanhatun tilavuus on

$$V = V_{\text{särmiö}} + V_{\text{pyramidi}} = 302,58 \text{ cm}^3 + 151,29 \text{ cm}^3 = 453,87 \text{ cm}^3 \\ \approx 450 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 450 cm^3

447. Merkitään pyramidin korkeutta kirjaimella h .



Pyramidin pohjan pinta-ala on $A_{\text{pohja}} = (230,4 \text{ m})^2 = 53\,084,16 \text{ m}^2$.

Muodostetaan yhtälö pyramidin tilavuudelle ja ratkaistaan siitä korkeus h .

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h \quad || \quad V = 2\,592\,000 \text{ m}^3, A_{\text{pohja}} = 53\,084,16 \text{ m}^2$$

$$2\,592\,000 = \frac{1}{3} \cdot 53\,084,16 \cdot h$$

$$2\,592\,000 = 17\,694,72h \quad || : 17\,694,72$$

$$146,484\dots = h$$

$$h \approx 146,5$$

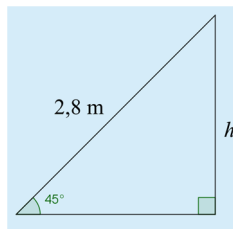
Pyramidin korkeus oli noin 146,5 m.

Vastaus: 146,5 m

VAHVISTA OSAAMISTA

448. a) Ratkaistaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \frac{h}{2,8} & || \cdot 2,8 \\ h &= 2,8 \cdot \sin 45^\circ \\ h &= 1,979\dots \\ h &\approx 2,0\end{aligned}$$

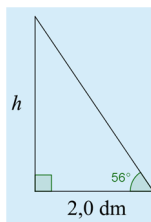


Pyramidin korkeus on noin 2,0 m.

Vastaus: $h \approx 2,0$ m

- b) Pyramidin pohjan kolmio on tasasivuinen, joten suorakulmaisen kolmion vaakasuuntainen kateetti on 2,0 dm. Ratkaistaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

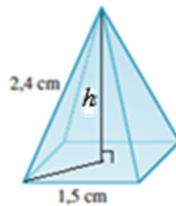
$$\begin{aligned}\tan 56^\circ &= \frac{h}{2,0} & || \cdot 2,0 \\ h &= 2,0 \cdot \tan 56^\circ \\ h &= 2,965\dots \\ h &\approx 3,0\end{aligned}$$



Pyramidin korkeus on noin 3,0 dm.

Vastaus: $h \approx 3,0$ dm

- c) Pyramidin korkeus lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta, jonka toinen kateetti on pohjaneliön lävistäjän puolikas.



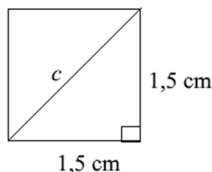
Merkitään pohjaneliön lävistäjää kirjaimella c .
Ratkaistaan lävistäjä c suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$c^2 = 1,5^2 + 1,5^2$$

$$c^2 = 4,5$$

$$c = (\pm)\sqrt{4,5}$$

$$c = 2,121\dots$$



Lävistäjän puolikas on $\frac{2,121\dots \text{ cm}}{2} = 1,060\dots \text{ cm}$.

Ratkaistaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + 1,060\dots^2 = 2,4^2$$

$$h^2 = 2,4^2 - 1,060\dots^2$$

$$h^2 = 4,635$$

$$h = (\pm)\sqrt{4,635}$$

$$h = 2,152\dots$$

$$h \approx 2,2$$

Pyramidin korkeus on noin $2,2 \text{ cm}$.

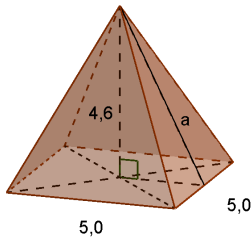
Vastaus: $h \approx 2,2 \text{ cm}$

449. a) Pyramidin pohjan pinta-ala on $A_{\text{pohja}} = 5,0 \text{ m} \cdot 5,0 \text{ m} = 25 \text{ m}^2$.

Pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 25 \text{ m}^2 \cdot 4,6 \text{ m} = 38,333... \text{ m}^3 \approx 38 \text{ m}^3.$$

Merkitään sivutahkokolmion korkeusjanaa kirjaimella a . Pyramidin korkeus 4,6 m, pohjaneliön sivun puolikas 2,5 m ja sivutahkokolmion korkeus a muodostavat suorakulmaisen kolmion.



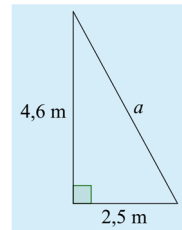
Ratkaistaan korkeus a Pythagoraan lauseen avulla.

$$a^2 = 2,5^2 + 4,6^2$$

$$a^2 = 27,41$$

$$a = (\pm)\sqrt{27,41}$$

$$a = 5,235...$$



Sivutahkokolmion pinta-ala on

$$A_{\text{sivutahko}} = \frac{5,0 \text{ m} \cdot 5,235... \text{ m}}{2} = 13,088... \text{ m}^2.$$

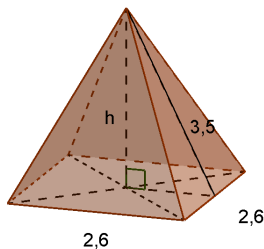
Pyramidin kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{pohja}} + 4 \cdot A_{\text{sivutahko}} \\ &= 25 \text{ m}^2 + 4 \cdot 13,088... \text{ m}^2 = 77,354... \text{ m}^2 \approx 77 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Pyramidin tilavuus on noin 38 m^3 ja kokonaispinta-ala noin 77 m^2 .

Vastaus: 38 m^3 ja 77 m^2

- b) Pyramidin korkeus h , pohjaneliön sivun pituuden puolikas 1,3 m ja sivutahkokolmion korkeus 3,5 m muodostavat suorakulmaisen kolmion.



Ratkaistaan pyramidin korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}h^2 + 1,3^2 &= 3,5^2 \\h^2 &= 3,5^2 - 1,3^2 \\h^2 &= 10,56 \\h &= (\pm)\sqrt{10,56} \\h &= 3,249\dots\end{aligned}$$

Pyramidin pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = 2,6 \text{ m} \cdot 2,6 \text{ m} = 6,76 \text{ m}^2.$$

Pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6,76 \text{ m}^2 \cdot 3,249\dots \text{ m} = 7,322\dots \text{ m}^3 \approx 7,3 \text{ m}^3.$$

Sivutahkokolmion pinta-ala on

$$A_{\text{sivutahko}} = \frac{2,6 \text{ m} \cdot 3,249\dots \text{ m}}{2} = 4,224\dots \text{ m}^2.$$

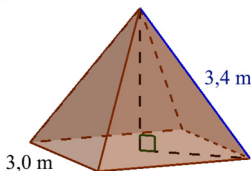
Pyramidin kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned}A &= A_{\text{pohja}} + 4 \cdot A_{\text{sivutahko}} \\&= 6,76 \text{ m}^2 + 4 \cdot 4,224\dots \text{ m}^2 = 23,657\dots \text{ m}^2 \approx 24 \text{ m}^2.\end{aligned}$$

Pyramidin tilavuus on noin $7,3 \text{ m}^3$ ja kokonaispinta-ala noin 24 m^2 .

Vastaus: $7,3 \text{ m}^3$ ja 24 m^2

- c) Pyramidin korkeus h , sivusärmä 3,4 m ja pohjaneliön lävistäjän puolikas muodostavat suorakulmaisen kolmion.



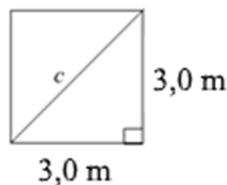
Merkitään pohjan lävistäjää kirjaimella c . Ratkaistaan lävistäjä c suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$c^2 = 3,0^2 + 3,0^2$$

$$c^2 = 18$$

$$c = (\pm)\sqrt{18}$$

$$c = 4,242\dots$$



Lävistäjän puolikas on $\frac{4,242\dots \text{ cm}}{2} = 2,121\dots \text{ cm}$.

Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

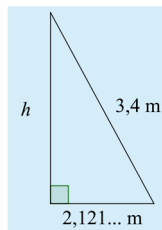
$$h^2 + 2,121\dots^2 = 3,4^2$$

$$h^2 = 3,4^2 - 2,121\dots^2$$

$$h^2 = 7,06$$

$$h = (\pm)\sqrt{7,06}$$

$$h = 2,657\dots$$

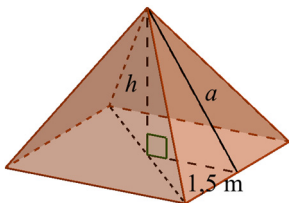


Pyramidin pohjan pinta-ala on
 $A_{\text{pohja}} = 3,0 \text{ m} \cdot 3,0 \text{ m} = 9,0 \text{ m}^2$.

Pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9,0 \text{ m}^2 \cdot 2,657\dots \text{ m} = 7,971\dots \text{ m}^3 \approx 8,0 \text{ m}^3.$$

Merkitään sivutahkokolmion korkeusjanaa kirjaimella a . Pyramidin korkeus h , pohjaneliön sivun pituuden puolikas $1,5$ m ja sivutahkokolmion korkeus muodostavat suorakulmaisen kolmion.



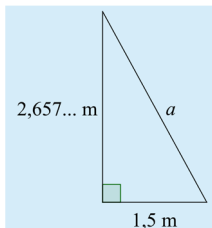
Ratkaistaan korkeus a Pythagoraan lauseen avulla.

$$a^2 = 1,5^2 + 2,657...^2$$

$$a^2 = 9,31$$

$$a = (\pm)\sqrt{9,31}$$

$$a = 3,051...$$



Sivutahkokolmion pinta-ala on

$$A_{\text{sivutahko}} = \frac{3,0 \text{ m} \cdot 3,051... \text{ m}}{2} = 4,576... \text{ m}^2.$$

Pyramidin kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{pohja}} + 4 \cdot A_{\text{sivutahko}} \\ &= 9,0 \text{ m}^2 + 4 \cdot 4,576... \text{ m}^2 = 27,307... \text{ m}^2 \approx 27 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

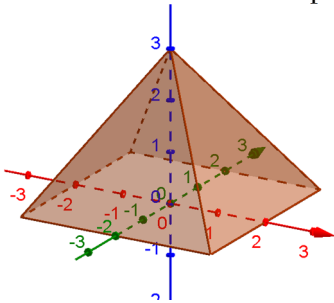
Pyramidin tilavuus on noin $8,0 \text{ m}^3$ ja kokonaispinta-ala noin 27 m^2 .

Vastaus: $8,0 \text{ m}^3$ ja 27 m^2

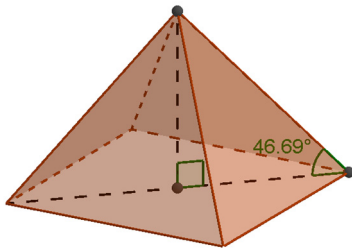
450. Vastaus:

Monitahokas	Tahkoja	Särmiä	Kärkiä
tetraedri	4	6	4
oktaedri	8	12	6
dodekaedri	12	30	20

451. Videossa <https://vimeo.com/182670933/1b771a0b65> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

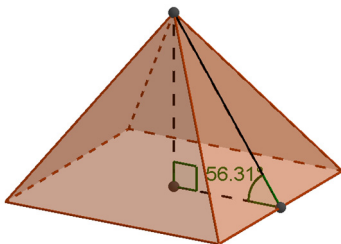


- a) Särmän ja pohjan välinen kulma on noin $46,7^\circ$.



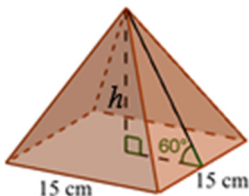
Vastaus: $46,7^\circ$

- b) Sivutahkon ja pohjan välinen kulma on noin $56,3^\circ$.



Vastaus: $56,3^\circ$

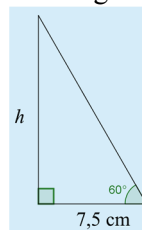
452. a) Merkitään pyramidin korkeusjanaa kirjaimella h . Pyramidin korkeus h , pohjaneliön sivun puolikas ja sivutahkon korkeusjana muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka toinen terävä kulma on 60° .



Pohjaneliön sivun puolikas on $\frac{15 \text{ cm}}{2} = 7,5 \text{ cm}$.

Ratkaistaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 60^\circ &= \frac{h}{7,5} \\ &\parallel \cdot 7,5 \\ h &= 7,5 \cdot \tan 60^\circ \\ h &= 12,990\dots\end{aligned}$$



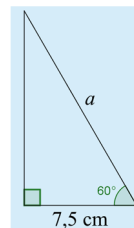
Pohjan pinta-ala on
 $A_{\text{pohja}} = 15 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 225 \text{ cm}^2$.

Pyramidin tilavuus on

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot 225 \text{ cm}^2 \cdot 12,990\dots \text{ cm} = 974,278\dots \text{ cm}^3 \approx 970 \text{ cm}^3.\end{aligned}$$

Merkitään sivutahkokolmion korkeusjanaa kirjaimella a . Ratkaistaan korkeus a suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\begin{aligned}\cos 60^\circ &= \frac{7,5}{a} \\ &\parallel \cdot a \\ a \cdot \cos 60^\circ &= 7,5 \\ a &= 15\end{aligned}$$



Sivutahkokolmion pinta-ala on

$$A_{\text{sivutahko}} = \frac{15 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm}}{2} = 112,5 \text{ cm}^2.$$

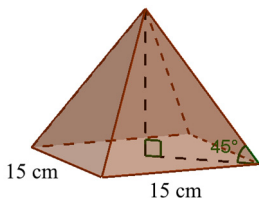
Pyramidin kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{pohja}} + 4 \cdot A_{\text{sivutahko}} \\ &= 225 \text{ cm}^2 + 4 \cdot 112,5 \text{ cm}^2 = 675 \text{ cm}^2 \approx 680 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Pyramidin tilavuus on noin 970 cm^3 ja kokonaispinta-ala noin 680 cm^2 .

Vastaus: 970 m^3 ja 680 m^2

- b) Merkitään pyramidin korkeusjanaa kirjaimella h . Pyramidin korkeus h , pohjaneliön lävistäjän puolikas ja sivusärmä muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka toinen terävä kulma on 45° .



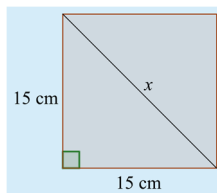
Merkitään pohjan lävistäjää kirjaimella x . Ratkaistaan lävistäjän x pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 15^2 + 15^2$$

$$x^2 = 450$$

$$x = (\pm) \sqrt{450}$$

$$x = 21,213 \dots$$

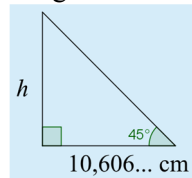


Pohjaneliön lävistäjän puolikas on

$$\frac{x}{2} = \frac{21,213 \dots \text{ cm}}{2} = 10,606 \dots \text{ cm}.$$

Ratkaistaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 45^\circ &= \frac{h}{10,606\dots} & || \cdot 10,606\dots \\ h &= 10,606\dots \cdot \tan 45^\circ \\ h &= 10,606\dots\end{aligned}$$



Pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = 15 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 225 \text{ cm}^2.$$

Pyramidin tilavuus on

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot 225 \text{ cm}^2 \cdot 10,606\dots \text{ cm} = 795,495\dots \text{ cm}^3 \approx 800 \text{ cm}^3.\end{aligned}$$

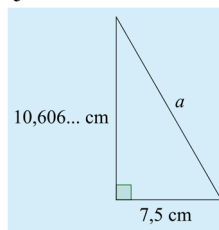
Pyramidin korkeus h , pohjaneliön sivun puolikas $7,5 \text{ cm}$ ja sivutahkon korkeusjana muodostavat suorakulmaisen kolmion. Merkitään sivutahkon korkeusjanaa kirjaimella a ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$a^2 = 7,5^2 + 10,606\dots^2$$

$$a^2 = 168,75$$

$$a = (\pm)\sqrt{168,75}$$

$$a = 12,990\dots$$



Sivutahkokolmion pinta-ala on

$$A_{\text{sivutahko}} = \frac{15 \text{ cm} \cdot 12,990\dots \text{ cm}}{2} = 97,427\dots \text{ cm}^2.$$

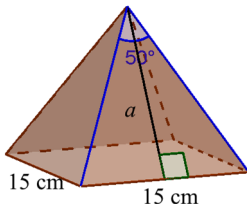
Pyramidin kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned}A &= A_{\text{pohja}} + 4 \cdot A_{\text{sivutahko}} \\ &= 225 \text{ cm}^2 + 4 \cdot 97,427\dots \text{ cm}^2 = 614,711\dots \text{ cm}^2 \approx 610 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Pyramidin tilavuus on noin 800 cm^3 ja kokonaispinta-ala noin 610 cm^2 .

Vastaus: 800 cm^3 ja 610 cm^2

- c) Pyramidin sivutahko on tasakylkinen kolmio, jonka huippukulma on 50° . Sivutahkon korkeusjana jakaa tasakylkisen kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Merkitään kolmion korkeusjanaa kirjaimella a .

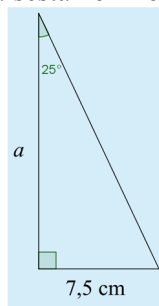


Huippukulman puolikas on $\frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$

ja pohjaneliön sivun puolikas $\frac{15 \text{ cm}}{2} = 7,5 \text{ cm}$.

Ratkaistaan sivutahkon korkeus a suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\begin{aligned} \tan 25^\circ &= \frac{7,5}{a} & \parallel \cdot a \\ a \cdot \tan 25^\circ &= 7,5 & \parallel : \tan 25^\circ \\ a &= \frac{7,5}{\tan 25^\circ} \\ a &= 16,083\dots \end{aligned}$$



Sivutahkokolmion pinta-ala on

$$A_{\text{sivutahko}} = \frac{15 \text{ cm} \cdot 16,083\dots \text{ cm}}{2} = 120,628\dots \text{ cm}^2.$$

Pyramidin pohjan pinta-ala on

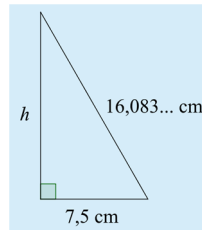
$$A_{\text{pohja}} = 15 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 225 \text{ cm}^2.$$

Pyramidin kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{pohja}} + 4 \cdot A_{\text{sivutahko}} \\ &= 225 \text{ cm}^2 + 4 \cdot 120,628\dots \text{ cm}^2 = 707,514\dots \text{ cm}^2 \approx 710 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Merkitään pyramidin korkeusjanaa kirjaimella h . Pyramidin korkeus h , pohjaneliön sivun puolikas $7,5$ cm ja sivutahkon korkeusjana a muodostavat suorakulmaisen kolmion. Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}h^2 + 7,5^2 &= 16,083\dots^2 \\h^2 &= 16,083\dots^2 - 7,5^2 \\h^2 &= 202,438\dots \\h &= (\pm)\sqrt{202,438\dots} \\h &= 14,228\dots\end{aligned}$$

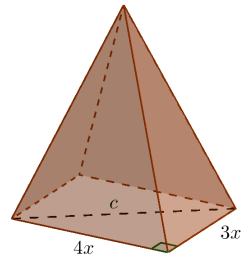


Pyramidin tilavuus on

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h \\&= \frac{1}{3} \cdot 225 \text{ cm}^2 \cdot 14,228\dots \text{ cm} = 1067,107\dots \text{ cm}^3 \approx 1100 \text{ cm}^3.\end{aligned}$$

Pyramidin tilavuus on noin 1100 cm^3 ja kokonaispinta-ala noin 710 cm^2 .

Vastaus: 1100 cm^3 ja 710 cm^2



453. Merkitään pohjan sivuja lausekkeilla $4x$ ja $3x$ ja pohjan lävistäjää kirjaimella c .

Ratkaistaan pohjan lävistäjä Pythagoraan lauseen avulla.

$$c^2 = (4x)^2 + (3x)^2$$

$$c^2 = 16x^2 + 9x^2$$

$$c^2 = 25x^2$$

$$c = (\pm) \sqrt{25x^2} \quad || x > 0$$

$$c = 5x$$

Muodostetaan yhtälö pyramidin tilavuudelle ja ratkaistaan siitä pituus x .

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h \quad || V = 270 \text{ m}^3, A_{\text{pohja}} = 4x \cdot 3x, h = 5x$$

$$270 = \frac{1}{3} \cdot 4x \cdot 3x \cdot 5x$$

$$270 = 20x^3 \quad || : 20$$

$$x^3 = 13,5$$

$$x = \sqrt[3]{13,5}$$

$$x = 2,381 \dots$$

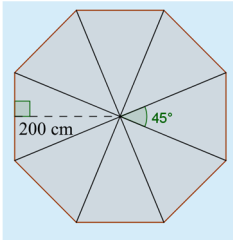
Pohjan sivut ovat siten

$$3x = 3 \cdot 2,381 \dots \text{ m} = 7,143 \dots \text{ m} \approx 7,1 \text{ m, ja}$$

$$4x = 4 \cdot 2,381 \dots \text{ m} = 9,524 \dots \text{ m} \approx 9,5 \text{ m.}$$

Vastaus: 7,1 m ja 9,5 m

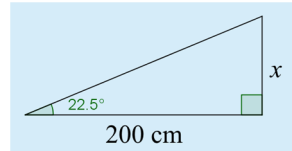
454. 8-kulmio koostuu kahdeksasta tasakylkisestä kolmiosta, joiden keskuskulma on $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. Kunkin tasakylkisen kolmion korkeus on puolet teltan vastakkaisten sivujen välisestä etäisyydestä eli $\frac{400 \text{ cm}}{2} = 200 \text{ cm}$.



- a) Tasakylkisen kolmion korkeusjana jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Kolmion huippukulman puolikas on $\frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$.

Merkitään kolmion kannan puolikasta kirjaimella x . Ratkaistaan pituus x suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 22,5^\circ &= \frac{x}{200} \\ x &= 200 \cdot \tan 22,5^\circ \\ x &= 82,842\dots\end{aligned}$$



8-kulmion sivun pituus on $2x = 2 \cdot 82,842\dots \text{ cm} = 165,685\dots \text{ cm}$.

Muutetaan pituudet metreiksi. Tasakylkisen kolmion korkeus on $200 \text{ cm} = 2 \text{ m}$ ja kanta $165,685\dots \text{ cm} = 1,656\dots \text{ m}$.

Yhden tasakylkisen kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{1,656\dots \text{ m} \cdot 2 \text{ m}}{2} = 1,656\dots \text{ m}^2.$$

Teltan pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = 8 \cdot A_{\text{kolmio}} = 8 \cdot 1,656\dots \text{ m} = 13,254\dots \text{ m}^2 \approx 13 \text{ m}^2.$$

Vastaus: 13 m^2

- b) Teltta koostuu särmiöstä ja pyramidista. Särmiön korkeus on $100\text{ cm} = 1,0\text{ m}$ ja pyramidin $190\text{ cm} - 100\text{ cm} = 90\text{ cm} = 0,9\text{ m}$.

Särmiön tilavuus on

$$V_{\text{särmiö}} = A_{\text{pohja}} \cdot h = 13,254\ldots\text{ m}^2 \cdot 1,0\text{ m} = 13,254\ldots\text{ m}^3.$$

Pyramidin tilavuus on

$$V_{\text{pyramidi}} = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 13,254\ldots\text{ m}^2 \cdot 0,9\text{ m} = 3,976\ldots\text{ m}^3.$$

Teltan kokonaistilavuus on

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{särmiö}} + V_{\text{pyramidi}} \\ &= 13,254\ldots\text{ m}^3 + 3,976\ldots\text{ m}^3 = 17,231\ldots\text{ m}^3 \approx 17\text{ m}^3. \end{aligned}$$

Vastaus: 17 m^3

- c) Särmiön vaippa koostuu kahdeksasta yhtenevästä suorakulmiosta, jonka kanta on 8-kolmion sivu 1,656... m ja korkeus 1,0 m.

Yhden suorakulmion pinta-ala on

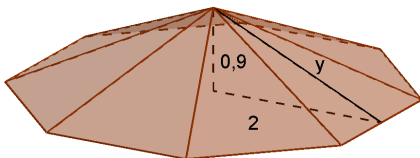
$$A_{\text{suorakulmio}} = 1,656... \text{ m} \cdot 1,0 \text{ m} = 1,656... \text{ m}^2.$$

Särmiön vaipan pinta-ala on siten

$$A_1 = 8 \cdot A_{\text{suorakulmio}} = 8 \cdot 1,656... \text{ m}^2 = 13,254... \text{ m}^2.$$

Merkitään pyramidin sivutahkokolmion korkeusjanaa kirjaimella y .

Pyramidin korkeus 0,9 m, pohjan tasakylkisen kolmion korkeus 2 m ja sivutahkon korkeus y muodostavat suorakulmaisen kolmion.



Ratkaistaan sivutahkon korkeus y Pythagoraan lauseen avulla.

$$y^2 = 0,9^2 + 2^2$$

$$y^2 = 4,81$$

$$y = (\pm)\sqrt{4,81}$$

$$y = 2,193...$$

Yhden sivutahkokolmion pinta-ala on

$$A_{\text{sivutahko}} = \frac{1,656... \text{ m} \cdot 2,193... \text{ m}}{2} = 1,816... \text{ m}^2.$$

Pyramidin vaipan pinta-ala on

$$A_2 = 8 \cdot A_{\text{sivutahko}} = 8 \cdot 1,816... \text{ m}^2 = 14,535... \text{ m}^2.$$

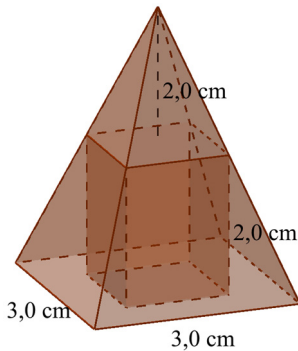
Kokonaispinta-ala on

$$A = A_1 + A_2 = 13,254... \text{ m}^2 + 14,535... \text{ m}^2 = 27,789... \text{ m}^2 \approx 28 \text{ m}^2.$$

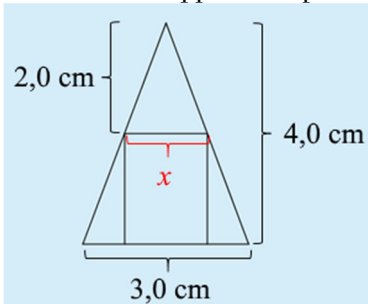
Kangasta tarvitaan noin 28 m².

Vastaus: 28 m²

455. Piirretään mallikuva.



Merkitään särmiön pohjaneliön sivun pituutta kirjaimella x . Tarkastellaan sisäkkäisten kappaleiden poikkileikkauskuviota.



Pienemmän tasakylkisen kolmion kantakulmat ja ison tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat samankohaisia kulmia, joten ne ovat yhtä suuria. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoisia kk-lauseen perusteella. Muodostetaan vastinosien suhteista verranto ja ratkaistaan siitä pohjaneliön sivun pituus x .

$$\frac{x}{3,0} = \frac{2,0}{4,0} \quad || \cdot 3,0$$
$$x = 1,5$$

Merkitään särmiön korkeutta $h_1 = 2,0$ cm. Särmiön pohjan pinta-ala on $A_1 = 1,5 \text{ cm} \cdot 1,5 \text{ cm} = 2,25 \text{ cm}^2$.

Särmiön tilavuus on

$$V_{\text{särmiö}} = A_1 \cdot h_1 = 2,25 \text{ cm}^2 \cdot 2,0 \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}^3.$$

Merkitään ison pyramidin korkeutta $h_2 = 4,0 \text{ cm}$. Ison pyramidin pohjan pinta-ala on $A_2 = 3,0 \text{ cm} \cdot 3,0 \text{ cm} = 9,0 \text{ cm}^2$.

Ison pyramidin tilavuus on

$$V_{\text{pyramidi}} = \frac{1}{3} A_2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot 9,0 \text{ cm}^2 \cdot 4,0 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^3.$$

Tyhjän tilan tilavuus on

$$V_{\text{tyhjä}} = V_{\text{pyramidi}} - V_{\text{särmiö}} = 12 \text{ cm}^3 - 4,5 \text{ cm}^3 = 7,5 \text{ cm}^3.$$

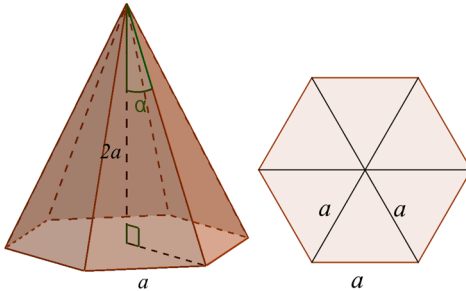
Tyhjän tilan osuus prosentteina on

$$\frac{V_{\text{tyhjä}}}{V_{\text{pyramidi}}} = \frac{7,5 \text{ cm}^3}{12 \text{ cm}^3} = 0,625 = 62,5\%.$$

Vastaus: 62,5 %

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

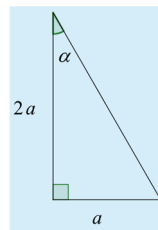
456. a) Merkitään sivusärmän ja korkeusjanan välistä kulmaa kirjaimella α .
Piirretään mallikuva pyramidista ja sen pohjasta.



Säännöllinen kuusikulmio koostuu kuudesta tasasivuisesta kolmiosta. Korkeusjana $2a$, sivusärmä ja tasasivuisen kolmion sivu a muodostavat suorakulmaisen kolmion.

Ratkaistaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

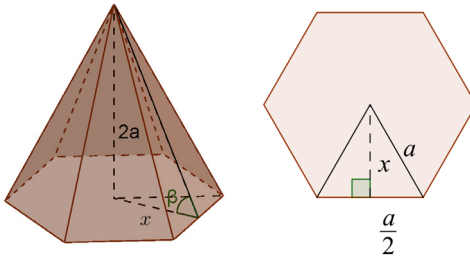
$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{a}{2a} \\ \tan \alpha &= 0,5 \\ \alpha &= 26,56\dots^\circ \\ \alpha &\approx 26,6^\circ\end{aligned}$$



Sivusärmän ja korkeusjanan välinen kulma on $26,6^\circ$.

Vastaus: $26,6^\circ$

- b) Merkitään sivutahkon ja pohjan välistä kulmaa kirjaimella β ja tasasivuisen kolmion korkeusjanaa kirjaimella x .



Ratkaistaan korkeusjanan x pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$x^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x = (\pm) \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$x = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$\parallel a > 0$$

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ratkaistaan kulma β suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

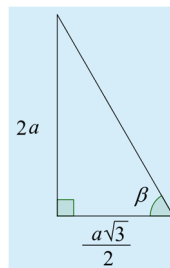
$$\tan \beta = \frac{2a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$\tan \beta = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\tan \beta = 2,309\dots$$

$$\beta = 66,586\dots^\circ$$

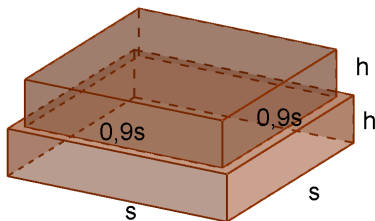
$$\beta \approx 66,6^\circ$$



Sivutahkon ja pohjan välinen kulma on $66,6^\circ$.

Vastaus: $66,6^\circ$

457. Kaikilla särmiöillä on sama korkeus. Merkitään tätä korkeutta kirjaimella h . Merkitään alimman särmiön pohjasärmää kirjaimella s . Jokaisen särmiön pohjasärmä on 10 % lyhyempi kuin edellisen särmiön pohjasärmä, joten särmiöiden pohjasärmät muodostavat geometrisen lukujonon $s, 0,9s, 0,9^2s, \dots$



Tarkastellaan särmiöiden tilavuuksia yksitellen.

Alimman särmiön tilavuus on $V_1 = s^2h$.

Toiseksi alimman särmiön tilavuus on $V_2 = (0,9s)^2 \cdot h = 0,81 \cdot s^2h$.

Kolmanneksi alimman särmiön tilavuus on $V_3 = (0,9^2s)^2h = 0,81^2 \cdot s^2h$.

Neljänneksi alimman särmiön tilavuus on

$$V_4 = (0,9^3s)^2h = (0,9^2s)^3h = 0,81^3 \cdot s^2h.$$

Havaitaan, että särmiöiden tilavuudet muodostavat geometrisen lukujonon, jossa suhdeluku q on 0,81 ja ensimmäinen jäsen s^2h .

Lukujonon n . jäsen on siten $V_n = 0,81^{n-1} \cdot s^2h$.

Ensimmäisen särmiön tilavuus $s^2h = 10\,000\text{ m}^3$, joten sadan särmiön yhteistilavuus saadaan geometrisestä summasta

$$10\,000 + 0,81 \cdot 10\,000 + 0,81^2 \cdot 10\,000 + \dots + 0,81^{100} \cdot 10\,000.$$

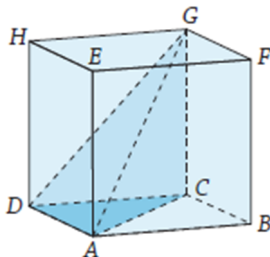
Geometrisen summan kaavalla saadaan

$$S_{100} = \frac{10\,000 \cdot (1 - 0,81^{100})}{1 - 0,81} = 52\,631,578\dots \approx 52\,600.$$

Porraspyramidin tilavuus on noin $52\,600\text{ m}^3$.

Vastaus: $52\,600\text{ m}^3$

458. Tarkastellaan ensiksi suoraa pyramidia, jonka pohja on kolmio ACD ja jonka huippu on pisteessä E .



Kuution särmä on $1,0\text{ cm}$, joten kolmion ACD pinta-ala on

$$A_{ACD} = \frac{1,0\text{ cm} \cdot 1,0\text{ cm}}{2} = 0,5\text{ cm}^2.$$

Pyramidin tilavuus on

$$V_1 = \frac{1}{3} A_{ACD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 0,5\text{ cm}^2 \cdot 1,0\text{ cm} = 0,166\dots\text{ cm}^3 \approx 0,17\text{ cm}^3.$$

Pyramidin sivutahkot ovat suorakulmaisia kolmioita. Kolmion DCG pinta-ala on puolet kuution tahkon pinta-alasta eli

$$A_{DCG} = \frac{1}{2} \cdot 1,0\text{ cm} \cdot 1,0\text{ cm} = 0,5\text{ cm}^2.$$

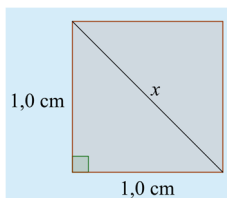
Kolmiot DAG ja ACG ovat suorakulmaisia kolmioita, joiden toinen kateetti on kuution tahkon lävistäjä ja toinen kateetti kuution särmä. Merkitään kuution tahkon lävistäjää kirjaimella x ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 1,0^2 + 1,0^2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = (\pm)\sqrt{2}$$

$$x = 1,414\dots$$



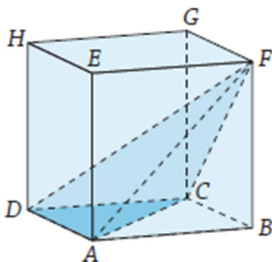
Kolmioiden DAG ja ACG pinta-ala on

$$A_{DAG} = A_{ACG} = \frac{1,0\text{ cm} \cdot 1,414\dots\text{ cm}}{2} = 0,707\dots\text{ cm}^2.$$

Pyramidin kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{ACD} + A_{DCG} + A_{DAG} + A_{ACG} \\ &= 0,5 \text{ cm}^2 + 0,5 \text{ cm}^2 + 0,707... \text{ cm}^2 + 0,707... \text{ cm}^2 \\ &= 2,414... \text{ cm}^2 \\ &\approx 2,4 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi vinoa pyramidia, jonka pohja on kolmio ACD ja jonka huippu on pisteessä I .



Kolmion ACD pinta-ala on edellä lasketun mukaan
 $A_{ACD} = 0,5 \text{ cm}^2$.

Pyramidin tilavuus on

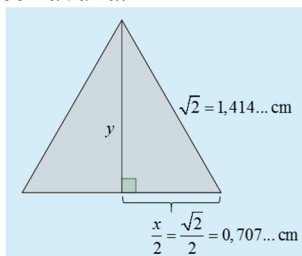
$$V_2 = \frac{1}{3} A_{ACD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 0,5 \text{ cm}^2 \cdot 1,0 \text{ cm} = 0,166... \text{ cm}^3 \approx 0,17 \text{ cm}^3.$$

Kolmiot DAF ja DCF ovat suorakulmaisia kolmioita, joiden toinen kateetti on kuution tahkon lävistäjä ja toinen kateetti kuution särmä. Edellä lasketun mukaan

$$A_{DAF} = A_{DCF} = A_{DAG} = A_{ACG} = 0,707... \text{ cm}^2.$$

Kolmio ACF on tasasivuinen kolmio, jonka sivut ovat kuution tahkon lävistäjiä. Merkitään kolmion ACF korkeusjanaa y . Ratkaistaan se suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} y^2 + 0,707...^2 &= 1,414...^2 \\ y^2 &= 1,5 \\ y &= (\pm) \sqrt{1,5} \\ y &= 1,224... \end{aligned}$$



Kolmion ACF pinta-ala on

$$A_{ACF} = \frac{1,414... \text{ cm} \cdot 1,224... \text{ cm}}{2} = 0,866... \text{ cm}^2.$$

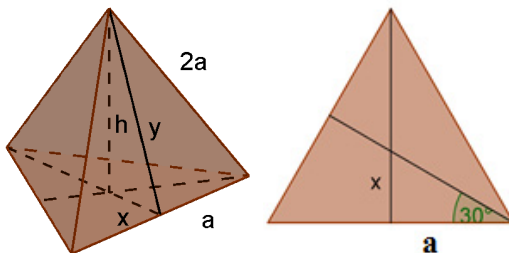
Pyramidin kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned} A_2 &= A_{ACD} + A_{DAF} + A_{DCF} + A_{ACF} \\ &= 0,5 \text{ cm}^2 + 0,707... \text{ cm}^2 + 0,707... \text{ cm}^2 + 0,866... \text{ cm}^2 \\ &= 2,780... \text{ cm}^2 \\ &\approx 2,8 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Kummankin pyramidin tilavuus on noin $0,17 \text{ cm}^3$. Suoran pyramidin kokonaispinta-ala on noin $2,4 \text{ cm}^2$ ja vinon pyramidin kokonaispinta-ala noin $2,8 \text{ cm}^2$.

Vastaus: Molempien tilavuus $0,17 \text{ cm}^3$, pinta-alat ovat $2,4 \text{ cm}^2$ ja $2,8 \text{ cm}^2$.

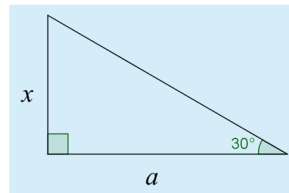
- 459.** Mehutetra on pyramidi, jonka kaikki tahkot ovat tasasivuisia kolmioita. Pyramidin korkeusjana yhdistää pyramidin huipun ja pohjan korkeusjanojen leikkauspisteen.



Merkitään pyramidin särmän puolikasta kirjaimella a , jolloin särmä on $2a$. Tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa kolmion huippukulman, joten huippukulman puolikas on $\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

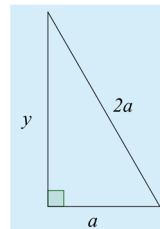
Merkitään korkeusjanojen leikkauspisteen kohtisuoraa etäisyyttä kolmion sivusta kirjaimella x . Ratkaistaan janan x pituus suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 30^\circ &= \frac{x}{a} & \parallel \cdot a \\ x &= a \cdot \tan 30^\circ \\ x &= 0,577 \dots \cdot a\end{aligned}$$



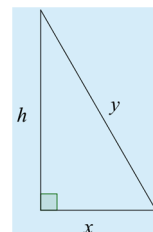
Merkitään sivutahkokolmion korkeusjanaa kirjaimella y . Kolmion korkeusjana y , särmä $2a$ ja särmän puolikas a muodostavat suorakulmaisen kolmion. Ratkaistaan sivutahkokolmion korkeus y Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}y^2 + a^2 &= (2a)^2 \\ y^2 + a^2 &= 4a^2 \\ y^2 &= 3a^2 \\ y &= (\pm) \sqrt{3a^2} & \parallel a > 0 \\ y &= a\sqrt{3} \\ y &= 1,732 \dots \cdot a\end{aligned}$$



Merkitään pyramidin korkeusjanaa kirjaimella h . Pyramidin korkeus h , jana x ja sivutahkokolmion korkeusjana y muodostavat suorakulmaisen kolmion. Ratkaistaan pyramidin korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}h^2 + x^2 &= y^2 & \parallel y = 1,732 \dots \cdot a, x = 0,577 \dots \cdot a \\ h^2 + (0,577 \dots \cdot a)^2 &= (1,732 \dots \cdot a)^2 \\ h^2 + \frac{1}{3}a^2 &= 3a^2 \\ h^2 &= \frac{8}{3}a^2 \\ h &= (\pm) \sqrt{\frac{8}{3}a^2} & \parallel a > 0 \\ h &= 1,632 \dots \cdot a\end{aligned}$$



Kolmiot ovat yhteneviä, joten pohjakolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{2a \cdot y}{2} = a \cdot y = a \cdot 1,732\dots \cdot a = 1,732\dots \cdot a^2.$$

Pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{kolmio}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1,732\dots \cdot a^2 \cdot 1,632\dots \cdot a = 0,942\dots \cdot a^3.$$

Pyramidin tilavuus on 2,00 dl = 0,2 l = 0,2 dm³. Muodostetaan yhtälö pyramidin tilavuudelle ja ratkaistaan yhtälöstä pituus a .

$$\begin{aligned} 0,942\dots \cdot a^3 &= 0,2 & || \cdot 0,942\dots \\ a^3 &= 0,212\dots \\ a &= \sqrt[3]{0,212\dots} \\ a &= 0,596\dots \end{aligned}$$

Pyramidin kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot A_{\text{kolmio}} = 4 \cdot 1,732\dots \cdot a^2 = 4 \cdot 1,732\dots \cdot (0,596\dots \text{ dm})^2 \\ &= 2,464\dots \text{ dm}^2 = 246,4\dots \text{ cm}^2 \approx 250 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Pahvia tarvitaan noin 250 cm².

Tapa II:

Tehtävän voi ratkaista myös taulukkokirjassa olevalla tetraedrin

tilavuuskaavalla $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$, jossa a = tetraedrin särmä.

Vastaus: 250 cm²

4.4 Ympyräkartio

ALOITA PERUSTEISTA

460. a) Ympyräkartion tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 17 \text{ cm}^2 \cdot 4,9 \text{ cm} = 27,766... \text{ cm}^3 \approx 28 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 28 cm^3

- b) Ympyräkartion tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 15 \text{ m}^2 \cdot 6,1 \text{ m} = 30,5 \text{ m}^3 \approx 31 \text{ m}^3.$$

Vastaus: 31 m^3

- c) Ympyräkartion pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2 = \pi \cdot (2,5 \text{ m})^2 = 19,634... \text{ m}^2.$$

Ympyräkartion tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 19,634... \text{ m}^2 \cdot 3,1 \text{ m} = 20,289... \text{ m}^3 \approx 20 \text{ m}^3.$$

Vastaus: 20 m^3

461. a) Pyramidin pohja on monikulmio, jonka kärjistä lähtevät särmät yhtyvät huipussa. Pyramideja ovat kappaleet I ja VI.

Vastaus: I ja VI

- b) Ympyräkartion pohja on ympyrä ja sillä on yksi huippu. Ympyräkartioita ovat kappaleet II ja V, mikäli jälkimmäisen kappaleen levyosaa ei huomioida.

Vastaus: II ja V

- c) Pyramidi ja ympyräkartio ovat molemmat kartioita. Siten kartioita ovat a- ja b-kohtien perusteella kappaleet I, II, V ja VI.

Vastaus: I, II, V ja VI

462. Kappale A on ympyräkartio, joten sen vaippa on tasoon levytettynä ympyräsektori. Oikea vaihtoehto on IV.

Kappale B on särmiö, joten sen vaippa on tasoon levitettynä suorakulmio. Oikea vaihtoehto on joko I tai II. Koska tiedetään vain särmiön kahden sivun pituudet, suorakulmion kantaa ei voida laskea näillä tiedoilla.

Kappale D on suora ympyrälieriö, jonka vaippa on tasoon levitettynä suorakulmio. Suorakulmion kanta on sama kuin pohjaympyrän piiri eli $2\pi r = 2\pi \cdot \frac{6 \text{ cm}}{2} = 18,849 \dots \text{ cm} \approx 19 \text{ cm}$. Oikea vaihtoehto on I. Siten kappaleen B tasoon levitetty vaippa on vaihtoehto II.

Kappale C on suora pyramidi, joten sen tasoon levitetty vaippa muodostuu kolmioista. Oikea vaihtoehto on siten III.

Vastaus: A: IV, B: II, C: III ja D: I

463. a) Ympyräkartion vaipan pinta-ala

$$A_{\text{vaippa}} = \pi r s = \pi \cdot 3,0 \text{ cm} \cdot 18,0 \text{ cm} = 169,646 \dots \text{ cm}^2 \approx 170 \text{ cm}^2.$$

Vastaus: 170 cm^2

b) Pohjaympyrän säde on $r = \frac{80,0 \text{ cm}}{2} = 40,0 \text{ cm}.$

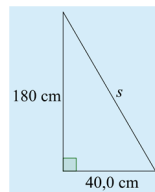
Merkitään ympyräkartion sivujanaa kirjaimella s . Korkeus 180 cm , pohjaympyrän säde $40,0 \text{ cm}$ ja sivujana s muodostavat suorakulmaisen kolmion. Ratkaistaan s Pythagoraan lauseen avulla.

$$s^2 = 40,0^2 + 180^2$$

$$s^2 = 34\,000$$

$$s = (\pm)\sqrt{34\,000}$$

$$s = 184,390 \dots$$



Ympyräkartion vaipan pinta-ala

$$A_{\text{vaippa}} = \pi r s = \pi \cdot 40,0 \text{ cm} \cdot 184,390 \dots \text{ cm} = 23\,171,24 \dots \text{ cm}^2 \\ \approx 23\,000 \text{ cm}^2 = 2,3 \text{ m}^2.$$

Vastaus: $2,3 \text{ m}^2$

c) Merkitään pohjaympyrän sädettä kirjaimella r . Ratkaistaan säde r suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\cos 56^\circ = \frac{r}{22,0}$$

$$\parallel \cdot 22,0$$

$$r = 22,0 \cdot \cos 56^\circ$$

$$r = 12,302 \dots$$



Ympyräkartion vaipan pinta-ala

$$A_{\text{vaippa}} = \pi r s = \pi \cdot 12,302 \dots \text{ mm} \cdot 22,0 \text{ mm} \\ = 850,270 \dots \text{ mm}^2 \approx 850 \text{ mm}^2.$$

Vastaus: 850 mm^2

464. a) Suuaukon säde on $r = \frac{4,0 \text{ cm}}{2} = 2,0 \text{ cm}$.

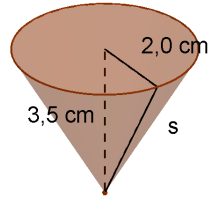
Suppilon suuaukon eli ympyräkartion pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2 = \pi \cdot (2,0 \text{ cm})^2 = 12,566 \dots \text{ cm}^2.$$

Suppilon tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12,566 \dots \text{ cm}^2 \cdot 3,5 \text{ cm} = 14,660 \dots \text{ cm}^3 \approx 15 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 15 cm^3



- b) Kysytty matka on ympyräkartion sivujanen pituus. Merkitään sivujanaa kirjaimella s . Ratkaistaan se suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

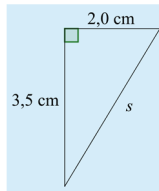
$$s^2 = 3,5^2 + 2,0^2$$

$$s^2 = 16,25$$

$$s = (\pm) \sqrt{16,25}$$

$$s = 4,031 \dots$$

$$s \approx 4,0$$

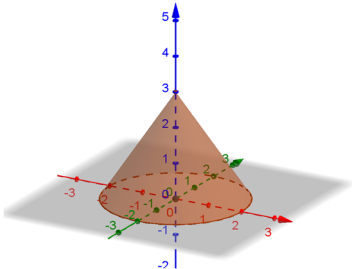


Suppilon reunalta sen pohjalle on noin 4,0 cm

Vastaus: 4,0 cm

VAHVISTA OSAAMISTA

465. Videossa <https://vimeo.com/182671086/9fc9a85d8f> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.



- a) Ohjelman pinta-ala-työkalulla saadaan pohjan pinta-alaksi noin 12,57.

Vastaus: 12,57

- b) Luetaan vaipan pinta-ala algebraikkunasta. Vaipan pinta-ala on noin 22,65.

Vastaus: 22,65

- c) Ohjelman tilavuus-työkalulla saadaan kartion tilavuudeksi noin 12,57.

Vastaus: 12,57

466. Lieriöllä on kaksi yhtenevää ja yhdensuuntaista pohjaa. Kartiolla on yksi pohja ja huippu. Muussa tapauksessa kappale on muu avaruuskappale.

- a) Lieriöitä ovat kappaleet II, III ja IV.

Vastaus: II, III ja IV

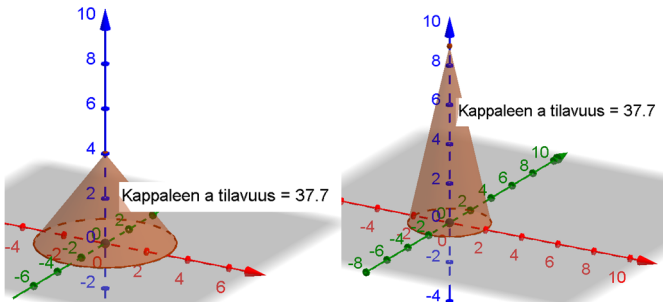
- b) Kappale VI on likimain kartio, mikäli nekkupaperin rusettia ei huomioida. Kappale V ei ole kartio, koska leveä hyrräosa koostuu kartion lisäksi myös lieriöstä.

Vastaus: VI

- c) Muita avaruuskappaleita ovat siten I ja V.

Vastaus: I ja V

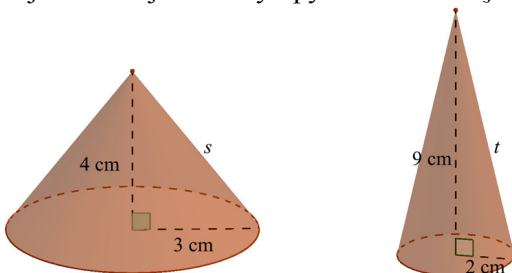
467. a) Videossa <https://vimeo.com/182671557/732cbfbb2b> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.



On totta, että ympyräkartioiden tilavuudet ovat yhtä suuret.

Vastaus: ovat

- b) Vaippojen laskemista varten tarvitaan ympyräkartioiden sivujanojen pituudet. Merkitään ympyräkartion, jonka korkeus on 4 cm, sivujanaa kirjaimella s ja toisen ympyräkartion sivujanaa kirjaimella t .



Ratkaistaan ne suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$s^2 = 3^2 + 4^2$$

$$s^2 = 25$$

$$s = (\pm)\sqrt{25}$$

$$s = 5$$

$$t^2 = 2^2 + 9^2$$

$$t^2 = 85$$

$$t = (\pm)\sqrt{85}$$

$$t = 9,219\dots$$

Vaippojen pinta-alat ovat:

$$A_1 = \pi \cdot 3 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 47,123\dots \text{ cm}^2 \approx 47 \text{ cm}^2$$

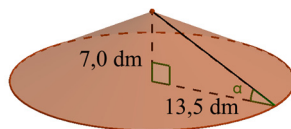
$$A_2 = \pi \cdot 2 \text{ cm} \cdot 9,219\dots \text{ cm} = 57,928\dots \text{ cm}^2 \approx 58 \text{ cm}^2$$

Vastaus: 47 cm^2 ja 58 cm^2

468. a) Merkitään sivujanan ja ympyrän säteen välistä kulmaa kirjaimella α .

Pohjaympyrän säde on

$$r = \frac{27 \text{ dm}}{2} = 13,5 \text{ dm}.$$



Ratkaistaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{7,0}{13,5}$$

$$\alpha = 27,407 \dots^\circ$$

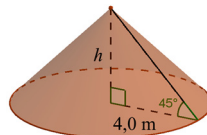
$$\alpha \approx 27^\circ$$

Sivujanen kaltevuus on noin 27° .

Vastaus: 27°

- b) Merkitään kasan korkeutta kirjaimella h .

Pohjaympyrän säde on $r = \frac{8,0 \text{ m}}{2} = 4,0 \text{ m}$.



Ratkaistaan ympyräkartion korkeus suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{4,0} \quad || \cdot 4,0$$

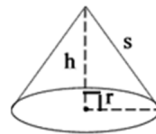
$$h = 4,0 \cdot \tan 45^\circ$$

$$h = 4,0$$

Ympyräkartion korkeus on 4,0 m.

Vastaus: 4,0 m

469. Ympyräkartion korkeus h , pohjaympyrän säde r ja sivujana s muodostavat suorakulmaisen kolmion. Ne toteuttavat Pythagoraan lauseen $s^2 = r^2 + h^2$.



Taulukon ensimmäinen rivi:

Muodostetaan yhtälö vaipan pinta-alalle ja takaistaan siitä pohjaympyrän säde r .

$$\begin{array}{ll} \pi r s = 180\pi & \parallel : \pi \\ r s = 180 & \parallel s = 15 \\ r \cdot 15 = 180 & \parallel : 15 \\ r = 12 \end{array}$$

Ratkaistaan ympyräkartion korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} h^2 + 12^2 &= 15^2 \\ h^2 &= 15^2 - 12^2 \\ h^2 &= 81 \\ h &= (\pm)\sqrt{81} \\ h &= 9 \end{aligned}$$

Pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi.$$

Ympyräkartion tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 144\pi \cdot 9 = 432\pi.$$

Toinen rivi:

Muodostetaan yhtälö ympyräkartion tilavuudelle ja ratkaistaan siitä ympyräkartion korkeus h .

$$\begin{array}{ll} V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h & \parallel V = 600\pi, r = 15 \\ 600\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot h & \parallel \cdot 3 \\ 1800\pi = 225\pi \cdot h & \parallel : 225\pi \\ h = 8 \end{array}$$

Ratkaistaan sivujana s suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$s^2 = r^2 + h^2$$

$$s^2 = 15^2 + 8^2$$

$$s^2 = 289$$

$$s = (\pm)\sqrt{289}$$

$$s = 17$$

Vaipan pinta-ala on

$$A_{\text{vaippa}} = \pi r s = \pi \cdot 15 \cdot 17 = 255\pi.$$

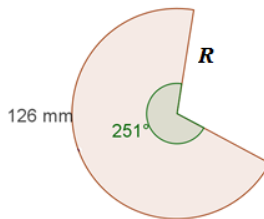
Pohjan pinta-ala on

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi.$$

Vastaus:

Säde r	Korkeus h	Sivujana s	Vaipan pinta-ala	Pohjan pinta-ala	Tilavuus
12	9	15	180π	144π	432π
15	8	17	255π	225π	600π

470. Merkitään sektorin sädettä kirjaimella R .



Muodostetaan yhtälö kaaren pituudelle ja ratkaistaan siitä sektorin säde R .

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R \quad || b = 126 \text{ mm}, \alpha = 251^\circ$$

$$126 \text{ mm} = \frac{251^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi R$$

$$126 \text{ mm} = 4,380... \cdot R \quad || : 4,380...$$

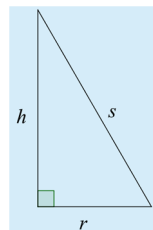
$$R = 28,762... \text{ mm}$$

Sektorin kaaren pituus on sama kuin ympyräkartion pohjaympyrän kehän pituus. Merkitään pohjaympyrän sädettä kirjaimella r . Muodostetaan yhtälö pohjaympyrän kehän pituudelle ja ratkaistaan siitä säde r .

$$2\pi r = 126 \quad || : 2\pi$$

$$r = 20,053...$$

Ympyräkartion sivujana s on sama kuin sektorin säde R . Ympyräkartion sivujana s , korkeus h ja pohjaympyrä säde r muodostavat suorakulmaisen kolmion. Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.



$$h^2 + r^2 = s^2 \quad || s = 28,762... \text{ mm}, r = 20,053... \text{ mm}$$

$$h^2 + 20,053...^2 = 28,762...^2$$

$$h^2 = 425,110...$$

$$h = (\pm)\sqrt{425,110...}$$

$$h = 20,618...$$

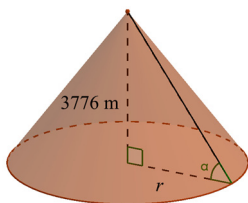
Ympyräkartion tilavuus on

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (20,053... \text{ mm})^2 \cdot 20,618... \text{ mm}$$

$$= 8682,819... \text{ mm}^3 \approx 8680 \text{ mm}^3 = 8,68 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: $8,68 \text{ cm}^3$

471. Fuji-vuori on likimain ympyräkartion muotoinen. Merkitään ympyräkartion pohjaympyrän sädettä kirjaimella h sekä sivujanan ja säteen välistä kulmaa kirjaimella α .



Muutetaan korkeus kilometreiksi: $3776 \text{ m} = 3,776 \text{ km}$.

Muodostetaan yhtälö ympyräkartion tilavuudelle ja ratkaistaan siitä pohjaympyrän säde r .

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \qquad \parallel V = 1400 \text{ km}^3, h = 3,776 \text{ km}$$

$$1400 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 3,776$$

$$1400 = 3,954... \cdot r^2 \qquad \parallel : 3,954...$$

$$r^2 = 354,052...$$

$$r = (\pm) \sqrt{354,052...}$$

$$r = 18,816...$$

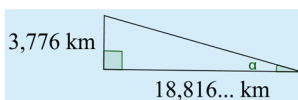
Lasketaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{3,776}{18,816...}$$

$$\tan \alpha = 0,200...$$

$$\alpha = 11,347...^\circ$$

$$\alpha \approx 11^\circ$$

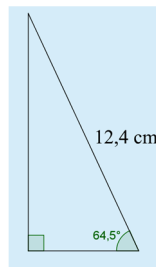


Vuoren rinteiden kaltevuus on noin 11° .

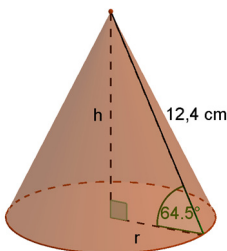
Vastaus: 11°

472. Selvitetään ensin kumpi kateeteista on pidempi. Terävien kulmien summa on 90° , joten toisen terävän kulman suuruus on $90^\circ - 64,5^\circ = 25,5^\circ$.

Koska suurempaa kulmaa vastaava kateetti on suurempi, kolmio pyörii $64,5^\circ$:n kulmaa vastaavan kateetin ympäri.



Ympyräkartion korkeus h , sivujana s ja pohjaympyrän säde r muodostavat suorakulmaisen kolmion.



Ratkaistaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\sin 64,5^\circ = \frac{h}{12,4} \quad || \cdot 12,4$$

$$h = 12,4 \cdot \sin 64,5^\circ$$

$$h = 11,192\dots$$

Ratkaistaan säde r Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + r^2 = s^2 \quad || h = 11,192\dots, s = 12,4$$

$$11,192\dots^2 + r^2 = 12,4^2$$

$$r^2 = 28,497\dots$$

$$r = (\pm)\sqrt{28,497\dots}$$

$$r = 5,338\dots$$

Ympyräkartion vaipan pinta-ala on

$$A_{\text{vaippa}} = \pi r s = \pi \cdot 5,338\dots \text{ cm} \cdot 12,4 \text{ cm} = 207,958\dots \text{ cm}^2 \approx 208 \text{ cm}^2.$$

Ympyräkartion tilavuus on

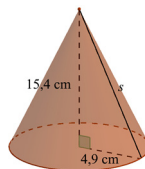
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (5,338 \dots \text{ cm})^2 \cdot 11,192 \dots \text{ cm} \\ = 334,003 \dots \text{ cm}^3 \approx 334 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 334 cm^3 ja 208 cm^2

473. a) Ympyräkartion korkeus h , sivujana s ja pohjaympyrän säde r muodostavat suorakulmaisen kolmion.

Ratkaistaan sivujana s pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$s^2 = h^2 + r^2 \\ s^2 = 15,4^2 + 4,9^2 \\ s^2 = 261,17 \\ s = (\pm) \sqrt{261,17} \\ s = 16,160 \dots$$



Sektorin pinta-ala on yhtä suuri kuin ympyräkartion vaipan ala.

$$A_{\text{sektori}} = \pi r s = \pi \cdot 4,9 \text{ cm} \cdot 16,160 \dots \text{ cm} = 248,775 \dots \text{ cm}^2 \approx 250 \text{ cm}^2.$$

Vastaus: 250 cm^2

- b) Sektorin säde R on sama kuin ympyräkartion sivujana.

$$R = s = 16,160 \dots \text{ cm} \approx 16 \text{ cm}.$$

Vastaus: 16 cm

- c) Merkitään sektorin keskuskulmaa kirjaimella α . Sektorin kaaren pituus on yhtä suuri kuin ympyräkartion pohjaympyrän kehän pituus.

Muodostetaan yhtälö kaaren pituudelle ja ratkaistaan siitä kulma α .

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R = 2\pi r \quad || : 2\pi$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot R = r \quad || R = 16,160\dots \text{ cm}, r = 4,9 \text{ cm}$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 16,160\dots = 4,9 \quad || : 16,160\dots$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = 0,303\dots \quad || \cdot 360^\circ$$

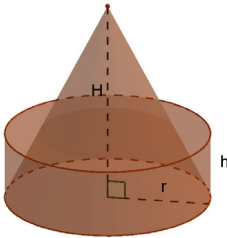
$$\alpha = 109,153\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 110^\circ$$

Sektorin keskuskulma on noin 110° .

Vastaus: 110°

474. Merkitään ympyräkartion korkeutta kirjaimella H , ympyrälieriön korkeutta kirjaimella h ja ympyräkartion ja ympyrälieriön pohjaympyrän sädettä kirjaimella r .



Ympyrälieriön tilavuus on $V_{\text{lieriö}} = \pi r^2 \cdot h$.

Ympyräkartion tilavuus on $V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H$.

Muodostetaan yhtälö kappaleiden tilavuuksille ja ratkaistaan siitä ympyräkartion korkeus H .

$$\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \pi r^2 \cdot h \quad || : \pi r^2$$

$$\frac{1}{3} \cdot H = h \quad || \cdot 3$$

$$H = 3h$$

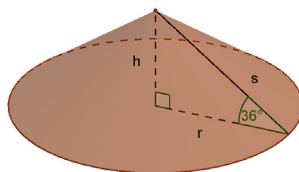
Korkeuksien suhde on $\frac{3h}{h} = 3 = 300 \%$,

joten ympyräkartion korkeus on $300 \% - 100 \% = 200 \%$ suurempi kuin ympyrälieriön korkeus.

Vastaus: 200 %

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

475. Ympyräkartion korkeus h , sivujana s ja pohjaympyrän säde r muodostavat suorakulmaisen kolmion.



Ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta säde r kosinin avulla.

$$\begin{aligned}\cos 36^\circ &= \frac{r}{s} & || \cdot s \\ r &= s \cdot \cos 36^\circ \\ r &= 0,809...s\end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ympyräkartion vaipan pinta-alalle ja ratkaistaan siitä sivujana s .

$$\begin{aligned}\pi r s &= 62 \\ \pi \cdot 0,809...s \cdot s &= 62 & ||: (\pi \cdot 0,809...) \\ s^2 &= 24,394... \\ s &= (\pm)\sqrt{24,394...} \\ s &= 4,939...\end{aligned}$$

Sijoitetaan sivujan pituus säteen lausekkeeseen ja lasketaan r .

$$r = 0,809...s = 0,809... \cdot 4,939... = 3,995...$$

Lasketaan ympyräkartion korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

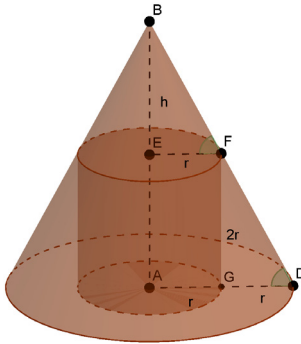
$$\begin{aligned}h^2 + r^2 &= s^2 \\ h^2 + 3,995...^2 &= 4,939...^2 \\ h &= (\pm)\sqrt{8,427...} \\ h &= 2,903...\end{aligned}$$

Ympyräkartion tilavuus on

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3,995... \text{ dm})^2 \cdot 2,903... \text{ dm} \\ &= 45,538... \text{ dm}^3 \approx 49 \text{ dm}^3.\end{aligned}$$

Vastaus: 49 dm^3

476. Piirretään mallikuva.



Kulmat GDF ja EFB ovat samankohtaisia kulmia ja kulmat BEF ja FGD ovat suoria, joten kk-lauseen perusteella kolmiot GDF ja EFB ovat yhtenevät. Koska kolmioiden vastinsivut EF ja GD ovat yhtä pitkät, kolmiot GDF ja EFB ovat yhtenevät.

Yhtenevyydestä seuraa, että ympyrälieriön yläpuolella olevan ympyräkartion korkeus h on $2r$. Tällöin ison ympyräkartion korkeus on $2r + 2r = 4r$.

Ison ympyräkartion tilavuus

$$V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2r)^2 \cdot 4r = \frac{16}{3} \pi r^3.$$

Ympyrälieriön tilavuus on

$$V_{\text{lieriö}} = A_{\text{pohja}} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3.$$

Tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_{\text{lieriö}}}{V_{\text{kartio}}} = \frac{2\pi r^3}{\frac{16}{3} \pi r^3} = 0,375 = 37,5 \, \%.$$

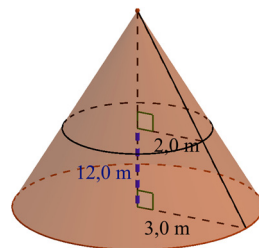
Ympyrälieriön tilavuus on 37,5 % ympyräkartion tilavuudesta.

Vastaus: 37,5 %

477. Yläosan ympyrän säde on $\frac{4,0 \text{ m}}{2} = 2,0 \text{ m}$

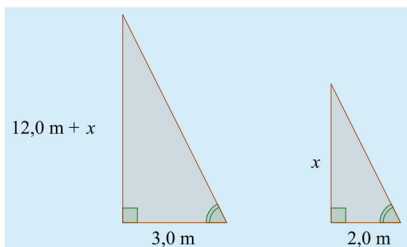
ja alaosan ympyrän säde $\frac{6,0 \text{ m}}{2} = 3,0 \text{ m}$.

Piirretään majakasta mallikuva. Täydennetään katkaistu ympyräkartio täydeksi ympyräkartioksi jatkamalla sivujanoja huippuun asti.



Majakan ulkopinta-ala eli vaipan pinta-ala saadaan ison ja pienen ympyräkartion vaippojen pinta-alojen erotuksena.

Tarkastellaan kartion sisälle muodostuvia suorakulmaisia kolmioita. Merkitään pienemmän kolmion korkeutta kirjaimella x . Tällöin isomman kolmion korkeus on $12,0 + x$.



Molemmissa kolmioissa on suorakulma. Lisäksi säteen ja sivujanan väliset kulmat ovat samankohaisia kulmia, joten kk-lauseen perusteella kolmiot ovat yhdenmuotoisia.

Muodostetaan vastinosien suhteista verranto ja ratkaistaan siitä pienen kolmion korkeus x .

$$\begin{aligned}\frac{x}{x + 12,0} &= \frac{2,0}{3,0} \\ 3x &= 2(x + 12) \\ 3x &= 2x + 24 \\ x &= 24\end{aligned}$$

Ison ympyräkartion korkeus on siis $12\text{ m} + 24\text{ m} = 36\text{ m}$.

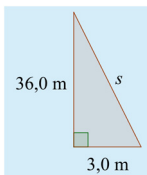
Ratkaistaan kartioiden sivujanojen pituudet ja vaipan pinta-alat. Merkitään ison ympyräkartion sivujanaa kirjaimella s . Ratkaistaan se isosta suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$s^2 = 36,0^2 + 3,0^2$$

$$s^2 = 1305$$

$$s = (\pm)\sqrt{1305}$$

$$s = 36,124\dots$$



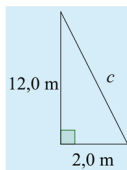
Merkitään pienen ympyräkartion sivujanaa kirjaimella c ja ratkaistaan se pienestä suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$c^2 = 24,0^2 + 2,0^2$$

$$c^2 = 580$$

$$c = (\pm)\sqrt{580}$$

$$c = 24,083\dots$$



Ison ympyräkartion vaipan pinta-ala on

$$A_{\text{iso}} = \pi \cdot 3,0\text{ m} \cdot 36,124\dots\text{ m} = 340,468\dots\text{ m}^2 \approx 340\text{ m}^2.$$

Pienen ympyräkartion vaipan pinta-ala on

$$A_{\text{pieni}} = \pi \cdot 2,0\text{ m} \cdot 24,083\dots\text{ m} = 151,319\dots\text{ m}^2 \approx 151\text{ m}^2.$$

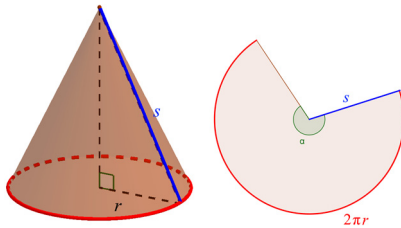
Vaippojen pinta-alojen erotus on

$$A_{\text{iso}} - A_{\text{pieni}} = 340,468\dots\text{ m}^2 - 151,319\dots\text{ m}^2 \approx 190\text{ m}^2.$$

Majakan ulkopinta-ala on noin 190 m^2 .

Vastaus: 190 m^2

478. Kun suoran ympyräkartion vaippa levitetään tasoon, saadaan sektori, jonka säde on ympyräkartion sivujana s ja kaaren pituus kartion pohjaympyrän kehän pituus.



Muodostetaan yhtälö sektorin kaaren pituudelle ja ratkaistaan siitä sektorin keskuskulman α ja täysi kulman suhde.

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot s = 2\pi r \quad ||: (2\pi s)$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{\pi} \cdot r}{\cancel{2} \cdot \cancel{\pi} \cdot s}$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r}{s}$$

Ympyräkartion vaipan pinta-ala on yhtä suuri kuin sektorin pinta-ala. Sijoitetaan edellä saatu suhde sektorin pinta-alan kaavaan ja sievennetään lauseke.

$$A_{\text{vaippa}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot s^2 = \frac{r}{s} \cdot \pi \cdot s^2 = \frac{r \cdot \pi \cdot s^{\cancel{2}}}{\cancel{s}} = \pi r s$$

479. Muutetaan pohjaympyröiden säteet yksikköön millimetri.

$$6,6 \text{ cm} = 66 \text{ mm ja } 2,2 \text{ cm} = 22 \text{ mm}$$

Sadepisarat tulevat suppiloon ympyrälieriön muotoista tilaa pitkin. Lasketaan suppiloon kertyvän veden määrä, kun vesilieriön korkeus on 1 mm.

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = \pi \cdot (66 \text{ m})^2 \cdot 1 \text{ mm} = 13\,684,777\dots \text{ mm}^3$$

Vesimäärä asettuu suppilon pohjalle ympyrälieriön muotoon. Jakoviivojen välinen etäisyys on tämän lieriön korkeus. Merkitään lieriön korkeutta kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö lieriöön kertyvälle vesimäärälle ja ratkaistaan siitä etäisyys x .

$$\begin{aligned} \pi \cdot 22^2 \cdot x &= 13\,684,777\dots & || : (\pi \cdot 22^2) \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Jakoviivojen väli on 9 mm.

Vastaus: 9 mm

4.5 Pallo

ALOITA PERUSTEISTA

480. a) Pallon pinta-ala

$$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (9,8 \text{ cm})^2 = 1206,874\dots \text{ cm}^2 \approx 1200 \text{ cm}^2.$$

Vastaus: 1200 cm²

b) Pallon tilavuus on

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (9,8 \text{ cm})^3 = 3942,455\dots \text{ cm}^3 \approx 3900 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 3900 cm³

- 481.** a) Muodostetaan yhtälö pallon ympärysmitalle ja ratkaistaan siitä halkaisija d .

$$\begin{aligned}\pi d &= 75,0 & || : \pi \\ d &= 23,873\dots \\ d &\approx 23,9\end{aligned}$$

Koripallon halkaisija on noin 23,9 cm.

Vastaus: 23,9 cm

- b) Koripallon säde on $r = \frac{d}{2} = \frac{23,873\dots \text{ cm}}{2} = 11,936\dots \text{ cm}$.

Koripallon tilavuus on

$$\begin{aligned}V &= \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (11,936\dots \text{ cm})^3 \\ &= 7124,145\dots \text{ cm}^3 \approx 7120 \text{ cm}^3 = 7,12 \text{ dm}^3 = 7,12 \text{ l}.\end{aligned}$$

Vastaus: 7,12 litraa

- 482.** Muutetaan tilavuudet kuutiosenttimetreiksi.

$$\text{I } 4250 \text{ m}^3 = 4\,250\,000 \text{ cm}^3$$

$$\text{II } 220 \text{ l} = 220 \text{ dm}^3 = 220\,000 \text{ cm}^3$$

$$\text{III } 195 \text{ ml} = 195 \text{ cm}^3$$

$$\text{IV } 28\,700 \text{ mm}^3 = 28,7 \text{ cm}^3$$

$$\text{V } 5800 \text{ cm}^3$$

Yhdistetään parit järjestämällä esineet ja tilavuudet suuruusjärjestykseen.

$$\text{C pingispallo} \quad \text{IV } 28,7 \text{ cm}^3$$

$$\text{A sählypallo} \quad \text{III } 195 \text{ cm}^3$$

$$\text{B jalkapallo} \quad \text{V } 5800 \text{ cm}^3$$

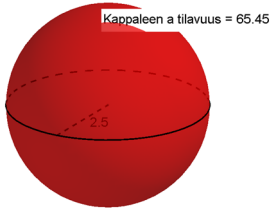
$$\text{D jumppapallo} \quad \text{II } 220\,000 \text{ cm}^3$$

$$\text{E kuumailmapallo} \quad \text{I } 4\,250\,000 \text{ cm}^3$$

Vastaus: A: III, B: V, C: IV, D: II ja E: I

483. Jäätelöpallon säde on $r = \frac{5,0 \text{ cm}}{2} = 2,5 \text{ cm}$.

Videossa <https://vimeo.com/182671736/d707d79e00> näytetään, miten pallon tilavuus voidaan määrittää sopivalla ohjelmalla.



Pallon tilavuus on noin 65 cm^3 .
Litra jäätelöä on $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.

Jäätelöpaketista saatavien pallojen lukumäärä on

$$\frac{1000 \text{ cm}^3}{65,45 \text{ cm}^3} = 15,278... \approx 15.$$

Vastaus: 65 cm^3 , 15 palloa

484. Korun säde on

$$r = \frac{0,6 \text{ cm}}{2} = 0,3 \text{ cm}.$$

Korun tilavuus on

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0,3 \text{ cm})^3 = 0,113... \text{ cm}^3.$$

Lasketaan massa m tiheyden kaavan avulla.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \parallel \cdot V$$

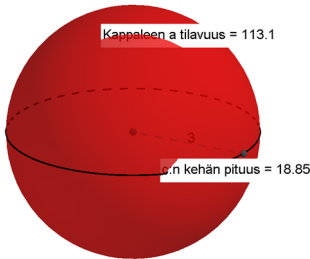
$$m = \rho \cdot V \quad \parallel \rho = 10,5 \text{ g/cm}^3, V = 0,113... \text{ cm}^3$$
$$m = 10,5 \text{ g/cm}^3 \cdot 0,113... \text{ cm}^3 = 1,187... \text{ g} \approx 1,2 \text{ g}$$

Koru painaa noin 1,2 g.

Vastaus: 1,2 g

VAHVISTA OSAAMISTA

485. Videossa <https://vimeo.com/182671911/2ed35279ae> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.



- a) Pallon tilavuus on noin 113,1.

Vastaus: 113,1

- b) Suurimman poikkileikkausympyrän säde on 3.
Isoympyrän kehän pituus on noin 18,85.

Vastaus: 18,85

486. Taulukon ensimmäinen rivi:

Ympärysmitta on

$$p = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 8 \text{ mm} = 50,265\dots \text{ mm} \approx 50 \text{ mm}.$$

Pinta-ala on

$$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (8 \text{ mm})^2 = 804,247\dots \text{ mm}^2 \approx 800 \text{ mm}^2.$$

Tilavuus on

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (8 \text{ mm})^3 = 2144,660\dots \text{ mm}^3 \approx 2000 \text{ mm}^3.$$

Toinen rivi:

Muodostetaan yhtälö pallon pinta-alalle ja ratkaistaan yhtälöstä säde r .

$$4\pi r^2 = 452 \qquad \parallel : 4\pi$$

$$r = (\pm) \sqrt{\frac{452}{4\pi}}$$

$$r = 5,997\dots$$

$$r \approx 6,00$$

Ympärysmitta on

$$p = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 5,997\dots \text{ cm} = 37,682\dots \text{ cm} \approx 37,7 \text{ cm}.$$

Tilavuus on

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (5,997\dots \text{ cm})^3 = 903,610\dots \text{ cm}^3 \approx 904 \text{ cm}^3.$$

Kolmas rivi:

Muodostetaan yhtälö pallon ympärysmitalle ja ratkaistaan siitä säde r .

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 57 & \parallel : 2\pi \\ r &= 9,071\dots \\ r &\approx 9,1 \end{aligned}$$

Pinta-ala on

$$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (9,071\dots \text{ cm})^2 = 1034,188\dots \text{ cm}^2 \approx 1000 \text{ cm}^2.$$

Tilavuus on

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (9,071\dots \text{ cm})^3 = 3127,328\dots \text{ cm}^3 \approx 3100 \text{ cm}^3.$$

Vastaus:

Säde r	Ympärysmitta p	Pinta-ala A	Tilavuus V
8 mm	50 mm	800 mm ²	2000 mm ³
6,00 cm	37,7 cm	452 cm ²	904 cm ³
9,1 cm	57 cm	1000 cm ²	3100 cm ³

487. Kupolin säde on $r = \frac{14,0 \text{ m}}{2} = 7,0 \text{ m}$.

Kupolin pinta-ala on puolet pallon pinta-alasta.

$$A = \frac{1}{2} \cdot A_{\text{pallo}} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot (7,0 \text{ m})^2 = 307,876\dots \text{ m}^2.$$

Kupolin päällystämiseen tarvittavan kullan määrä on
 $307,876\dots \text{ m}^2 \cdot 1 \text{ g/m}^2 = 307,876\dots \text{ g} \approx 308 \text{ g}$.

Vastaus: 308 g

- 488.** a) Epätosi. Montevideo sijaitsee eteläisellä pallonpuoliskolla.

Vastaus: epätosi, eteläisellä

- b) Tosi.

Vastaus: tosi

- c) Epätosi. Montevideon lyhin etäisyys päiväntasaajasta kulkee 56° :n läntisen pituuspiirin kaarta pitkin.

Vastaus: epätosi, 56° :n läntisen pituuspiirin

- d) Epätosi. 35° :n eteläinen leveyspiiri on pikkuympyrä.

Vastaus: epätosi, pikkuympyrä

- 489.** a) Etelänapa on maapallon vastakkaisella puolella pohjoisnapaan nähden, joten napojen välinen etäisyys on puolet maapallon ympärysmitasta.

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot 6370 \text{ km} = 20\,011,945\dots \text{ km} \approx 20\,000 \text{ km}$$

Pohjoisnavalta etelänavalle on noin 20 000 km.

Vastaus: 20 000 km

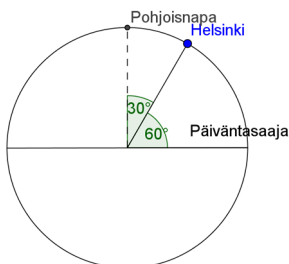
- b) Päiväntasaaja on pohjoisnavan ja etelänavan puolella välissä, joten pohjoisnavan ja päiväntasaajan välinen etäisyys on puolet napojen välisestä etäisyydestä.

$$\frac{1}{2} \cdot 20\,011,945\dots \text{ km} = 10\,005,972\dots \text{ km} \approx 10\,000 \text{ km}$$

Pohjoisnavalta päiväntasaajalle on noin 10 000 km.

Vastaus: 10 000 km

c) Piirretään poikkileikkauskuvion mallikuva.



Lasketaan Pohjoisnavan ja Helsingin välisen maapallon kaaren pituus.

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370 \text{ km} = 3335,324 \dots \text{ km} \approx 3340 \text{ km}$$

Pohjoisnavalta Helsinkiin on noin 3340 km.

Vastaus: 3340 km

490. a) Puolipallon säde pienoismallissa on $r = \frac{21,0 \text{ cm}}{2} = 10,5 \text{ cm}$.

Pienoismallin tilavuus on puolet samansäteisen pallon tilavuudesta.

$$V_{\text{malli}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (10,5 \text{ cm})^3 = 2424,524 \dots \text{ cm}^3 \approx 2400 \text{ cm}^3$$

Vastaus: 2400 cm³

- b)** Muutetaan pienoismallin osan pituus metreiksi ja pienoismallin tilavuus kuutiometreiksi.

$$1,5 \text{ cm} = 0,015 \text{ m}$$

$$2424,524 \dots \text{cm}^3 = 2,424 \dots \text{dm}^3 = 0,00242 \dots \text{m}^3$$

Merkitään kupolin tilavuutta kirjaimella x . Pienoismalli ja kupoli ovat yhdenmuotoisia, joten niiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä kupolin tilavuus x .

$$\frac{0,00242 \dots}{x} = \left(\frac{0,015}{3,00} \right)^3$$

$$\frac{0,00242 \dots}{x} = 0,00000125 \quad || \cdot x$$

$$0,00242 \dots = 0,00000125x \quad || : 0,00000125$$

$$x = 19\,396,193 \dots$$

$$x \approx 19\,000$$

Kupolin tilavuus on noin $19\,000 \text{ m}^3$.

Vastaus: $19\,000 \text{ m}^3$

- 491.** Merkitään pallon sädettä kirjaimella r . Muodostetaan yhtälö pallon ympärysmitalle ja ratkaistaan siitä säde r .

$$2\pi r = 6,5 \quad || : 2\pi$$

$$r = 1,034 \dots$$

Pallon tilavuus on

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1,034 \dots \text{cm})^3 = 4,637 \dots \text{cm}^3.$$

Lasketaan pallon massa, jos se olisi puhdasta kultaa. Massa saadaan kertomalla tilavuus tiheydellä.

$$m = \rho \cdot V = 19,3 \text{ g/cm}^3 \cdot 4,637 \dots \text{cm}^3 = 89,504 \dots \text{g}$$

Koska pallon massa on tätä arvoa pienempi, pallo ei ole puhdasta kultaa.

Vastaus: ei pidä paikkaansa

492. Merkitään maapallon sädettä kirjaimella r . Muodostetaan yhtälö maapallon ympärysmitalle ja ratkaistaan siitä säde r .

$$2\pi r = 40\,000 \quad || : 2\pi$$
$$r = 6366,197\dots$$

Maapallon pinta-ala on

$$A_{\text{maapallo}} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (6366,197\dots \text{ km})^2 = 509\,295\,817,8\dots \text{ km}^2.$$

Merien pinta-ala on 70 % maapallon pinta-alasta, joten

$$A = 0,70 \cdot A_{\text{maapallo}} = 0,70 \cdot 509\,295\,817,8\dots \text{ km}^2 = 356\,507\,072,5\dots \text{ km}^2.$$

Pinnan nousu saadaan, kun sulaneen veden tilavuus jaetaan merien pinta-alalla.

$$\frac{150 \text{ km}^3}{356\,507\,072,5\dots \text{ km}^2} = 4,207\dots \cdot 10^{-7} \text{ km} = 0,4207\dots \text{ mm} \approx 0,42 \text{ mm}$$

Valtamerien pinta nousisi noin 0,42 mm.

Vastaus: 0,42 mm

493. Neljän pallon tilavuus on

$$V_{\text{pallot}} = 4 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{16}{3} \pi r^3.$$

Ympyrälieriön pohjan säde on r ja korkeus $8r$. Ympyrälieriön tilavuus on

$$V_{\text{lieriö}} = A_{\text{pohja}} \cdot h = \pi r^2 \cdot 8r = 8\pi r^3.$$

Tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_{\text{pallot}}}{V_{\text{lieriö}}} = \frac{\frac{16}{3} \pi r^3}{8\pi r^3} = \frac{2}{3}.$$

Pallojen tilavuus on $\frac{2}{3}$ kotelon tilavuudesta.

Vastaus: $\frac{2}{3}$

494. Pallon pinta-ala on

$$A_{\text{pallo}} = 4\pi r^2.$$

Puolipallon pinta koostuu pallon pinnasta ja pohjaympyrästä.

$$A_{\text{puolipallo}} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2.$$

Kahden puolipallon pinta-ala on

$$2 \cdot A_{\text{puolipallo}} = 2 \cdot 3\pi r^2 = 6\pi r^2.$$

Lasketaan puolipallojen pinta-alan suhde pallon pinta-alaan.

$$\frac{2 \cdot A_{\text{puolipallo}}}{A_{\text{pallo}}} = \frac{6\pi r^2}{4\pi r^2} = 1,5 = 150 \%$$

Kokonaispinta-ala kasvaa $150 \% - 100 \% = 50 \%$.

Vastaus: 50 %

495. Ratkaistaan rakeen tilavuus massan ja tiheyden avulla.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad || \cdot V$$

$$\rho V = m \quad || : \rho$$

$$V = \frac{m}{\rho} \quad || m = 1 \text{ kg}, \rho = 0,917 \text{ kg/dm}^3$$

$$V = \frac{1 \text{ kg}}{0,917 \text{ kg/dm}^3} = 1,09051 \dots \text{ dm}^3 = 1090,51 \dots \text{ cm}^3$$

Merkitään rakeen sädettä kirjaimella r . Muodostetaan yhtälö pallon tilavuudelle ja ratkaistaan siitä säde r .

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = 1090,51 \dots \quad || : \frac{4}{3} \pi$$

$$r^3 = 260,340 \dots$$

$$r = \sqrt[3]{260,340 \dots}$$

$$r = 6,385 \dots$$

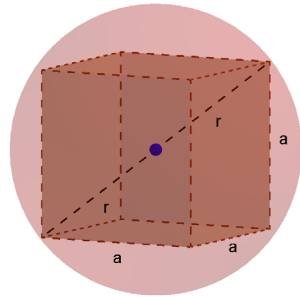
Rakeen halkaisija on

$$2r = 2 \cdot 6,385 \dots \text{ cm} = 12,770 \dots \text{ cm} \approx 13 \text{ cm}.$$

Vastaus: 13 cm

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

496. Piirretään mallikuva. Merkitään pallon sädettä kirjaimella r ja kuution särmän pituutta kirjaimella a .



Pallon halkaisija on sama kuin kuution avaruuslävistäjä. Ensin on ratkaistava pallon säde r .

Muutetaan pallon tilavuus kuutiodesimetreiksi.
 $100 \text{ l} = 100 \text{ dm}^3$

Muodostetaan yhtälö pallon tilavuudelle ja ratkaistaan siitä pallon säde r .

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = 100 \quad || : \frac{4}{3} \pi$$

$$r^3 = 23,873\dots$$

$$r = \sqrt[3]{23,873\dots}$$

$$r = 2,879\dots$$

Pallon halkaisija ja kuution avaruuslävistäjän pituus on
 $2r = 2 \cdot 2,879\dots \text{ dm} = 5,758\dots \text{ dm}$.

Muodostetaan yhtälö kuution avaruuslävistäjälle ja ratkaistaan siitä kuution särmän pituus a .

$$\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = 5,758\dots$$

$$\sqrt{3a^2} = 5,758\dots \quad || a > 0$$

$$a\sqrt{3} = 5,758\dots \quad || : \sqrt{3}$$

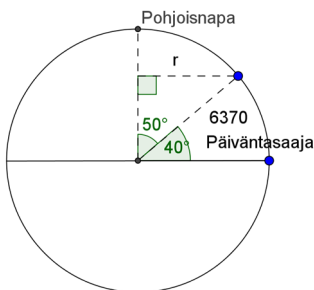
$$a = 3,324\dots$$

Kuution tilavuus on

$$V = a^3 = (3,324\dots \text{ dm})^3 = 36,755\dots \text{ dm}^3 \approx 36,8 \text{ dm}^3 = 36,8 \text{ l}$$

Vastaus: 36,8 l

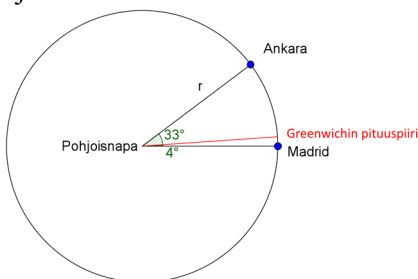
497. Madrid ja Ankara sijaitsevat samalla leveyspiirillä, joten kysytty etäisyys on leveyspiirin 40° N kaaren osa. Leveyspiiri on pikkuympyrä, joten ensiksi on ratkaistava pikkuympyrän säde. Merkitään sädettä kirjaimella r .



Ratkaistaan säde r suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\begin{aligned}\sin 50^\circ &= \frac{r}{6370} & || \cdot 6370 \\ r &= 6370 \cdot \sin 50^\circ \\ r &= 4879,703\dots\end{aligned}$$

Tarkastellaan kaupunkoja pohjoisnavan yläpuolelta. Ankaran ja Madridin rajaamaa kaarta vastaava keskuskulma on $\alpha = 33^\circ + 4^\circ = 37^\circ$.



Lasketaan kaupunkien välisen pikkuympyrän kaaren pituus.

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{37^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 4879,703\dots \text{ km} = 3151,174\dots \text{ km} \approx 3150 \text{ km}$$

Madridin ja Ankaran etäisyys 40° N:n leveyspiiriä pitkin on noin 3150 km.

Vastaus: 3150 km

498. Muodostetaan yhtälö pallosegmentin tilavuudelle ja ratkaistaan siitä pallon säde r .

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) \parallel V = 161\,000 \text{ m}^3, h = 24,0 \text{ m}$$

$$\pi \cdot 24,0^2 \left(r - \frac{24,0}{3} \right) = 161\,000$$

$$1809,557\ldots \cdot \left(r - \frac{24,0}{3} \right) = 161\,000 \quad \parallel : 1809,557\ldots$$

$$r - \frac{24}{3} = 88,972\ldots$$

$$r = 96,972\ldots$$

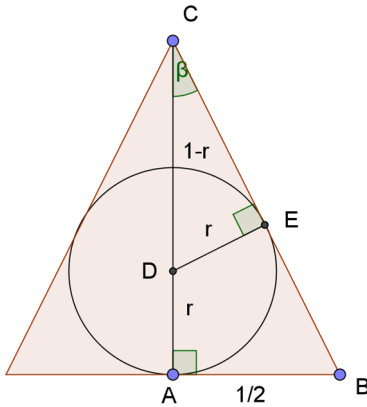
Pallosegmentin pinta-ala on

$$A = 2\pi r h = 2 \cdot \pi \cdot 96,972\ldots \text{ m} \cdot 24,0 \text{ m} = 14\,623,038\ldots \text{ m}^2 \approx 14\,600 \text{ m}^2.$$

Hallin katon pinta-ala on noin $14\,600 \text{ m}^2$.

Vastaus: $14\,600 \text{ m}^2$

499. Piirretään sisäkkäisistä kappaleista poikkileikkauskuva. Merkitään pallon sädettä kirjaimella r .



Kolmiot ABC ja EDC ovat suorakulmaisia kolmioita, joilla on yhteinen kulma β . Kolmioilla on siis kaksi yhtä suurta kulmaa, joten kk-lauseen mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Ratkaistaan kolmion ABC hypotenuusa BC Pythagoraan lauseen avulla

$$BC^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$BC = (\pm)\sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$BC = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Muodostetaan yhdenmuotoisten kolmioiden vastinosien suhteista verranto ja ratkaistaan siitä pallon säde r .

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{5}}{1-r}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}r = \frac{1}{2}(1-r) \quad || \cdot 2$$

$$\sqrt{5}r = 1-r$$

$$\sqrt{5}r + r = 1$$

$$2,236\dots r + r = 1$$

$$3,236\dots r = 1 \quad || : 2,236\dots$$

$$r = 0,309\dots$$

Pallon tilavuus on

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0,309\dots^3 = 0,123\dots$$

Ympyräkartion tilavuus on

$$V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = 0,261\dots$$

Tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_{\text{pallo}}}{V_{\text{kartio}}} = \frac{0,123\dots}{0,261\dots} = 0,472\dots \approx 47 \%$$

Pallon tilavuus on 47 % ympyräkartion tilavuudesta.

Vastaus: 47 %

ALOITUSAUKEAMAAN LIITTYVIÄ TEHTÄVIÄ

1. Pallon säde on $R = \frac{1,6 \text{ cm}}{2} = 0,8 \text{ cm}$.

Pallon tilavuus on

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot (0,8 \text{ cm})^3 = 2,680... \text{ cm}^3.$$

Ympyräkartion ja ympyrälieriön pohjaympyrän säde on

$$r = \frac{2,2 \text{ cm}}{2} = 1,1 \text{ cm}.$$

Ympyräkartion tilavuus on

$$V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h_{\text{kartio}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (1,1 \text{ cm})^2 \cdot 3,4 \text{ cm} = 4,308... \text{ cm}^3.$$

Ympyrälieriön tilavuus on

$$V_{\text{lieriö}} = \pi r^2 h_{\text{lieriö}} = \pi \cdot (1,1 \text{ cm})^2 \cdot 1,6 \text{ cm} = 6,082... \text{ cm}^3.$$

Pelinappulan tilavuus on

$$V = V_{\text{pallo}} + V_{\text{kartio}} + V_{\text{lieriö}} = 2,680... \text{ cm}^3 + 4,308... \text{ cm}^3 + 6,082... \text{ cm}^3 \\ = 13,07111... \text{ cm}^3 = 13\,071,11... \text{ mm}^3.$$

Tulostus kestää

$$\frac{13\,071,11... \text{ mm}^3}{10 \text{ mm}^3 / \text{s}} = 1307,111... \text{ s} \approx 1307 \text{ s}.$$

Muutetaan aika minuuteiksi ja sekunneiksi.

$$\frac{1307 \text{ s}}{60 \text{ s} / \text{min}} = 21,783... \text{ min}$$

$$1307 \text{ s} - 21 \cdot 60 \text{ s} = 47 \text{ s}$$

Tulostus kestää 21 min 47 s.

Vastaus: 21 min 47 s

2. Ratkaistaan massa tiheyden kaavasta.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m = \rho V$$

Muutetaan tiheys yksikköön g/cm³.

$$\rho = \frac{1 \text{ kg}}{\text{dm}^3} = \frac{1000 \text{ g}}{1000 \text{ cm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Muovinappulan massa on

$$m = 1 \text{ g/cm}^3 \cdot 13,07111 \dots \text{ cm}^3 = 13,07111 \dots \text{ g.}$$

Tulostuksen hinta on

$$13,07111 \dots \text{ g} \cdot \frac{30 \text{ €}}{750 \text{ g}} = 0,522 \dots \text{ €} \approx 0,52 \text{ €}.$$

Tulostus maksaa 0,52 €.

Vastaus: 0,52 €