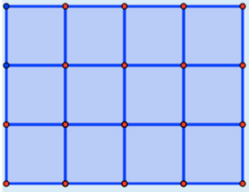


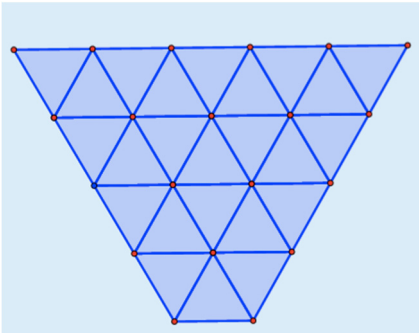
2 MONIKULMIOIDEN GEOMETRIAA

POHDITTAVAA

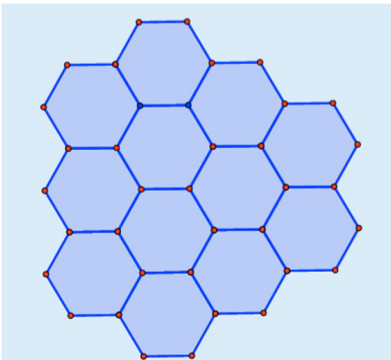
1. a) Lattia päällystetään neliöillä. Laatoitukseen syntyvä toistuva kuvio on



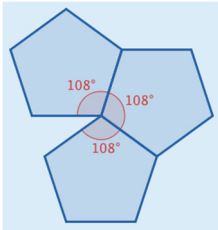
- b) Lattia päällystetään kolmioilla. Laatoitukseen syntyvä toistuva kuvio on



- c) Lattia päällystetään kuusikulmioilla. Laatoitukseen syntyvä toistuva kuvio on



2. Kun kolme viisikulmion muotoista laattaa asetetaan kärjet vastakkain, niiden kulmien summa $108^\circ + 108^\circ + 108^\circ = 324^\circ$ on pienempi kuin täysikulma 360° .



Lattiaa ei voida päällystää kuvan mukaisilla laatoilla, koska laattojen väliin jää tyhjää tilaa.

2.1 Kolmio

ALOITA PERUSTEISTA

- 201.** a) Teräväkulmaisessa kolmiossa kaikki kulmat ovat alle 90° .
Kuvissa I, III ja IV olevat kolmiot ovat likimain teräväkulmaisia.

Vastaus: I, III ja IV

- b) Tylppäkulmaisissa kolmioissa on yksi tylppä kulma.
Kuvassa VI on likimain tylppäkulmainen kolmio.

Vastaus: VI

- c) Suorakulmaisessa kolmiossa on 90° :n kulma.
Kuvissa II ja V olevat kolmiot ovat likimain suorakulmaisia.

Vastaus: II ja V

- d) Tasakylkisessä kolmiossa on ainakin kaksi yhtä pitkää sivua.
Kuvissa I, III, IV, V ja VI olevat kolmiot ovat likimain tasakylkisiä.

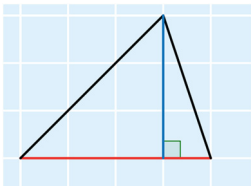
Vastaus: I, III, IV, V ja VI

- e) Tasasivuisen kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkät.
Kuvissa I ja III olevat kolmiot ovat likimain tasasivuisia.

Vastaus: I ja III

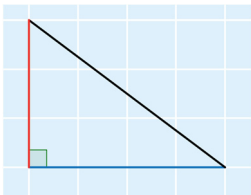
- 202.** Kolmion korkeusjana piirretään kannan vastaisesta kärjestä ja se on kohtisuorassa kantaa vastaan.

a)



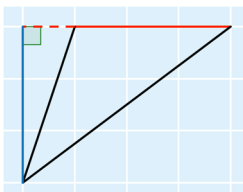
Kolmion korkeus on 3.

b)



Kolmion korkeus on 4.

c)



Kolmion korkeus on 3.

- 203.** a) Kolmion piiri on sivujen pituuksien summa.
 $p = 4,0 \text{ m} + 3,2 \text{ m} + 4,2 \text{ m} = 11,4 \text{ m} \approx 11 \text{ m}$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{4,0 \text{ m} \cdot 3,0 \text{ m}}{2} = \frac{12 \text{ m}^2}{2} = 6,0 \text{ m}^2$$

Vastaus: 11 m ja 6,0 m²

- b) Piiri on $p = 3,0 \text{ mm} + 4,5 \text{ mm} + 3,4 \text{ mm} = 10,9 \text{ mm} \approx 11 \text{ mm}$.

$$\text{Pinta-ala on } A = \frac{3,0 \text{ mm} \cdot 3,4 \text{ mm}}{2} = \frac{10,2 \text{ mm}^2}{2} = 5,1 \text{ mm}^2$$

Vastaus: 11 mm ja 5,1 mm²

- c) Piiri on $p = 3,2 \text{ cm} + 6,2 \text{ cm} + 4,4 \text{ cm} = 13,8 \text{ cm} \approx 14 \text{ cm}$.

$$\text{Pinta-ala on } A = \frac{3,2 \text{ cm} \cdot 4,1 \text{ cm}}{2} = \frac{13,12 \text{ cm}^2}{2} = 6,56 \text{ cm}^2 \approx 6,6 \text{ cm}^2$$

Vastaus: 14 cm ja 6,6 cm²

204. a) Sijoitetaan kanta $a = 8,0$ cm ja pinta-ala $A = 22$ cm² kolmion pinta-alan laskukaavaan $A = \frac{ah}{2}$ ja ratkaistaan yhtälöstä korkeus h .

$$22 = \frac{8,0 \cdot h}{2} \quad || \cdot 2$$

$$44 = 8,0h \quad || : 8,0$$

$$h = \frac{44}{8,0} = 5,5$$

Kolmion korkeus on 5,5 cm.

Vastaus: $h = 5,5$ cm

- b) Sijoitetaan kanta $a = 6,5$ cm ja pinta-ala $A = 22$ cm² kolmion pinta-alan laskukaavaan $A = \frac{ah}{2}$ ja ratkaistaan yhtälöstä korkeus h .

$$22 = \frac{6,5 \cdot h}{2} \quad || \cdot 2$$

$$44 = 6,5h \quad || : 6,5$$

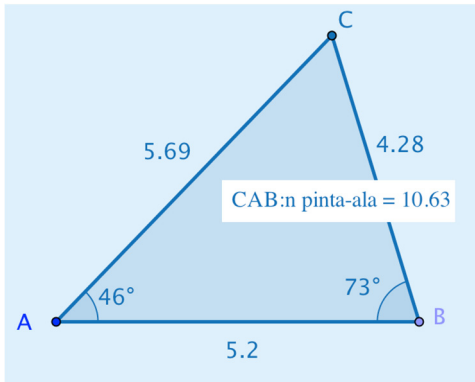
$$h = \frac{44}{6,5} = 6,769...$$

$$h \approx 6,8$$

Kolmion korkeus on noin 6,8 cm.

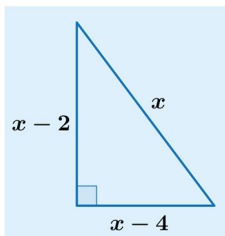
Vastaus: $h \approx 6,8$ cm

205. Videossa <https://vimeo.com/182676114/006a1fb9d4> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista appletin avulla.



- a) Kolmion muiden sivujen pituudet ovat 5,7 ja 4,3
b) Kolmion pinta-ala on 10,6.

- 206.** Merkitään kolmion pisin sivua kirjaimella x .
Tällöin toiseksi pisin sivu on $x - 2$ ja lyhin sivu on $(x - 2) - 2 = x - 4$.



- a) Terrassin aitaamiseen tarvitaan 21 m köyttä, ja terrassin 3 metrin mittainen sisääntuloaukko jätetään vapaaksi. Kolmion muotoisen terrassin piiri on siten $21 \text{ m} + 3 \text{ m} = 24 \text{ m}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x .

$$\begin{aligned}x + x - 2 + x - 4 &= 24 \\3x &= 30 && ||: 3 \\x &= 10\end{aligned}$$

Terrassin sivujen pituudet ovat 10 m,
 10 m - 2 m = 8 m ja
 10 m - 4 m = 6 m.

Vastaus: 6 m, 8 m ja 10 m

- b) Kolmio on suorakulmainen, joten sen lyhimmat sivut ovat kanta ja korkeus. Pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{6 \text{ m} \cdot 8 \text{ m}}{2} = \frac{48 \text{ m}^2}{2} = 24 \text{ m}^2$$

Terrassin pinta-ala on 24 m^2 .

Vastaus: 24 m^2

VAHVISTA OSAAMISTA

- 207.** Kolmio on tasakylkinen, joten korkeusjana jakaa huippukulman puoliksi. Huippukulman puolikas on 30° , joten huippukulma on $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

Tällöin kantakulmat ovat yhteensä $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Koska tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, ne ovat 60° .

Kolmion kaikki kulmat ovat yhtä suuret, joten kolmio on tasasivuinen.

Koska kannan puolikas on 2,5, niin kanta on yhteensä 5. Tasasivuisen kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkät, joten $x = 5$.

Vastaus: $x = 5$, $\alpha = 60^\circ$

- 208.** a) Tasasivuisen kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Tasakylkisessä kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua, joten tasasivuinen kolmion on myös tasakylkinen kolmio. Väite on tosi.

Vastaus: tosi

- b) Tasakylkisen kolmion on kyljet ovat pitkät, joten väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, kaksi

- c) Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan, joten väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, huippukulman ja kannan

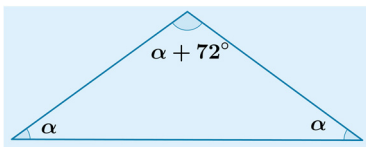
- d) Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat yhtä suuria. Koska kolmion kulmien summa on 180° , on yhden tasasivuisen kolmion kulman suuruus $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$. Väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, 60°

- e) Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat on 60° , joten ne ovat teräviä. Tasasivuinen kolmio on siis teräväkulmainen kolmio. Väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, teräväkulmainen

209. a) Merkitään kantakulman suuruutta kirjaimella α . Huippukulman suuruus on tällöin $\alpha + 72^\circ$.



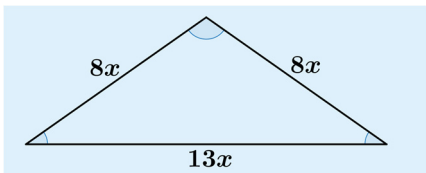
Muodostetaan yhtälö kolmion kulmien suuruuksille ja ratkaistaan siitä kantakulma α .

$$\begin{aligned}\alpha + \alpha + \alpha + 72^\circ &= 180^\circ \\ 3\alpha &= 108^\circ & ||: 3 \\ \alpha &= 36^\circ\end{aligned}$$

Kolmion kantakulmien suuruudet ovat 36° ja huippukulman suuruus on $36^\circ + 72^\circ = 108^\circ$.

Vastaus: 36° , 36° ja 108°

- b) Merkitään kolmion sivujen pituuksia $8x$, $8x$ ja $13x$. Muodostetaan yhtälö kolmion piirille ja ratkaistaan siitä tuntematon x .



$$\begin{aligned}8x + 8x + 13x &= 11,6 \\ 29x &= 11,6 & ||: 29 \\ x &= 0,4\end{aligned}$$

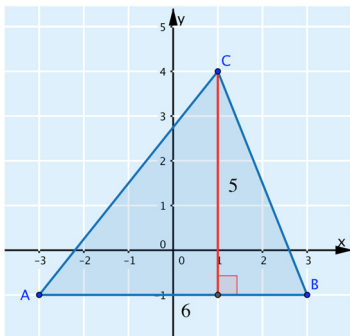
Kolmion sivujen pituudet ovat

$$8x = 8 \cdot 0,4 \text{ cm} = 3,2 \text{ cm ja}$$

$$13x = 13 \cdot 0,4 \text{ cm} = 5,2 \text{ cm .}$$

Vastaus: 3,2 cm, 3,2 cm ja 5,2 cm

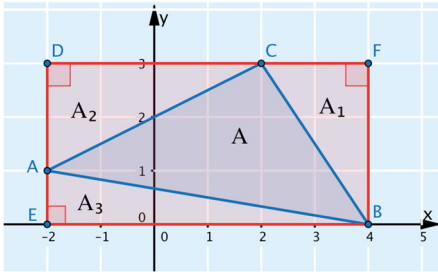
210. a) Piirretään kolmion korkeusjana. Korkeusjanan pituus $h = 5$.
Kolmion kannan pituus $a = 6$.



Kolmion pinta-ala on $A = \frac{ah}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$.

Vastaus: 15

- b) Kehystetään kolmio suorakulmiolla, joka kulkee kolmion kärkipisteiden kautta ja jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Kolmion pinta-ala A saadaan, kun suorakulmion pinta-alasta vähennetään nurkkiin jäävät suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat A_1 , A_2 ja A_3 .

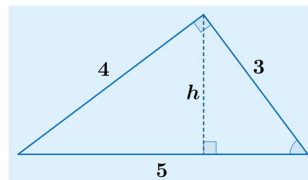


Kolmion pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{suorakulmio}} - A_1 - A_2 - A_3 \\ &= 6 \cdot 3 - \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 6}{2} \\ &= 18 - 3 - 4 - 3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Vastaus: 8

211. a) Oikeanpuoleinen kolmio ja suurin kolmio ovat yhdenmuotoiset kklauseen perusteella, koska niissä molemmissa on 90° :n kulmat ja yhteinen terävä kulma. Vastinosien pituuksien suhteista saadaan verranto, josta ratkaistaan kolmion korkeus h .



$$\begin{aligned}\frac{3}{5} &= \frac{h}{4} \\ 5h &= 12 \quad ||: 5 \\ h &= \frac{12}{5} = 2,4\end{aligned}$$

Toinen tapa:

Suurimman suorakulmaisen kolmion pinta-ala on kateettien avulla laskettuna $\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$. Pinta-ala voidaan laskea myös niin, että kannaksi valitaan 5 yksikköä pitkä sivu ja korkeudeksi h . Tällöin kolmion pinta-ala on $\frac{5 \cdot h}{2}$.

Asetetaan pinta-alat yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälöstä korkeus h .

$$\begin{aligned}\frac{5h}{2} &= 6 \quad || \cdot 2 \\ 5h &= 12 \quad ||: 5 \\ h &= \frac{12}{5} = 2,4\end{aligned}$$

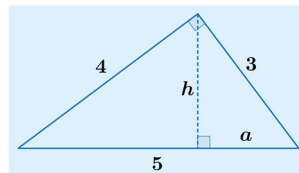
Vastaus: $\frac{12}{5} = 2,4$

- b) Merkitään oikeanpuoleisen kolmion kantaa kirjaimella a ja ratkaistaan se verrannon avulla.

$$\frac{3}{5} = \frac{a}{3}$$

$$3a = 9 \quad || : 3$$

$$a = \frac{9}{3} = 3$$



Oikeanpuoleisen kolmion pinta-ala

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{3 \cdot 12}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

Vastaus: $\frac{36}{2} = 18$

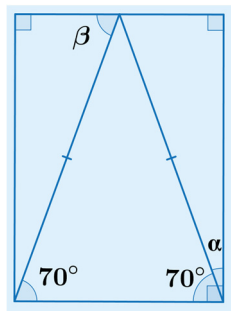
212. a) Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, joten kulman α viereinen kulma on 70° . Koska suorakulmion kaikki kulmat ovat 90° , niin kulma $\alpha = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$. Samoin vasemman puoleisen suorakulmaisen kolmion tuntematon terävä kulma on 20° .

Kulmat 20° ja β ovat suorakulmaisen kolmion terävät kulmat. Niiden summa on 90° , joten

$$20^\circ + \beta = 90^\circ$$

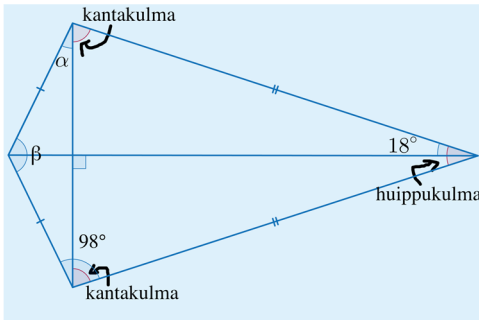
$$\beta = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

Vastaus: $\alpha = 20^\circ$ ja $\beta = 70^\circ$



- b) Oikeanpuoleisen tasakylkisen kolmion huippukulman puolikas on 18° , joten huippukulma on $2 \cdot 18^\circ = 36^\circ$. Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, joten oikeanpuoleisen kolmion

kantakulmat ovat $\frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$.

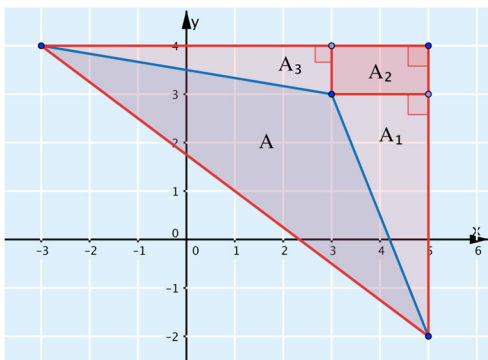


Vasemmanpuoleisen kolmion kantakulma on $\alpha = 98^\circ - 72^\circ = 26^\circ$ ja huippukulma $\beta = 180^\circ - 2 \cdot 26^\circ = 128^\circ$.

Vastaus: $\alpha = 26^\circ$ ja $\beta = 128^\circ$

213. Piirretään kartasta mallikuva. Täydennetään metsäpalsta suorakulmaiseksi kolmioksi, jonka hypotenuusa on sama kuin metsäpalstakolmion sivu.

Metsäpalstan pinta-ala A saadaan, kun ison suorakulmaisen kolmion pinta-alasta vähennetään pienten suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat A_1 ja A_3 ja suorakulmion pinta-ala A_2 .



$$\begin{aligned}
 A &= A_{\text{iso suorakulmainen kolmio}} - A_1 - A_2 - A_3 \\
 &= \frac{6 \cdot 8}{2} - \frac{2 \cdot 5}{2} - 2 \cdot 1 - \frac{6 \cdot 1}{2} \\
 &= 24 - 5 - 2 - 3 \\
 &= 14
 \end{aligned}$$

Metsäpalstan pinta-ala kartalla on 14 cm^2 .

Merkitään metsäpalstan pinta-alaa luonnossa kirjaimella x .

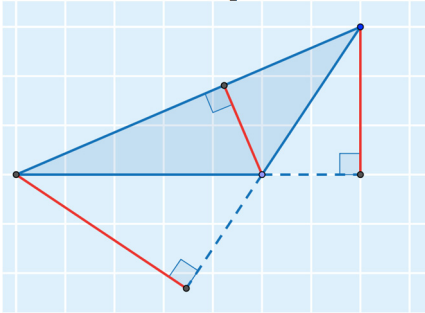
Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, joten pinta-ala x ratkaistaan yhtälöstä

$$\begin{aligned}
 \frac{14}{x} &= \left(\frac{1}{10000} \right)^2 \\
 \frac{14}{x} &= \frac{1^2}{10000^2} \\
 x &= 14 \cdot 10\,000^2 \\
 x &= 1\,400\,000\,000
 \end{aligned}$$

Metsäpalstan pinta-ala luonnossa on $1\,400\,000\,000 \text{ cm}^2 = 14 \text{ ha}$

Vastaus: kartalla 14 cm^2 , luonnossa 14 ha .

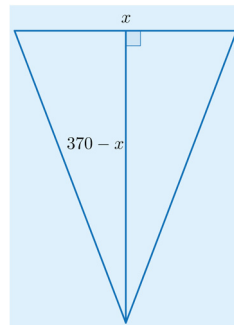
214. a) Korkeusjanat ovat kärjestä vastakkaiselle sivulle piirrettyjä janoja. Kolmioon voidaan piirtää kolme korkeusjanaa.



- b) Videossa <https://vimeo.com/182676176/f745b680b7> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

- 215.** Merkitään tukiriman vaakasuoraa pituutta eli tasakylkisen kolmion kantaa kirjaimella x .

Tällöin pystysuoran tukiriman pituus eli kolmion korkeus on $370 - x$.



Muodostetaan yhtälö kyltin pinta-alalle
 $1,68 \text{ m}^2 = 16\,800 \text{ cm}^2$ ja ratkaistaan siitä
 pituus x .

$$A = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}$$

$$16\,800 = \frac{x(370 - x)}{2} \quad || \cdot 2$$

$$33\,600 = 370x - x^2$$

$$x^2 - 370x + 33\,600 = 0 \quad || a = 1, b = -370, c = 33\,600$$

Sijoitetaan kertoimet a , b ja c toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-370) \pm \sqrt{(-370)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 33\,600}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{370 \pm \sqrt{2500}}{2}$$

$$x = \frac{370 \pm 50}{2}$$

$$x = \frac{370 + 50}{2} = 210 \quad \text{tai}$$

$$x = \frac{370 - 50}{2} = 160$$

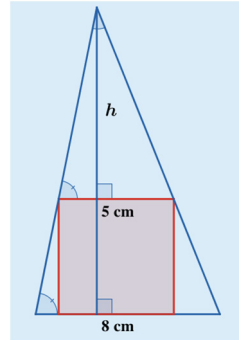
Jos vaakasuoran tukiriman pituus on 210 cm, on pystysuora tukirima
 $370 - 210 = 160 \text{ cm}$.

Jos vaakasuoran tukiriman pituus on 160 cm, on pystysuora tukirima
 $370 - 160 = 210 \text{ cm}$.

Vastaus: 160 cm ja 210 cm

- 216.** Piirretään mallikuva.
Merkitään neliön yläpuolella olevan kolmion korkeutta kirjaimella h .
Ison kolmion korkeus on tällöin $h + 5$.

Iso kolmio ja neliön yläpuolella oleva kolmio ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoiset, koska niillä on sama huippukulma ja samankohlaiset kantakulmat.



Muodostetaan vastinsivujen pituuksien suhteiden avulla verranto ja ratkaistaan siitä korkeus h .

$$\frac{5}{8} = \frac{h}{h + 5}$$

$$8h = 5(h + 5)$$

$$8h = 5h + 25$$

$$3h = 25 \quad ||: 3$$

$$h = \frac{25}{3} = 8,333...$$

Ison kolmion korkeus on $h + 5 = 8,333... + 5 = 13,333...$ cm ja pinta-ala

$$\text{on } A = \frac{8 \text{ cm} \cdot 13,333... \text{ cm}}{2} = 53,333... \text{ cm}^2 \approx 53,3 \text{ cm}^2.$$

Vastaus: $53,3 \text{ cm}^2$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

217. Kolmion sivut ovat $a = 3,6$ m, $b = 2,9$ m ja $c = 5,1$ m.

Piiri on sivujen pituuksien summa $3,6 + 2,9 + 5,1 = 11,6$ m.

Piirin puolikas $p = \frac{11,6 \text{ m}}{2} = 5,8$ m.

Lasketaan kolmion pinta-ala Heronin kaavan avulla.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{5,8 \cdot (5,8 - 3,6) \cdot (5,8 - 2,9) \cdot (5,8 - 5,1)} \\ &= \sqrt{5,8 \cdot 2,2 \cdot 2,9 \cdot 0,7} \\ &= \sqrt{25,9028} \\ &= 5,0894... \\ &\approx 5,1 \end{aligned}$$

Pinta-ala on noin $5,1 \text{ m}^2$.

Vastaus: $5,1 \text{ m}^2$

218. a) Kulman vastaisen sivun pituus on $2 + 3 = 5$.

Merkitään kulman lyhempää viereistä sivua kirjaimella x ja ratkaistaan sen pituus verrannosta.

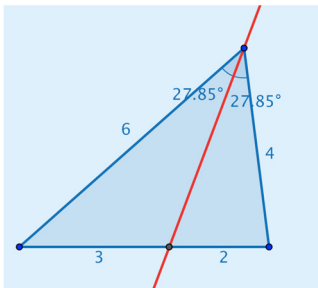
$$\frac{2}{3} = \frac{x}{6}$$

$$3x = 12 \quad || : 3$$

$$x = 4$$

Kolmion piiri on $5 + 6 + 4 = 15$.

Tarkistus:



Vastaus: 15

- b) Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma.
Ratkaistaan, kuinka pitkiin osiin kulman puolittaja jakaa kolmion sivun, jonka pituus on 10.

Merkitään lyhempää osaa kirjaimella x .

Tällöin pidempi osa on $10 - x$.

Muodostetaan verranto viereisten sivujen suhteen avulla ja ratkaistaan siitä tuntematon x .

$$\begin{aligned}\frac{x}{10-x} &= \frac{4}{7} \\ 7x &= 4 \cdot (10-x) \\ 7x &= 40 - 4x \\ 11x &= 40 & \quad ||: 11 \\ x &= \frac{40}{11} \\ x &\approx 3,636\dots\end{aligned}$$

Lyhempi osa on noin 3,64 ja pidempi osa on noin $10 - 3,64 = 6,36$

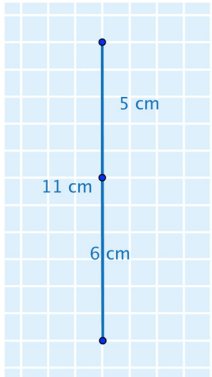
Vastaus: 3,64 ja 6,36

219.

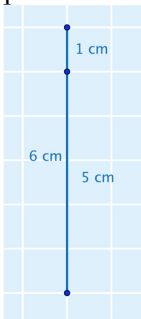


Videossa <https://vimeo.com/182676253/2dcbd45c43> havainnollistetaan kolmion kolmannen sivun pituuden tutkimista.

- a) Kolmion kolmas sivu on korkeintaan kahden muun sivun pituuksien summan mittainen. Kolmion sivun yläraja on siten
 $5 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 11 \text{ cm}$.



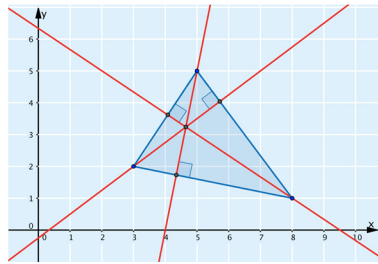
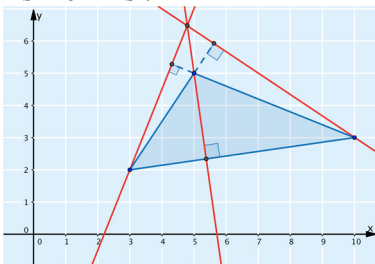
- b) Kolmion kolmas sivu on lyhimmillään silloin, kun muut sivut ovat päällekkäin. Kolmion sivun alaraja on $6 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$.



- c) Kolmion kolmannen sivun pituus on välillä $1 \text{ cm} - 11 \text{ cm}$. Jos kolmas sivu on ylärajan tai alarajan mittainen, kolmiolla ei ole enää pinta-alaa vaan se on surkastunut janaksi.

220. a) Videossa <https://vimeo.com/182676305/4be2154a1a> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

Esimerkiksi:



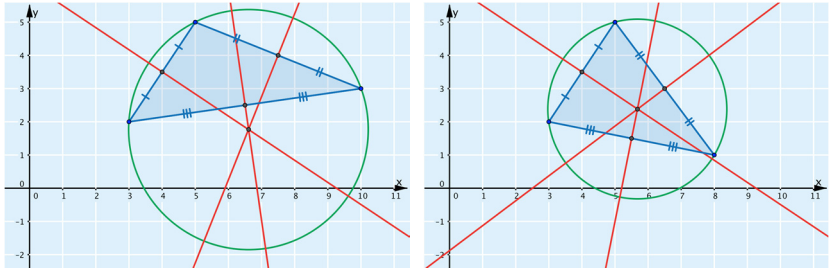
Normaalit leikkaavat samassa pisteessä.

Ominaisuus säilyy, kun kolmion muotoa muutetaan. Kun kolmio on tylppäkulmainen, on normaalien leikkauspiste kolmion ulkopuolella. Teräväkulmaisen kolmion normaalit leikkaavat kolmion sisäpuolella olevassa pisteessä.

Vastaus: Normaalit leikkaavat samassa pisteessä. Piste on teräväkulmaisessa kolmiossa kolmion sisäpuolella ja tylppäkulmaisessa kolmion ulkopuolella.

- b) Videossa <https://vimeo.com/182676372/3628aba6ab> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

Esimerkiksi:



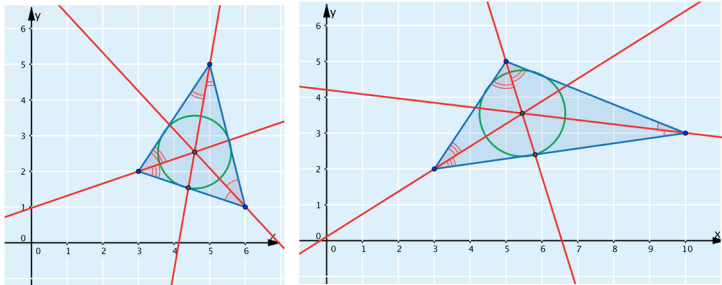
Keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä, joka on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.

Ominaisuus säilyy, kun kolmion muotoa muutetaan. Keskinormaalien leikkauspiste on tylppäkulmaisessa kolmiossa kolmion ulkopuolella ja teräväkulmaisessa kolmiossa kolmion sisäpuolella.

Vastaus: Keskinormaalien leikkauspiste on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Piste on teräväkulmaisessa kolmiossa kolmion sisäpuolella ja tylppäkulmaisessa kolmiossa kolmion ulkopuolella.

- c) Videossa <https://vimeo.com/182676428/09468c0bb1> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

Esimerkiksi:



Kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

Kun muutetaan kolmion muotoa, ominaisuus säilyy.

Vastaus: Kulmanpuolittajien leikkauspiste on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Ominaisuus säilyy.

221. a) Aritmeettisen lukujonon kahden peräkkäisen jäsenen erotus on vakio. Seuraava jäsen saadaan siis lisäämällä jäsenen kyseinen erotusluku. Merkitään erotuslukua kirjaimella d .

Kolmion pienin kulma on 30° , joten muut kulmat ovat $30^\circ + d$ ja $30^\circ + 2d$.

Kolmion kulmien summa on 180° .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä erotusluku d .

$$\begin{aligned} 30^\circ + (30^\circ + d) + (30^\circ + 2d) &= 180^\circ \\ 90^\circ + 3d &= 180^\circ \\ 3d &= 90^\circ && ||: 3 \\ d &= \frac{90^\circ}{3} \\ d &= 30^\circ \end{aligned}$$

Kulmat ovat 30° ,

$$30^\circ + d = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ \text{ ja}$$

$$30^\circ + 2d = 30^\circ + 2 \cdot 30^\circ = 90^\circ.$$

Vastaus: 30° , 60° ja 90°

- b) Geometrisen lukujonon kahden peräkkäisen jäsenen suhde on vakio. Seuraava jäsen saadaan siis kertomalla jäsen kyseisellä suhdeluvulla. Merkitään suhdelukua kirjaimella q .

Kolmion pienin kulma on 30° , joten muut kulmat ovat $30q$ ja $30q \cdot q = 30q^2$.

Kolmion kulmien summa on 180° .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suhdeluku q .

$$\begin{aligned} 30 + 30q + 30q^2 &= 180 & \parallel : 30 \\ 1 + q + q^2 &= 6 \\ q^2 + q - 5 &= 0 & \parallel a = 1, b = 1, c = -5 \end{aligned}$$

Sijoitetaan a , b ja c toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan. (Yhtälön voi ratkaista myös symbolisen laskennan ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla.)

$$\begin{aligned} q &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ q &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} \\ q &= \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \\ q &= \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} = 1,791\dots \text{ tai } q = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} = -2,791\dots \end{aligned}$$

Kulmat on oltava positiivisia, joten vain $q = 1,791\dots$ kelpaa suhdeluvuksi.

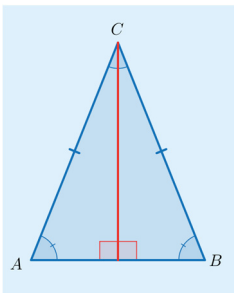
Kulmat ovat 30° ,

$$\begin{aligned} 30q &= 30^\circ \cdot 1,791\dots = 53,738\dots^\circ \approx 54^\circ \text{ ja} \\ 30q^2 &= 30^\circ \cdot 1,791\dots^2 = 96,261\dots^\circ \approx 96^\circ \end{aligned}$$

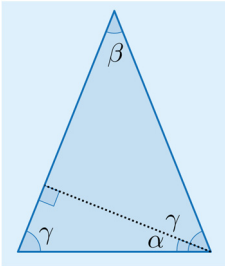
Vastaus: 30° , 54° ja 96°

222. a) Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana on kohtisuorassa kantaa vastaan, joten molempiin muodostuviin kolmioihin tulee suora kulma. Koska lisäksi tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuria, niin muodostuvat kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia.

Koska tasakylkisen kolmion kyljet ovat yhtä pitkiä, niin kolmiot ovat myös yhteneviä.



- b) Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuria. Merkitään kantakulmaa kirjaimella γ .



Osoitetaan, että $\alpha = \frac{1}{2} \beta$.

Tarkastellaan ensin vasemmassa alanurkassa olevaa suorakulmaista kolmiota. Kolmion kulmien summa on 180° , joten $\gamma + \alpha + 90^\circ = 180^\circ$. Ratkaistaan yhtälöstä γ .

$$\gamma = 90^\circ - \alpha$$

Tarkastellaan seuraavaksi isoa tasakylkistä kolmiota. Saadaan yhtälö $\beta + \gamma + \gamma = 180^\circ$. Ratkaistaan yhtälöstä γ .

$$\begin{aligned}\beta + 2\gamma &= 180^\circ \\ 2\gamma &= 180^\circ - \beta \quad ||: 2 \\ \gamma &= \frac{180^\circ - \beta}{2} \\ \gamma &= \frac{180^\circ}{2} - \frac{\beta}{2} \\ \gamma &= 90^\circ - \frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

Asetetaan saadun kulman γ lausekkeet yhtä suuriksi ja osoitetaan väite todeksi.

$$\begin{aligned}90^\circ - \alpha &= 90^\circ - \frac{\beta}{2} \\ -\alpha &= -\frac{\beta}{2} \quad ||: (-1) \\ \alpha &= \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\beta\end{aligned}$$

2.2 Pythagoraan lause

ALOITA PERUSTEISTA

- 223.** a) Hypotenuusa on suoran kulman vastainen sivu. Sen pituus on 5.
- b) Kolmion kateetit ovat suoran kulman viereiset sivut. Niiden pituudet ovat 3 ja 4.
- c) Pythagoraan lauseen mukaan kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö, joten yhtälö on $3^2 + 4^2 = 5^2$.
- 224.** a) Lasketaan hypotenuusan x pituus Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 4,1^2 + 5,6^2$$

$$x^2 = 48,17$$

$$x = (\pm)\sqrt{48,17}$$

$$x = 6,940\dots$$

$$x \approx 6,9$$

Sivun pituus on noin 6,9 m.

Vastaus: $x \approx 6,9$ m

- b) Lasketaan kateetin y pituus Pythagoraan lauseella.

$$y^2 + 3,2^2 = 5,3^2$$

$$y^2 = 5,3^2 - 3,2^2$$

$$y^2 = 17,85$$

$$y = (\pm)\sqrt{17,85}$$

$$y = 4,224\dots$$

$$y \approx 4,2$$

Sivun pituus on noin 4,2 dm.

Vastaus: 4,2 dm

- 225.** a) Teräväkulmaisessa kolmiossa kaikki kulmat ovat teräviä. Kuvan kolmiossa on yksi suora kulma, joten kolmio on suorakulmainen ja väite on väärin.

Vastaus: väärin, suorakulmainen

- b) Suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusa on suoran kulman vastainen sivu. Suoran kulman viereiset sivut ovat kateetteja. Kuvan kolmiossa kateetin pituus on 8, joten väite on väärin.

Vastaus: väärin, kateetin

- c) Ratkaistaan sivun x pituus Pythagoraan lauseella.

$$8^2 + x^2 = 10^2$$

$$x^2 = 10^2 - 8^2$$

$$x^2 = 36$$

$$x = (\pm) 6$$

Sivun x pituus on 6.

Vastaus: oikein

- d) Kolmion piiri on sivujen pituuksien summa $10 + 8 + 6 = 24$. Kolmion piiri ei ole 22, joten väite on väärin.

Vastaus: väärin, 24

- e) Kolmion pinta-ala on $A = \frac{ah}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$, joten väite on väärin.

Vastaus: väärin, 24

- 226.** Pohjavalun lävistäjä jakaa suorakulmion kahteen kolmioon. Tutkitaan, toteuttavatko kolmion sivut Pythagoraan lauseen.

Kahden lyhimmän sivun neliöiden summa on $10,60^2 + 15,55^2 = 354,16\dots$
Pisimmän sivun neliö on $18,57^2 = 344,84\dots$

Koska $354,16\dots \neq 344,84\dots$, niin kolmio ei ole suorakulmainen.
Seinät eivät tule kohtisuoraan toisiaan vasten.

Vastaus: eivät tule

- 227.** Ratkaistaan kolmion toisen kateetin pituus Pythagoraan lauseella.
Merkitään kateettia kirjaimella x .

$$\begin{aligned}x^2 + 37^2 &= 92^2 \\x^2 &= 92^2 - 37^2 \\x^2 &= 7095 \\x &= (\pm)\sqrt{7095} \\x &= 84,231\dots\end{aligned}$$

Piiri on sivujen pituuksien summa, joten

$$p = 37 \text{ mm} + 92 \text{ mm} + 84,231\dots \text{ mm} = 213,231\dots \text{ mm} \approx 210 \text{ mm}.$$

Pinta-ala lasketaan kateettien pituuksien avulla, joten

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{37 \text{ mm} \cdot 84,231\dots \text{ mm}}{2} = 1558,288\dots \text{ mm}^2 \approx 1600 \text{ mm}^2.$$

Vastaus: 210 mm ja 1600 mm².

- 228.** Merkitään kaapin suurinta korkeutta kirjaimella x ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseella.

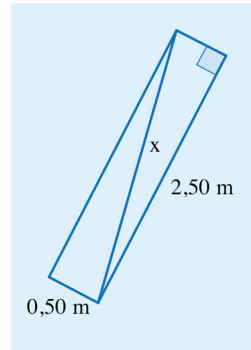
$$x^2 = 2,50^2 + 0,50^2$$

$$x^2 = 6,5$$

$$x = (\pm) \sqrt{6,5}$$

$$x = 2,549\dots$$

$$x \approx 2,55$$



Kaapin suurin korkeus on 2,55 m ja huoneen korkeus on 2,6 m, joten Liina ja Aatu mahtuvat kääntämään kaapin pystyyn.

Vastaus: mahtuvat

VAHVISTA OSAAMISTA

229. Merkitään hypotenuusan pituutta kirjaimella x ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 5^2 + 12^2$$

$$x^2 = 169$$

$$x = (\pm)\sqrt{169}$$

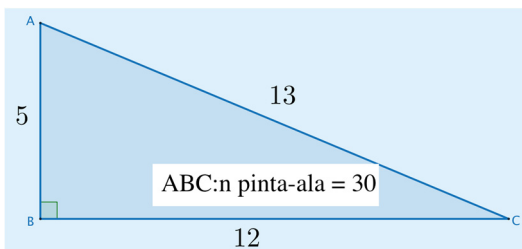
$$x = 13$$

Pinta-ala lasketaan kateettien avulla.

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$$

Hypotenuusan pituus on 13 ja kolmion pinta-ala on 30.

Tarkistus: Piirretään suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat 5 ja 12. Määritetään hypotenuusan pituus ja kolmion pinta-ala ohjelman avulla.



Vastaus: hypotenuusan pituus 13, pinta-ala 30

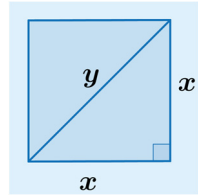
230. a) Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x .
Ratkaistaan tuntematon x neliön pinta-alan
yhtälöstä.

$$x \cdot x = 2,56$$

$$x^2 = 2,56$$

$$x = \left(\pm\right) \sqrt{2,56}$$

$$x = 1,6$$



Merkitään neliön lävistäjää kirjaimella y ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + x^2 = y^2$$

$$1,6^2 + 1,6^2 = y^2$$

$$y^2 = 5,12$$

$$y = \left(\pm\right) \sqrt{5,12}$$

$$y = 2,262\dots$$

$$y \approx 2,26$$

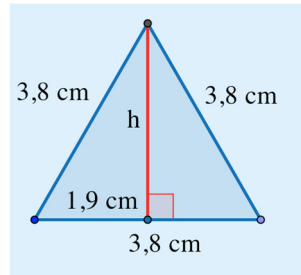
Neliön lävistäjän pituus on noin 2,26 m.

Vastaus: 2,26 m

- b) Tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa kolmion kannan ja jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon.

Suorakulmaisen kolmion kannan pituus

$$\text{on } \frac{3,8 \text{ cm}}{2} = 1,9 \text{ cm}.$$



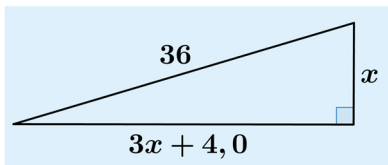
Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} 1,9^2 + h^2 &= 3,8^2 \\ h^2 &= 3,8^2 - 1,9^2 \\ h^2 &= 10,83 \\ h &= (\pm) \sqrt{10,83} \\ h &= 3,290\dots \end{aligned}$$

Kolmion korkeus on noin 3,3 cm.

Vastaus: 3,3 cm

231. Merkitään suorakulmaisen kolmion lyhemmän kateetin pituutta kirjaimella x . Pidemmän kateetin pituus on silloin $3x + 4,0$.



Ratkaistaan tuntematon x Pythagoraan lauseella.

$$x^2 + (3x + 4,0)^2 = 36^2$$

$$x^2 + (3x + 4,0)(3x + 4,0) = 1296$$

$$x^2 + 9x^2 + 12x + 12x + 16 = 1296$$

$$10x^2 + 24x - 1280 = 0$$

$$\parallel a = 10, b = 24, c = -1280$$

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. (Yhtälön voi ratkaista myös symbolisen laskennan ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla.)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-1280)}}{2 \cdot 10}$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{51776}}{20}$$

$$x = \frac{-24 + \sqrt{51776}}{20} = 10,177... \quad \text{tai} \quad x = \frac{-24 - \sqrt{51776}}{20} = -12,577...$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten vain $x = 10,177...$ kelpaa.

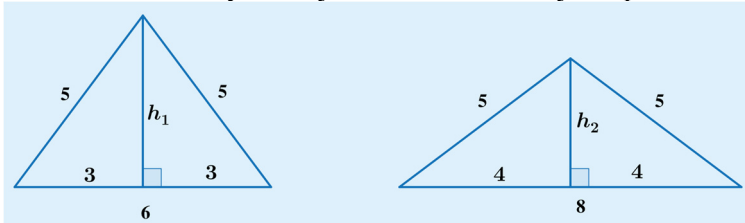
Kolmion kateettien pituudet ovat

$$x = 10,177 \approx 10 \text{ ja}$$

$$3x + 4,0 = 3 \cdot 10,177... + 4,0 = 34,531... \approx 35$$

Vastaus: n. 10 ja n. 35

- 232.** Kolmiot ovat tasakylkisiä, joten niiden korkeusjanat puolittavat kannat.



Lasketaan kolmioiden korkeudet.

$$h_1^2 + 3^2 = 5^2$$

$$h_1^2 = 5^2 - 3^2$$

$$h_1^2 = 16$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \sqrt{16}$$

$$h_1 = 4$$

$$h_2^2 + 4^2 = 5^2$$

$$h_2^2 = 5^2 - 4^2$$

$$h_2^2 = 9$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \sqrt{9}$$

$$h_2 = 3$$

Lasketaan kolmioden pinta-alat.

$$A_1 = \frac{ah}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$$

$$A_2 = \frac{ah}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$$

Pinta-alat ovat samat.

Vastaus: on

- 233. a)** Valitaan $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ ja $(x_2, y_2) = (1, 5)$.

Sijoitetaan koordinaatit pisteiden etäisyyskaavaan

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$$d = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} = 3,6055... \approx 3,61$$

Pisteiden etäisyys on $\sqrt{13} \approx 3,61$.

Vastaus: $\sqrt{13} \approx 3,61$.

b) Valitaan $(x_1, y_1) = (3, 4)$ ja $(x_2, y_2) = (-1, -5)$.

Sijoitetaan koordinaatit pisteiden etäisyyskaavaan

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-5 - 4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-9)^2} \\ &= \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97} = 9,848... \approx 9,85 \end{aligned}$$

Janan pituus on $\sqrt{97} \approx 9,85$.

Vastaus: $\sqrt{97} \approx 9,85$.

234. Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

Sivun AB pituus:

$$d_{AB} = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \approx 5,830...$$

Sivun AC pituus:

$$d_{AC} = \sqrt{(-1 - (-3))^2 + (7 - (-1))^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} \approx 8,246...$$

Sivun BC pituus:

$$d_{BC} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \approx 5,830...$$

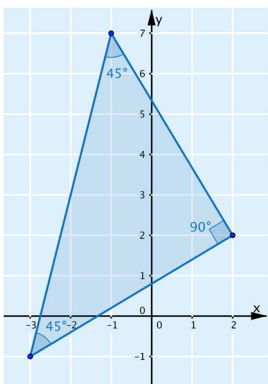
Tutkitaan, toteuttavatko sivut Pythagoraan lauseen.

Kahden lyhemmän sivun neliön summa on $(\sqrt{34})^2 + (\sqrt{34})^2 = 34 + 34 = 68$.

Pisimmän sivun neliö on $(\sqrt{68})^2 = 68$.

Pythagoraan lause toteutuu, joten kolmio on suorakulmainen.

Tarkistus: Piirretään kuva sopivalla ohjelmalla ja määritetään kolmion kulmien suuruudet.



Vastaus: on

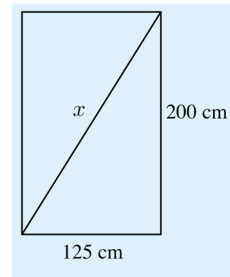
- 235.** Ratkaistaan oviaukon lävistäjän x pituus
Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 125^2 + 200^2$$

$$x^2 = 55625$$

$$x = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \sqrt{55625}$$

$$x = 235,84\dots$$



Oviaukon lävistäjän pituus on 235 cm, joten mitoiltaan $241 \text{ cm} \times 287 \text{ cm}$ kokoinen taulu ei mahdu oviaukosta sisään.

Vastaus: ei mahdu

- 236.** Merkitään aitauksen kateetteja $3x$ ja $5x$.
Muodostetaan yhtälö kolmion pinta-alalle ja ratkaistaan siitä tuntematon x .

$$A = \frac{ah}{2}$$

$$13 = \frac{3x \cdot 5x}{2}$$

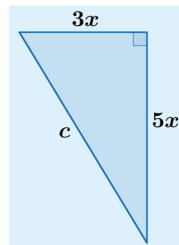
$$\frac{15x^2}{2} = 13 \quad || \cdot 2$$

$$15x^2 = 26 \quad || : 15$$

$$x^2 = \frac{26}{15}$$

$$x = (\pm) \sqrt{\frac{26}{15}}$$

$$x = 1,316\dots$$



Kolmion sivujen pituudet ovat

$$3x = 3 \cdot 1,316\dots \text{ m} = 3,949\dots \text{ m ja}$$

$$5x = 5 \cdot 1,316\dots \text{ m} = 6,582\dots \text{ m.}$$

Merkitään suorakulmaisen kolmion hypotenuusaa kirjaimella c ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseella.

$$c^2 = (3x)^2 + (5x)^2$$

$$c^2 = 3,949\dots^2 + 6,582\dots^2$$

$$c^2 = 58,933\dots$$

$$c = 7,676\dots$$

Aitauksen kolmanteen sivuun tarvitaan noin $7,7$ m aitamateriaalia.

Vastaus: $7,7$ m

237. Kun lipusta tehdään pienennös mittakaavassa 1:12, sen sivujen pituudet lyhenevät 12-osaan alkuperäiseen verrattuna.

Pienennetyn lipun kannan pituus on $\frac{80 \text{ cm}}{12} = 6,666... \text{ cm} \approx 6,67 \text{ cm}$ ja

korkeus on $\frac{2,10 \text{ m}}{12} = \frac{210 \text{ cm}}{12} = 17,5 \text{ cm}$.

Pienennetyn lipun pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{6,666... \text{ cm} \cdot 17,5 \text{ cm}}{2} = 58,333... \text{ cm}^2 \approx 58,3 \text{ cm}^2$$

Tasakylkisen kolmion korkeusjana jakaa sen kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat $\frac{6,666... \text{ cm}}{2} = 3,333... \text{ cm}$ ja $17,5 \text{ cm}$. Merkitään

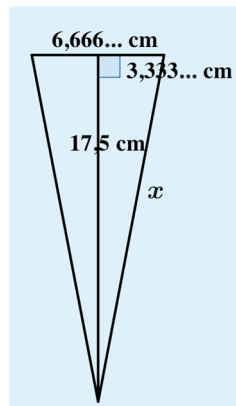
suorakulmaisen kolmion hypotenuusaa kirjaimella x ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 3,333...^2 + 17,5^2$$

$$x^2 = 317,361...$$

$$x = 17,814...$$

$$x \approx 17,8$$

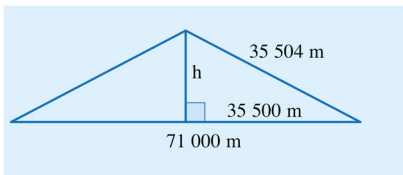


Sivujen pituudet ovat noin 17,8 cm, 17,8 cm ja 6,67 cm. Pinta-ala on noin $58,3 \text{ cm}^2$.

Vastaus: Sivujen pituudet ovat 17,8 cm, 17,8 cm ja 6,67 cm. Pinta-ala on $58,3 \text{ cm}^2$.

- 238.** Laajennut rautatiekisko nousee korkeimmilleen Helsingin ja Riihimäen puolivälissä.

Tällöin muodostuu tasakylkinen kolmio, jonka kanta on $71 \text{ km} = 71\,000 \text{ m}$ ja kylkien yhteispituus on $71 \text{ km} + 8,0 \text{ m} = 71\,008 \text{ m}$.



Yhden kyljen pituus on $\frac{71008}{2} = 35504 \text{ m}$.

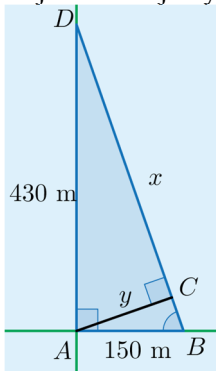
Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kanta on $\frac{71000}{2} = 35500 \text{ m}$.

$$\begin{aligned}h^2 + 35\,500^2 &= 35\,504^2 \\h^2 &= 284016 \\h &= \left(\begin{smallmatrix}+ \\ -\end{smallmatrix}\right) \sqrt{284016} \\h &= 532,931\dots\end{aligned}$$

Rautatiekisko nousisi noin 530 m.

Vastaus: 530 m

- 239.** Piirretään mallikuva. Tiet ovat janojen AD ja AB suuntaisia. Oikopolku alkaa pisteestä D ja päättyy pisteeseen B . Oikopolun lyhin etäisyys risteyksestä on muodostuvan kolmion korkeusjana. Merkitään oikopolkua kirjaimella x ja kysyttyä etäisyyttä kirjaimella y .



Kolmioissa ABC ja ABD on kaksi yhtä suurta kulmaa (suorakulma ja kulma B on yhteinen), joten kolmiot ovat kk-lauseen perusteella yhdenmuotoiset.

Ratkaistaan kolmion ABD hypotenuusan x pituus Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 150^2 + 430^2$$

$$x^2 = 207\,400$$

$$x = (\pm) \sqrt{207\,400}$$

$$x = 455,411\dots$$

Muodostetaan yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä etäisyys y .

$$\frac{y}{430} = \frac{150}{455,411\dots}$$

$$455,411\dots y = 150 \cdot 430 \quad || : 455,411\dots$$

$$y = \frac{150 \cdot 430}{455,411\dots}$$

$$y = 141,63\dots$$

$$y \approx 140$$

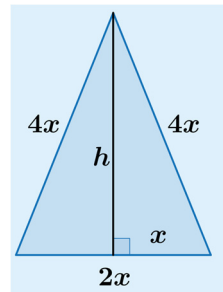
Lyhin etäisyys risteyksestä oikopolulle on noin 140 m.

Vastaus: 140 m

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 240.** Piirretään mallikuva.
Merkitään kolmion kannan pituutta $2x$. Tällöin kylki on $2 \cdot 2x = 4x$.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Muodostetaan lauseke kolmion korkeudelle h Pythagoraan lauseen avulla.



$$\begin{aligned}h^2 + x^2 &= (4x)^2 \\h^2 &= 16x^2 - x^2 \\h^2 &= 15x^2 \\h &= (\pm) \sqrt{15x^2} \\h &= \sqrt{15} \cdot \sqrt{x^2} \\h &= \sqrt{15}x \quad \| x > 0\end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu korkeuden lauseke kolmion pinta-alan laskukaavaan ja ratkaistaan siitä x .

$$\begin{aligned}A &= \frac{ah}{2} \\56 &= \frac{2x \cdot \sqrt{15}x}{2} \\56 &= \sqrt{15}x^2 \quad \| : \sqrt{15} \\x^2 &= \frac{56}{\sqrt{15}} \\x &= \sqrt{\frac{56}{\sqrt{15}}} \\x &= 3,802...\end{aligned}$$

Kolmion korkeus on

$$h = \sqrt{15}x = \sqrt{15} \cdot 3,802... \text{ m} = 14,727... \text{ m} \approx 15 \text{ m}.$$

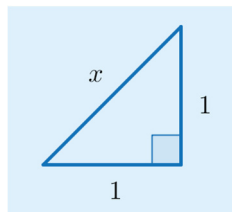
Vastaus: 15 m

241. Ratkaistaan ensimmäisen suorakulmaisen kolmion hypotenuusan x pituus Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = (\pm)\sqrt{2}$$

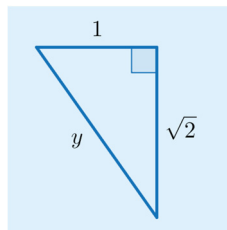


Ratkaistaan toisen kolmion hypotenuusan y pituus.

$$y^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$y^2 = 1 + 2$$

$$y = (\pm)\sqrt{3}$$

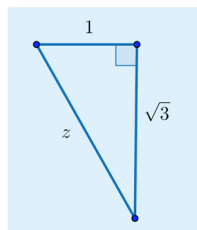


Ratkaistaan kolmannen kolmion hypotenuusan z pituus.

$$z^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$z^2 = 1 + 3$$

$$z = (\pm)\sqrt{4}$$



Ensimmäisen kolmion hypotenuusa on $\sqrt{2}$, toisen kolmion hypotenuusa on $\sqrt{3}$ ja kolmannen kolmion hypotenuusa on $\sqrt{4}$.

Voidaan päätellä, että hypotenuusan pituus on luvun "kolmion järjestysluku + 1" neliöjuuri.

Siis tuhannennen kolmion hypotenuusan pituus on $\sqrt{1001}$.

Vastaus: $\sqrt{1001}$

- 242. a)** Ratkaistaan tasasivuisen kolmion sivun pituus yhtälöstä $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, kun kolmion korkeus $h = 1$.

$$\begin{aligned}1 &= \frac{a\sqrt{3}}{2} & \| \cdot 2 \\2 &= a\sqrt{3} & \| : \sqrt{3} \\a &= \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,1557...\end{aligned}$$

Sivun pituus on $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15$.

Vastaus: $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15$

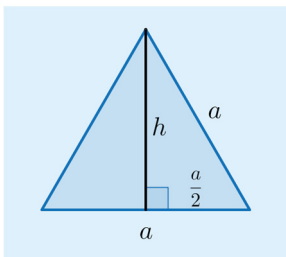
- b)** Ratkaistaan sivun pituus yhtälöstä $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, kun kolmion pinta-ala $A = 1$.

$$\begin{aligned}1 &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} & \| \cdot 4 \\4 &= a^2\sqrt{3} & \| : \sqrt{3} \\a^2 &= \frac{4}{\sqrt{3}} \\a &= (\pm)\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} \approx 1,5196...\end{aligned}$$

Sivun pituus on $\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} \approx 1,52$.

Vastaus: $\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} \approx 1,52$

- c) Todistetaan kaava $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oikeaksi.



Kolmion korkeusjana jakaa tasasivuisen kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2}}{\sqrt{4}}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \| a > 0$$

Todistetaan kaava $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ oikeaksi. Sijoitetaan $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ kolmion pinta-alan kaavaan ja sievennetään.

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

- 243.** a) Näytetään, että ka , kb ja kc on Pythagoraan kolmikko, kun k on positiivinen kokonaisluku.

Käytetään osoituksessa hyväksi tietoa, että luvut a , b ja c on Pythagoraan kolmikko, eli luvut toteuttavat Pythagoraan lauseen $a^2 + b^2 = c^2$.

Muodostetaan lukujen ka ja kb neliöiden summa ja sievennetään se.

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2.$$

Koska $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$, niin luvut ka , kb ja kc toteuttavat Pythagoraan lauseen ja ovat siis Pythagoraan kolmikko.

- b) Jos $a = 3$, $b = 4$ ja $c = 5$, ja

- $k = 2$, niin luvut $ka = 2 \cdot 3 = 6$,
 $kb = 2 \cdot 4 = 8$ ja
 $kc = 2 \cdot 5 = 10$ on Pythagoraan kolmikko.

- $k = 3$, niin luvut $ka = 3 \cdot 3 = 9$,
 $kb = 3 \cdot 4 = 12$ ja
 $kc = 3 \cdot 5 = 15$ on Pythagoraan kolmikko.

Vastaus: esim. luvut 6, 8 ja 10 sekä 9, 12 ja 15

- c) Näytetään, että luvut $a = 2k$, $b = k^2 - 1$ ja $c = k^2 + 1$ toteuttavat Pythagoraan lauseen, kun $k > 1$.

Pienimpien lukujen neliöiden summa on:

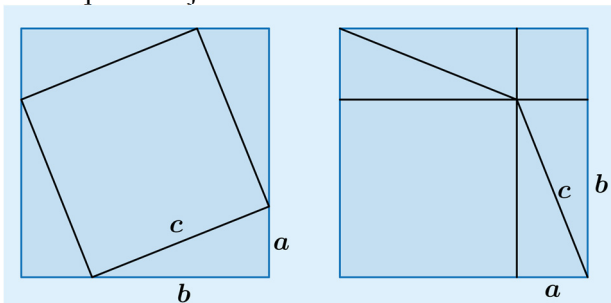
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2k)^2 + (k^2 - 1)^2 \\ &= 4k^2 + (k^2 - 1)(k^2 - 1) \\ &= 4k^2 + k^4 - k^2 - k^2 + 1 \\ &= k^4 + 2k^2 + 1 \end{aligned}$$

Isoimman luvun neliö on:

$$\begin{aligned} c^2 &= (k^2 + 1)^2 \\ &= (k^2 + 1)(k^2 + 1) \\ &= k^4 + k^2 + k^2 + 1 \\ &= k^4 + 2k^2 + 1 \end{aligned}$$

Koska $a^2 + b^2 = c^2$, niin luvut a , b ja c toteuttavat Pythagoraan lauseen ja luvut muodostavat Pythagoraan kolmikon.

244. Todistetaan Pythagoraan lause oikeaksi oikean- ja vasemmanpuoleisen neliön pinta-alojen avulla.



Neliöiden sivut ovat $a + b$, joten niiden pinta-alat ovat yhtäsuuret.

Muodostetaan pinta-alojen lausekkeet kuvioden avulla.

Molemmissa neliöissä on neljä yhtenevää suorakulmaista kolmiota.

Oikeanpuoleisessa neliössä on kolmioiden lisäksi kaksi pientä neliötä, joiden sivut ovat a ja b . Näiden pinta-alat ovat a^2 ja b^2 .

Oikeanpuoleisen neliön pinta-ala on

$$A_{\text{oikea}} = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Vasemmanpuoleisessa neliössä on kolmioiden lisäksi neliö, jonka sivu on c ja pinta-ala c^2 .

Vasemmanpuoleisen neliön pinta-ala on

$$A_{\text{vasen}} = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab.$$

Asetetaan neliöiden pinta-alat yhtäsuuriksi.

$$\begin{aligned} A_{\text{oikea}} &= A_{\text{vasen}} \\ a^2 + b^2 + 2ab &= c^2 + 2ab \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Tämä on Pythagoraan lause.

2.3 Trigonometriaa

ALOITA PERUSTEISTA

245. a) $\sin 35^\circ = 0,573\dots \approx 0,57$

b) $15\cos 12^\circ = 14,672\dots \approx 14,67$

c) $\tan 45^\circ + 1,25 = 2,25$

d) $\sin 35^\circ + \sin 25^\circ = 0,996\dots \approx 1,00$

246. a)

$$\sin \alpha = 0,35$$

$$\alpha = 20,487\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 20^\circ$$

b)

$$\cos \alpha = 0,47$$

$$\alpha = 61,965\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 62^\circ$$

c)

$$\tan \alpha = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

247. a) Kulman α suuruus lasketaan kosinin avulla käyttäen kulman viereisen kateetin ja hypotenuusan pituuksia.

$$\sin \alpha = \frac{4,0}{5,2}$$

$$\alpha = 39,715\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 40^\circ$$

- b) Kulman α suuruus lasketaan tangentin avulla käyttäen kulman vastaisen ja viereisen kateetin pituuksia.

$$\tan \alpha = \frac{3,3}{4,0}$$

$$\alpha = 39,522\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 40^\circ$$

248. a) Kysytty sivu x on kulman 51° vastainen sivu. Lisäksi tunnetaan hypotenuusan pituus, joten muodostetaan yhtälö sinin avulla.

$$\sin 51^\circ = \frac{x}{4,2} \quad || \cdot 4,2$$

$$x = 4,2 \cdot \sin 51^\circ$$

$$x = 3,264\dots$$

$$x \approx 3,3$$

Vastaus: $x \approx 3,3$ m

- b) Kysytty sivu x on kolmion hypotenuusa. Lisäksi tunnetaan kulman 63° viereinen sivu, joten muodostetaan yhtälö kosinin avulla.

$$\cos 63^\circ = \frac{14}{x} \quad || \cdot x$$

$$x \cdot \cos 63^\circ = 14 \quad || : \cos 63^\circ$$

$$x = \frac{14}{\cos 63^\circ}$$

$$x = 30,837\dots$$

$$x \approx 31$$

Vastaus: $x \approx 31$ cm

249. a) Kulman α viereisen kateetin ja hypotenuusan pituudet tunnetaan, joten ratkaistaan kulman suuruus kosinin avulla.

$$\cos \alpha = \frac{3,2}{6,5}$$

$$\alpha = 60,507\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 61^\circ$$

- b) Kulman α vastaisen kateetin ja hypotenuusan pituudet tunnetaan, joten ratkaistaan kulman suuruus sinin avulla.

$$\sin \alpha = \frac{3,7}{6,0}$$

$$\alpha = 38,073\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 38^\circ$$

- c) Kulman α vastaisen ja viereisen kateetin pituudet tunnetaan, joten ratkaistaan kulman suuruus tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{5,2}{3,0}$$

$$\alpha = 60,018\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 60^\circ$$

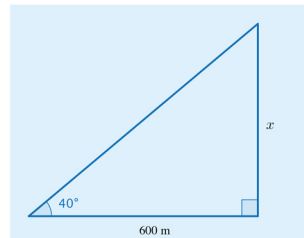
250. Kulman 40° viereisen kateetin pituus tunnetaan, joten lasketaan kulman vastaisen kateetin x pituus tangentin avulla.

$$\tan 40^\circ = \frac{x}{600} \quad || \cdot 600$$

$$x = 600 \cdot \tan 40^\circ$$

$$x = 503,459\dots$$

$$x \approx 500$$



Kraatterin syvyys on noin 500 m.

Vastaus: 500 m

VAHVISTA OSAAMISTA

251. Kulman α vastaisen kateetin pituus on 5,3, viereisen kateetin pituus on 3,2 ja kolmion hypotenuusan pituus on 6,2.

Kulman kosini on kulman viereisen kateetin ja hypotenuusan suhde, joten väittämä A on tosi.

Kulman sini on kulman vastaisen kateetin ja hypotenuusan suhde, joten väittämä B on epätosi.

Kulman tangenti on kulman vastaisen ja viereisen kateetin suhde, joten väittämä C on epätosi.

Ratkaistaan kulman α suuruus esimerkiksi kosinin avulla.

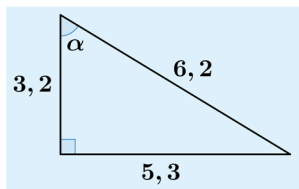
$$\cos \alpha = \frac{3,2}{6,2}$$

$$\alpha = 58,927\dots^\circ$$

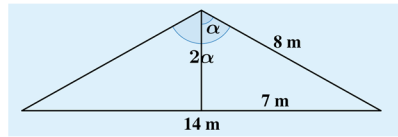
$$\alpha \approx 59^\circ$$

Väittämä D on tosi ja väittämä E on epätosi.

Vastaus: A ja D



- 252. a)** Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa huippukulman ja jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Merkitään huippukulman puolikasta kirjaimella α ja ratkaistaan sen suuruus sinin avulla.



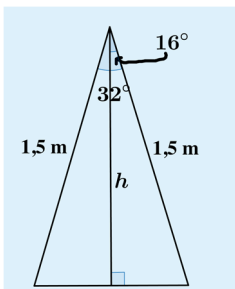
$$\sin \alpha = \frac{7}{8}$$

$$\alpha = 61,044\dots^\circ$$

Huippukulman suuruus on $2\alpha = 2 \cdot 61,044\dots^\circ = 122,089\dots^\circ \approx 122^\circ$

Vastaus: 122°

- b)** Piirretään mallikuva ja merkitään tikkaiden korkeutta kirjaimella h .



Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa huippukulman ja jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Ratkaistaan kolmion korkeus kosinin avulla.

$$\cos 16^\circ = \frac{h}{1,5} \quad || \cdot 1,5$$

$$h = 1,5 \cdot \cos 16^\circ$$

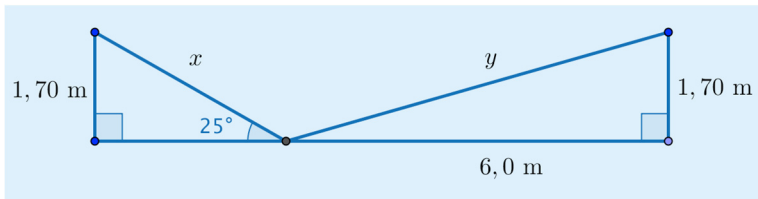
$$h = 1,441\dots$$

$$h \approx 1,4$$

Tikkaiden korkeus on noin 1,4 m.

Vastaus: 1,4 m

c) Ratkaistaan vaijerin pituus kahdessa osassa.



Pituus x saadaan selville vasemmanpuoleisesta suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\begin{aligned}\sin 25^\circ &= \frac{1,70}{x} & \parallel \cdot x \\ x \cdot \sin 25^\circ &= 1,70 & \parallel : \sin 25^\circ \\ x &= \frac{1,70}{\sin 25^\circ} \\ x &= 4,0225\dots\end{aligned}$$

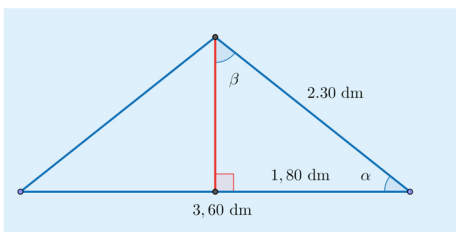
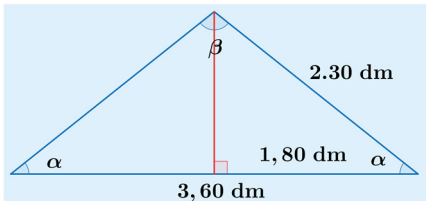
Pituus y saadaan selville oikeanpuoleisesta suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}y^2 &= 1,70^2 + 6,0^2 \\ y^2 &= 38,89 \\ y &= (\pm)\sqrt{38,89} \\ y &= 6,2361\dots\end{aligned}$$

Vaijerin pituus on $x + y = 4,0225\dots \text{ m} + 6,2361\dots \text{ m}$
 $= 10,2586\dots \text{ m} \approx 10 \text{ m}.$

Vastaus: 10 m

253. Tasakylkisessä kolmiossa kantakulmat ovat yhtäsuuret ja korkeusjana jakaa kannan puoliksi. Muodostuu kaksi yhtenevää suorakulmaista kolmiota.



Ratkaistaan kulman α suuruus kosinin avulla.

$$\cos \alpha = \frac{1,80}{2,30}$$

$$\alpha = 38,499\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 38,5^\circ$$

Kulman β suuruus saadaan kolmion kulmien summan avulla.

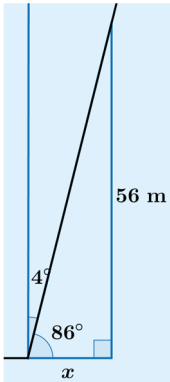
$$\beta + 38,499\dots^\circ + 38,499\dots^\circ = 180^\circ$$

$$\beta = 103,000\dots^\circ$$

$$\beta \approx 103^\circ$$

Vastaus: $38,5^\circ$, $38,5^\circ$ ja 103°

254. Piirretään mallikuva. Tornin kaltevuus on $4,0^\circ$, joten muodostuvan suorakulmaisen kolmion terävä kulma on $90^\circ - 4,0^\circ = 86^\circ$.



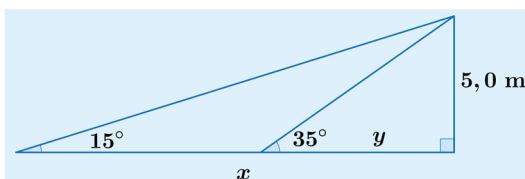
Ratkaistaan kiven putoamispaikan etäisyys tornin juurelta tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 86^\circ &= \frac{56}{x} && \parallel \cdot x \\ x \cdot \tan 86^\circ &= 56 && \parallel : \tan 86^\circ \\ x &= \frac{56}{\tan 86^\circ} \\ x &= 3,915... \\ x &\approx 3,9\end{aligned}$$

Kivi osuu maahan noin 3,9 metrin päässä tornin juurelta.

Vastaus: 3,9 m:n etäisyydellä

255. Piirretään mallikuva.



Lasketaan oikeanpuoleisesta suorakulmaisesta kolmiosta sivun y pituus tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 35^\circ &= \frac{5}{y} && \parallel \cdot y \\ y \cdot \tan 35^\circ &= 5 && \parallel : \tan 35^\circ \\ y &= \frac{5}{\tan 35^\circ} \\ y &= 7,140\dots\end{aligned}$$

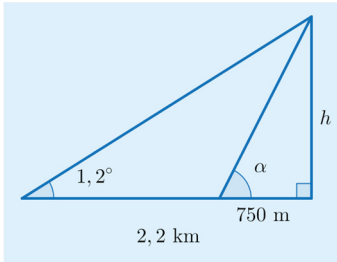
Ratkaistaan sivun x pituus isosta suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ &= \frac{5}{x} && \parallel \cdot x \\ x \cdot \tan 15^\circ &= 5 && \parallel : \tan 15^\circ \\ x &= \frac{5}{\tan 15^\circ} \\ x &= 18,660\dots\end{aligned}$$

Välimatka on $x - y = 18,660\dots - 7,140\dots = 11,519\dots \approx 12$ metriä.

Vastaus: 12 m:n etäisyydellä

256. Piirretään mallikuva.



Ratkaistaan laivan maston korkeus h ison suorakulmaisen kolmion avulla.

$$\tan 1,2^\circ = \frac{h}{2,2} \quad || \cdot 2,2$$

$$h = 2,2 \cdot \tan 1,2^\circ$$

$$h = 0,046\dots$$

Kulman α viereisen kateetin pituus on $750 \text{ m} = 0,750 \text{ km}$ ja vastaisen kateetin pituus on $h = 0,046\dots$, joten kulman α suuruus saadaan pienemmästä suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{0,046\dots}{0,750}$$

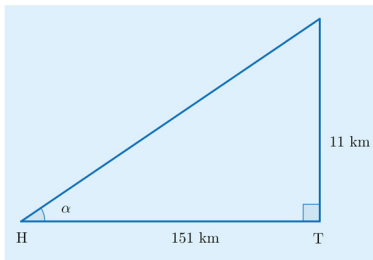
$$\alpha = 3,515^\circ\dots$$

$$\alpha \approx 3,5^\circ$$

Tähystäjä näkyy noin $3,5^\circ$:n kulmassa.

Vastaus: $3,5^\circ$:n kulmassa

257. Piirretään mallikuva.



Kone laskeutuu 11 kilometriä 151 kilometrin vaakasuoralla matkalla, joten yhden kilometrin vaakasuoralla matkalla se laskeutuu

$$\frac{11}{151} = 0,07284... \text{ km} \approx 73 \text{ m}.$$

Laskeutumiskulma ratkaistaan tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{11}{151}$$

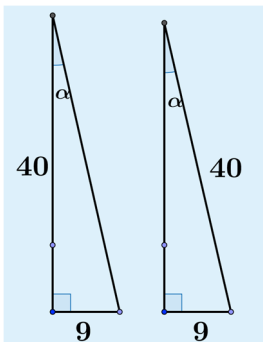
$$\alpha = 4,166...^{\circ}$$

$$\alpha \approx 4,2^{\circ}$$

Lasketumiskulma on noin $4,2^{\circ}$.

Vastaus: 73 m ja $4,2^{\circ}$

- 258.** Kolmion pienin kulma on sen lyhimmän sivun vastainen kulma.
Merkitään kulmaa kirjaimella α . Tehtävän tietojen avulla voidaan piirtää kaksi erilaista kolmiota.



1. kolmio:

Jos annetut sivut ovat kolmion kateetit, niin kulman α suuruus saadaan tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{9}{40}$$

$$\alpha = 12,680\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 12,7^\circ$$

2. kolmio:

Jos 40 cm on kolmion hypotenuusa, niin kulman α suuruus saadaan sinin avulla.

$$\sin \alpha = \frac{9}{40}$$

$$\alpha = 13,002\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 13,0^\circ$$

Varmistetaan vielä, että on laskettu kolmion pienimmän kulman suuruus. Kolmion toisen terävän kulman suuruus saadaan kolmion kulmien summan avulla $180 - 13,0^\circ - 90^\circ = 77^\circ$.

Kolmion pienin kulma on noin $13,0^\circ$.

Vastaus: $12,7^\circ$ tai $13,0^\circ$

259. a) Piirretään mäestä mallikuva.

Mäen kaltevuus on korkeuseron x suhde vaakasuoraan matkaan y , joten

$$\frac{x}{y} = 0,85.$$

Toisaalta $\tan \alpha = \frac{x}{y}$, joten

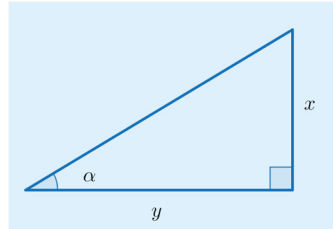
$$\tan \alpha = 0,85$$

$$\alpha = 40,364\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 40^\circ$$

Osuuden kaltevuuskulma on noin 40° .

Vastaus: 40°



b) Piirretään mallikuva.

Kaltevuus $\frac{x}{y}$ saadaan tangentin avulla.

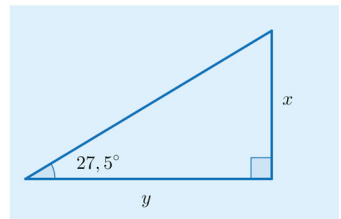
$$\tan 27,5^\circ = \frac{x}{y}$$

$$\frac{x}{y} = 0,520\dots$$

$$\frac{x}{y} \approx 52\%$$

Rinteen kaltevuus on noin 52 %.

Vastaus: 52 %



- c) Piirretään mallikuva ja ratkaistaan rinte
kaltevuuskulma.

Jyrkkyys on korkeuseron x suhde

vaakasuoraan matkaan y , joten $\frac{x}{y} = 1,05$.

Toisaalta $\tan \alpha = \frac{x}{y}$, joten

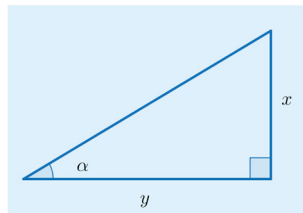
$$\tan \alpha = 1,05$$

$$\alpha = 46,397\dots^\circ$$

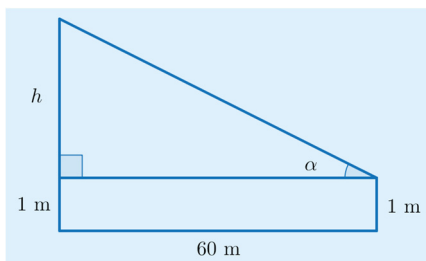
$$\alpha \approx 46^\circ$$

Rinteen kaltevuuskulma on 46° , joten sen kaltevuus voi olla 105 %.

Vastaus: voi



260. Piirretään mallikuva.



- a) Vaakasuora siirtymä on 3,3-kertainen korkeuteen nähden, joten kuvan merkinnöillä $60 = 3,3 \cdot h$. Ratkaistaan tästä h .

$$60 = 3,3h \quad || :3,3$$

$$h = \frac{60}{3,3}$$

$$h = 18,181\dots$$

Liito-oravan täytyy siis ponnistaa $18,181\dots \text{ m} + 1 \text{ m} = 19,181\dots \text{ m} \approx 19$ metrin korkeudelta.

Vastaus: 19 m:n korkeudelta

b) Ratkaistaan kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{18,181...}{60}$$

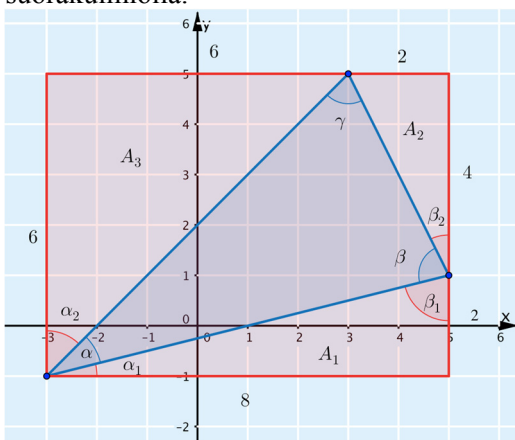
$$\alpha = 16,858...^\circ$$

$$\alpha \approx 17^\circ$$

Liito-orava lentää alaviistoon noin 17 asteen kulmassa.

Vastaus: alaviistoon 17° :n kulmassa

- 261.** Piirretään kuva tilanteesta. Kehystetään kolmio kärkien kautta kulkevalla suorakulmiolla.



Kolmion pinta-ala saadaan, kun suorakulmion pinta-alasta vähennetään nurkkiin jäävien suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat.

$$\begin{aligned}
 A &= A_{\text{suorakulmio}} - A_1 - A_2 - A_3 \\
 &= 8 \cdot 6 - \frac{8 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{6 \cdot 6}{2} \\
 &= 48 - 8 - 4 - 18 \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

Kulman α suuruus saadaan vähentämällä 90 asteesta kulmien α_1 ja α_2 suuruudet.

α_1 ja α_2 saadaan suorakulmaisista kolmioista.

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha_1 &= \frac{2}{8} & \text{ja} & & \tan \alpha_2 &= \frac{6}{6} \\
 \alpha_1 &= 14,036\dots^\circ & & & \alpha_2 &= 45^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 90^\circ - \alpha_1 - \alpha_2 \\
 \alpha &= 90^\circ - 14,036\dots^\circ - 45^\circ \\
 \alpha &= 30,964\dots^\circ \\
 \alpha &\approx 31^\circ
 \end{aligned}$$

Kulman β suuruus saadaan vähentämällä 180 asteesta kulmien β_1 ja β_2 suuruudet. β_1 ja β_2 saadaan suorakulmaisista kolmioista.

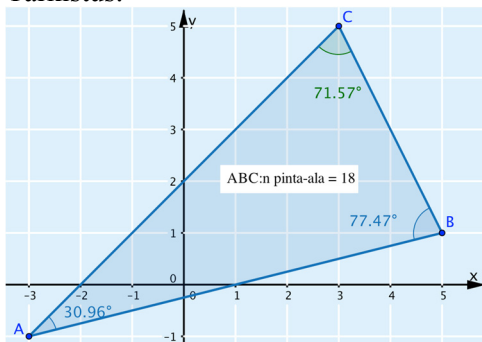
$$\tan \beta_1 = \frac{8}{2} \quad \text{ja} \quad \tan \beta_2 = \frac{2}{4}$$
$$\beta_1 = 75,963...^\circ \quad \beta_2 = 26,565...^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \beta_1 - \beta_2$$
$$\beta = 180^\circ - 75,963...^\circ - 26,565...^\circ$$
$$\beta = 77,472...^\circ$$
$$\beta \approx 77^\circ$$

Kulman γ suuruus saadaan kolmion kulmien summan avulla.

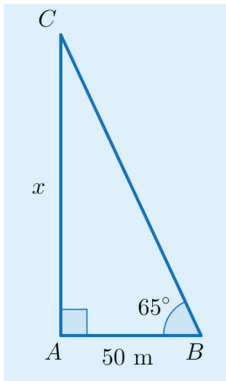
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$30,964...^\circ + 77,472...^\circ + \gamma = 180^\circ$$
$$\gamma = 71,564...^\circ$$
$$\gamma \approx 72^\circ$$

Tarkistus:



Vastaus: pinta-ala on 18, kulmat 31° , 72° ja 77°

262. Piirretään mallikuva.



Ratkaistaan karin etäisyys x tangentin avulla.

$$\tan 65^\circ = \frac{x}{50} \quad || \cdot 50$$

$$x = 50 \cdot \tan 65^\circ$$

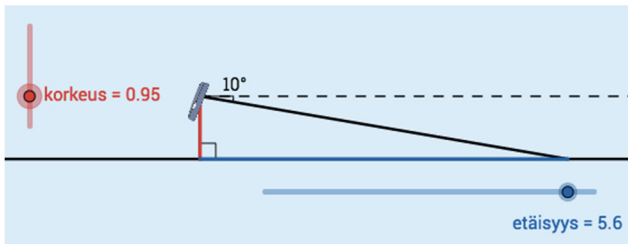
$$x = 107,22\dots$$

$$x \approx 110$$

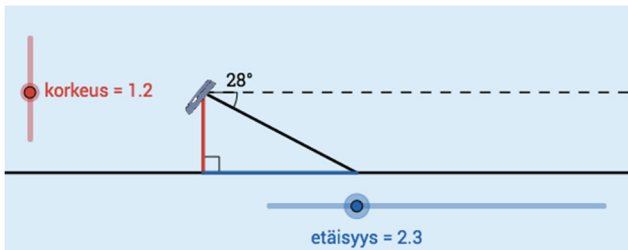
Kari on noin 110 metrin päässä rannasta.

Vastaus: 110 m:n etäisyydellä

263. a) Ratkaistaan tehtävä appletin avulla. Kulman α suuruus on 10° .



b)



Appletti ilmoittaa puhelimen ja esineen vaakasuoraksi etäisyydeksi 2,3 m.

Ratkaistaan etäisyys x laskemalla.

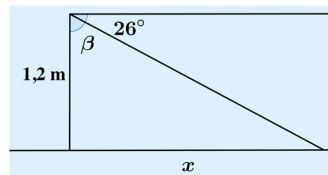
Kulman β suuruus on
 $\beta = 90^\circ - 26^\circ = 62^\circ$.

Etäisyys x saadaan tangentin avulla.

$$\tan 62^\circ = \frac{x}{1,2} \quad || \cdot 1,2$$

$$x = 1,2 \cdot \tan 62^\circ$$

$$x = 2,256\dots$$



Sovelluksen antama vastaus poikkeaa tarkasta arvosta $2,3 \text{ m} - 2,256\dots \text{ m} = 0,0431\dots \text{ m} \approx 4 \text{ cm}$.

Vastaus: 2,3 m, virhe 4 cm

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

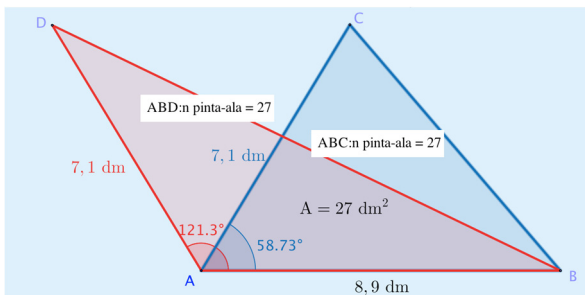
264. a) Kolmion pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 4,4 \text{ cm} \cdot 5,3 \text{ cm} \cdot \sin 126^\circ \\ &= 9,433... \text{ cm}^2 \\ &\approx 9,4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: $9,4 \text{ cm}^2$

b) Videossa <https://vimeo.com/182676521/07ab88f187> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

Kuva molemmista kolmioista:



Kulman suuruus on noin 59° tai 121° .

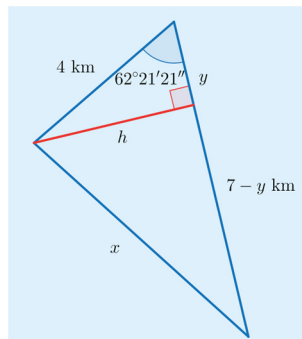
Vastaus: 59° tai 121°

265. Piirretään mallikuva.

Muutetaan $62^{\circ}21'21''$ asteiksi.

$$62^{\circ}21'21'' =$$

$$62^{\circ} + \frac{21}{60}^{\circ} + \frac{21}{60 \cdot 60}^{\circ} = 62,3558...^{\circ}$$



Muodostetaan kolmion korkeudelle h kaksi lauseketta Pythagoraan lauseella ja ratkaistaan yhtälöpari. (Yhtälöparin voi ratkaista myös symbolisen laskennan ohjelman yhtälöparinratkaisutoiminnolla.)

$$\begin{cases} 4^2 = y^2 + h^2 \\ x^2 = (7-y)^2 + h^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2 = 16 - y^2 \\ h^2 = x^2 - (7-y)^2 \end{cases}$$

Asetetaan lausekkeet yhtä suuriksi.

$$16 - y^2 = x^2 - (7 - y)^2$$

$$16 - y^2 = x^2 - 49 + 14y - y^2$$

$$16 = x^2 - 49 + 14y$$

$$x^2 = 65 - 14y$$

Ylemmstä suorakulmaisesta kolmiosta saadaan, että

$$\cos 62,3558...^{\circ} = \frac{y}{4} \quad || \cdot 4$$

$$y = 4 \cdot \cos 62,3558...^{\circ}$$

$$y = 1,8559...$$

Sijoitetaan $y = 1,8559\dots$ yhtälöön $x^2 = 65 - 14y$.

$$x^2 = 65 - 14 \cdot 1,8559\dots$$

$$x^2 = 39,0171\dots$$

$$x = (\pm) \sqrt{39,0171\dots}$$

$$x = 6,2463\dots$$

$$x \approx 6,25$$

Kirkot ovat noin 6,25 kilometrin päässä toisistaan.

Vastaus: 6,25 km:n etäisyydellä toisistaan

266. a) Ratkaistaan sivun x pituus kosinilauseella.

$$x^2 = 3,2^2 + 6,6^2 - 2 \cdot 3,2 \cdot 6,6 \cdot \cos 121,9^\circ$$

$$x^2 = 76,1212\dots$$

$$x = (\pm) \sqrt{76,1212\dots}$$

$$x = 8,724\dots$$

$$x \approx 8,7$$

Sivun x pituus on noin 8,7 m.

Vastaus: $x \approx 8,7$ m

b) Ratkaistaan sivun x pituus kosinilauseella.

$$4,7^2 = 5,3^2 + x^2 - 2 \cdot 5,3 \cdot x \cdot \cos 52,9^\circ$$

$$22,09 = 28,09 + x^2 - 6,394...x$$

$$x^2 - 6,394...x + 6 = 0 \quad || a=1, b=-6,394..., c=6$$

Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan tai ratkaistaan yhtälö symbolisen laskennan yhtälönratkaisutoiminnolla.

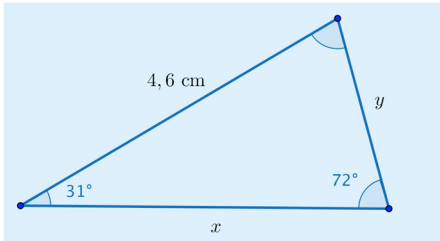
Ratkaisuiksi saadaan

$$x = 1,142... \text{ tai } x = 5,251...$$

Sivun x pituus on noin 1,1 m tai 5,3 m.

Vastaus: $x \approx 1,1 \text{ m}$ tai $x \approx 5,3 \text{ m}$

267. a)



Ratkaistaan sivun y pituus sinilauseella.

$$\begin{aligned}\frac{4,6}{\sin 72^\circ} &= \frac{y}{\sin 31^\circ} \\ y \cdot \sin 72^\circ &= 4,6 \cdot \sin 31^\circ \quad ||: \sin 72^\circ \\ y &= \frac{4,6 \cdot \sin 31^\circ}{\sin 72^\circ} \\ y &= 2,491... \\ y &\approx 2,5\end{aligned}$$

Kolmannen kulman suuruus on $180^\circ - 31^\circ - 72^\circ = 77^\circ$.

Ratkaistaan sivun x pituus sinilauseella.

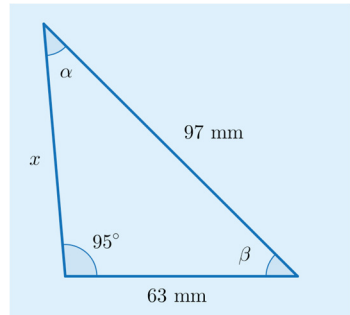
$$\begin{aligned}\frac{4,6}{\sin 72^\circ} &= \frac{x}{\sin 77^\circ} \\ x \cdot \sin 72^\circ &= 4,6 \cdot \sin 77^\circ \quad ||: \sin 72^\circ \\ x &= \frac{4,6 \cdot \sin 77^\circ}{\sin 72^\circ} \\ x &= 4,712... \\ x &\approx 4,7\end{aligned}$$

Sivujen pituudet ovat noin $2,5 \text{ cm}$ ja $4,7 \text{ cm}$.

Vastaus: $2,5 \text{ cm}$ ja $4,7 \text{ cm}$

b) Ratkaistaan kulman α suuruus sinilauseella.

$$\begin{aligned}\frac{97}{\sin 95^\circ} &= \frac{63}{\sin \alpha} \\ 97 \cdot \sin \alpha &= 63 \cdot \sin 95^\circ & \parallel : 97 \\ \sin \alpha &= \frac{63 \cdot \sin 95^\circ}{97} \\ \sin \alpha &= 0,647... \\ \alpha &\approx 40,316...\end{aligned}$$



Kulman β suuruus on $180^\circ - 95^\circ - 40,316...^\circ = 44,683...^\circ$.

Ratkaistaan sivun x pituus sinilauseella.

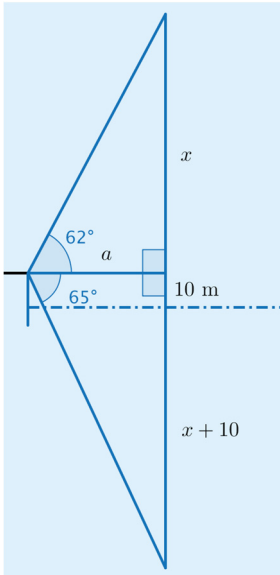
$$\begin{aligned}\frac{97}{\sin 95^\circ} &= \frac{x}{\sin 44,683...^\circ} \\ x \cdot \sin 95^\circ &= 97 \cdot \sin 44,683...^\circ & \parallel : \sin 95^\circ \\ x &= \frac{97 \cdot \sin 44,683...^\circ}{\sin 95^\circ} \\ x &= 68,469... \\ x &= 68\end{aligned}$$

Sivun pituus on noin 68 mm .

Vastaus: 68 mm

268. Kuvassa on kaksi suorakulmaista kolmiota. Ylemmän suorakulmaisen kolmion kulman 62° vastainen kateetti on x ja viereinen kateetti on a .

Alemman suorakulmaisen kolmion kulman 65° vastainen kateetti on $(x + 10) + 10 = x + 20$ ja viereinen kateetti on a .



Muodostetaan tangentin avulla näistä kolmioista kaksi yhtälöä ja ratkaistaan yhtälöparista etäisyys x . (Yhtälöpari voidaan ratkaista myös symbolisen laskennan ohjelman yhtälöparinratkaisutoiminnolla.)

$$\begin{cases} \tan 65^\circ = \frac{x+20}{a} & \parallel \cdot a \\ \tan 62^\circ = \frac{x}{a} & \parallel \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \tan 65^\circ = x+20 & \parallel : \tan 65^\circ \\ a \tan 62^\circ = x & \parallel : \tan 62^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{x+20}{\tan 65^\circ} \\ a = \frac{x}{\tan 62^\circ} \end{cases}$$

$$\frac{x+20}{\tan 65^\circ} = \frac{x}{\tan 62^\circ}$$

$$x \tan 65^\circ = (x+20) \cdot \tan 62^\circ$$

$$x \tan 65^\circ = x \tan 62^\circ + 20 \tan 62^\circ$$

$$x \tan 65^\circ - x \tan 62^\circ = 20 \tan 62^\circ$$

$$x(\tan 65^\circ - \tan 62^\circ) = 20 \tan 62^\circ \quad \parallel : (\tan 65^\circ - \tan 62^\circ)$$

$$x = \frac{20 \tan 62^\circ}{\tan 65^\circ - \tan 62^\circ}$$

$$x = 142,59\dots$$

$$x \approx 140$$

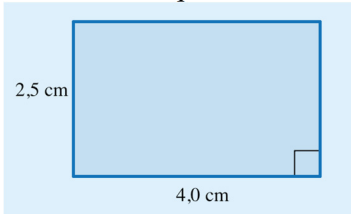
Pilvi on $x + 10 \text{ m} \approx 140 \text{ m} + 10 \text{ m} \approx 150$ metriä järven yläpuolella.

Vastaus: 150 m:n korkeudella

2.4 Nelikulmio

ALOITA PERUSTEISTA

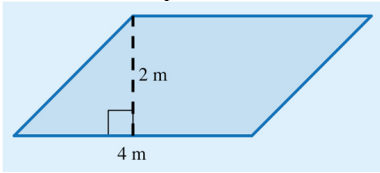
- 269.** a) Neliössä kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat ovat suoria, joten G neliö.
- b) Suorakulmion kaikki kulmat ovat suoria, joten suorakulmioita ovat E ja G.
- c) Neljäkkään kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, joten neljäkkäitä ovat G ja H.
- d) Suunnikkaassa vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia, joten suunnikkaita ovat B, E, G ja H.
- e) Puolisuunnikaalla on täsmälleen kaksi yhdensuuntaista sivua, joten I on puolisuunnikas.
- f) Nelikulmiolla on neljä kulmaa, joten nelikulmioita ovat A, B, E, F, G, H ja I.
- 270.** a) Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.



$$A = a \cdot h = 4,0 \text{ cm} \cdot 2,5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}^2$$

Vastaus: 10 cm^2

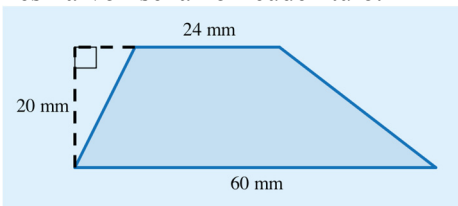
- b) Suunnikkaan pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.



$$A = a \cdot h = 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 8 \text{ m}^2$$

Vastaus: 8 m^2

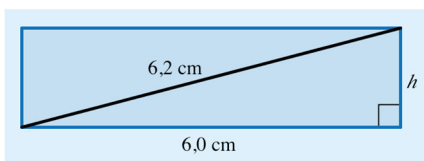
- c) Puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvon sekä korkeuden tulo.



$$A = \frac{a+b}{2} h = \frac{24 \text{ mm} + 60 \text{ mm}}{2} \cdot 20 \text{ mm} = 840 \text{ mm}^2$$

Vastaus: 840 mm^2

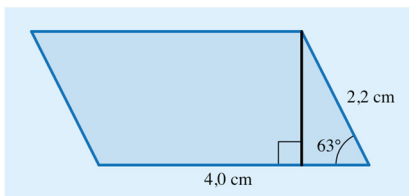
271. a) Suorakulmion korkeus h lasketaan Pythagoraan lauseella.



$$\begin{aligned}h^2 + 6,0^2 &= 6,2^2 \\h^2 &= 6,2^2 - 6,0^2 \\h &= (\pm) \sqrt{6,2^2 - 6,0^2} \\h &= \sqrt{2,44} \\h &= 1,562... \\h &\approx 1,6\end{aligned}$$

Vastaus: $h \approx 1,6$ cm

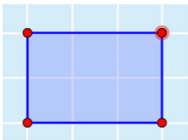
- b) Suunnikkaan korkeus h lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta.



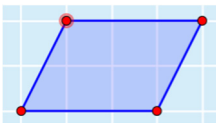
$$\begin{aligned}\sin 63^\circ &= \frac{h}{2,2} \quad || \cdot 2,2 \\h &= 2,2 \cdot \sin 63^\circ \\h &= 1,960... \\h &\approx 2,0\end{aligned}$$

Vastaus: $h \approx 2,0$ cm

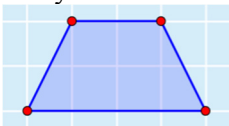
272. a) Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo. Pinta-alaksi saadaan 6 valitsemalla esimerkiksi kannaksi 3 ja korkeudeksi 2.



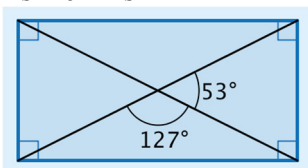
- b) Suunnikkaan pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo. Pinta-alaksi saadaan 6 valitsemalla esimerkiksi kannaksi 3 ja korkeudeksi 2.



- c) Puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen keskiarvon ja korkeuden tulo. Pinta-alaksi saadaan 6, kun esimerkiksi yhdensuuntaisten sivujen keskiarvo on 3 ja korkeus 2. Keskiarvo on 3, kun yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 2 ja 4.



273. a) Esimerkiksi



Väite on väärin.

Neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan kohtaan.

Vastaus: väärin, neljäkkään

- b) Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuria. Väite on oikein.

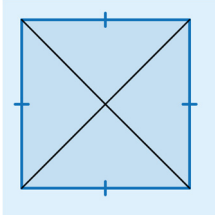
Vastaus: oikein

- c) Neljäkkään vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia, joten sillä ei ole täsmälleen kahta yhdensuuntaista sivua. Väite on väärin.

Puolisuunnikkaassa on täsmälleen kaksi yhdensuuntaista sivua.

Vastaus: väärin, puolisuunnikkaassa

- d) Kun piirretään neliön lävistäjät, muodostuu neljä tasakylkistä kolmiota.

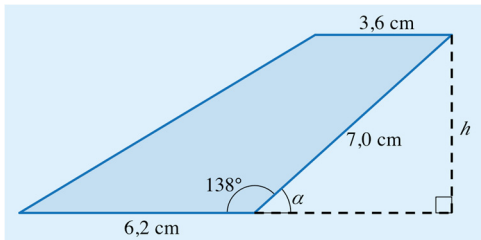


Väite on väärin.

Neliö koostuu neljästä tasakylkisestä kolmiosta.

Vastaus: väärin, tasakylkisestä

274.



- a) Kulma α on kulman 138° vieruskulma, joten $\alpha = 180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$.

Ratkaistaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\sin 42^\circ = \frac{h}{7,0} \quad \| \cdot 7,0$$

$$h = 7,0 \cdot \sin 42^\circ$$

$$h = 4,683\dots$$

$$h \approx 4,7$$

Korkeus h on noin 4,7 cm

Vastaus: $h \approx 4,7$ cm

- b) Puolisuunnikkaan pinta-ala on

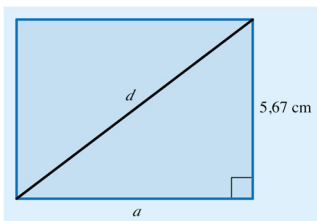
$$A = \frac{a+b}{2} h = \frac{3,6 \text{ cm} + 6,2 \text{ cm}}{2} \cdot 4,683\dots \text{ cm}$$

$$= 22,951\dots \text{ cm}^2 \approx 23 \text{ cm}^2$$

Vastaus: 23 cm^2

VAHVISTA OSAAMISTA

275. Piirretään mallikuva.



- a) Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo, joten kanta a voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\begin{aligned} A &= a \cdot h. \\ 42,3 &= a \cdot 5,67 \\ a \cdot 5,67 &= 42,3 \quad \| : 5,67 \\ a &= \frac{42,3}{5,67} = 7,460... \end{aligned}$$

Kannan pituus on noin 7,46 cm.

Vastaus: 7,46 cm

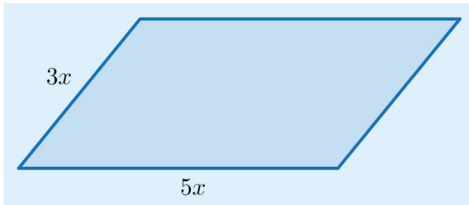
- b) Suorakulmion lävistäjän pituus d saadaan Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + h^2 \\ d^2 &= 7,460...^2 + 5,67^2 \\ d^2 &= 87,805... \\ d &= (\pm) \sqrt{87,805...} \\ d &= 9,370... \\ d &\approx 9,37 \end{aligned}$$

Lävistäjän pituus on noin 9,37 cm.

Vastaus: 9,37 cm

276. Suunnikkaan sivujen pituuksien suhde on 3:5. Merkitään suunnikkaan sivujen pituuksia $3x$ ja $5x$.



Piiri on 18,6 cm, joten muodostetaan yhtälö suunnikkaan piirille ja ratkaistaan siitä pituus x .

$$3x + 5x + 3x + 5x = 18,6$$

$$16x = 18,6 \quad || :16$$

$$x = 1,162\dots$$

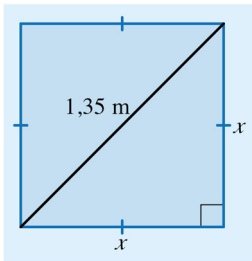
Suunnikkaan sivujen pituudet ovat

$$3x = 3 \cdot 1,162\dots \text{ cm} = 3,487\dots \text{ cm} \approx 3,49 \text{ cm ja}$$

$$5x = 5 \cdot 1,162\dots \text{ cm} = 5,812\dots \text{ cm} \approx 5,81 \text{ cm.}$$

Vastaus: 3,49 cm ja 5,81 cm

277. a) Lasketaan neliön lävitäjän avulla neliön sivun pituus x Pythagoraan lauseella.



$$x^2 + x^2 = 1,35^2$$

$$2x^2 = 1,8225 \quad || : 2$$

$$x^2 = 0,91125$$

$$x = (\pm)\sqrt{0,91125}$$

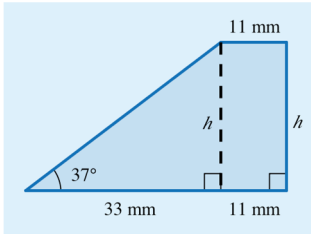
$$x = 0,954\dots$$

Neliön sivun pituus $x = 0,954\dots \text{ m}$.

Neliön pinta-ala on $x^2 = (0,954\dots \text{ m})^2 = 0,91125 \text{ m}^2 \approx 0,911 \text{ m}^2$.

Vastaus: $0,911 \text{ m}^2$

- b) Puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvon sekä korkeuden tulo.



Lasketaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta, jossa 37° :n kulman viereinen kateetti on $44 \text{ mm} - 11 \text{ mm} = 33 \text{ mm}$.

Ratkaistaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 37^\circ &= \frac{h}{33} \quad || \cdot 33 \\ h &= 33 \cdot \tan 37^\circ \\ h &= 24,876\dots\end{aligned}$$

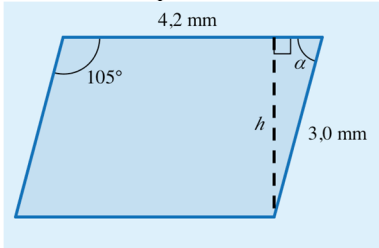
Korkeus $h = 24,876\dots \text{ mm}$.

Puolisuunnikkaan pinta-ala

$$\begin{aligned}A &= \frac{a+b}{2} h = \frac{11 \text{ mm} + 44 \text{ mm}}{2} \cdot 24,876\dots \text{ mm} \\ &= 683,850\dots \text{ mm}^2 \approx 680 \text{ mm}^2\end{aligned}$$

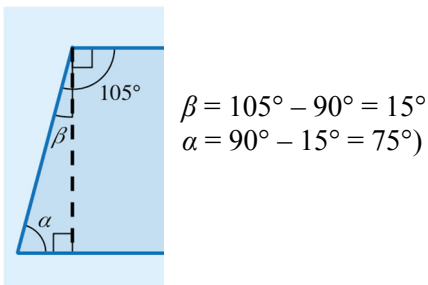
Vastaus: 680 mm^2

c) Suunnikkaan pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.



Koska suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on 180° , niin
 $\alpha = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

(Kulman voi myös laskea piirtämällä suorakulmainen kolmio 105° :n kulman päälle.



$$\beta = 105^\circ - 90^\circ = 15^\circ$$
$$\alpha = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

Ratkaistaan suunnikkaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\sin 75^\circ = \frac{h}{3,0} \quad || \cdot 3,0$$

$$h = 3,0 \cdot \sin 75^\circ$$

$$h = 2,897\dots$$

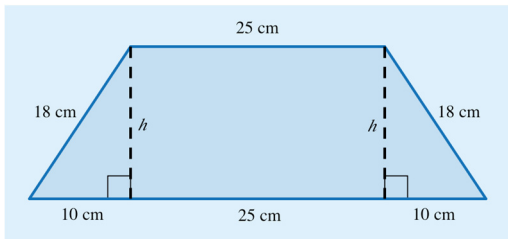
Suunnikkaan pinta-ala

$$A = a \cdot h = 4,2 \text{ mm} \cdot 2,897\dots \text{ mm} = 12,170\dots \text{ mm}^2 \approx 12 \text{ mm}^2$$

Vastaus: 12 mm^2

- d) Puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvon sekä korkeuden tulo.

Tasasivuisen puolisuunnikkaan korkeusjanat muodostavat kuvan mukaiset kaksi samanlaista suorakulmaista kolmiota.



Lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta puolisuunnikkaan korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$h^2 + 10^2 = 18^2$$

$$h^2 = 18^2 - 10^2$$

$$h^2 = 224$$

$$h = (\pm) \sqrt{224}$$

$$h = 14,966\dots$$

Puolisuunnikkaan korkeus on $14,966\dots\text{cm}$ ja pinta-ala

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{45\text{ cm} + 25\text{ cm}}{2} \cdot 14,966\dots\text{cm} \\ &= 523,832\dots\text{cm}^2 \approx 520\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 520 cm^2

- 278.** Aluksi suorakulmion muotoisen pyyhkeen kanta (pituus) on 140 cm ja korkeus (leveys) on 70 cm.

Tällöin sen pinta-ala on $A_1 = 140 \text{ cm} \cdot 70 \text{ cm} = 9\,800 \text{ cm}^2$.

Kun pyyhe kutistuu pesussa, niin kanta (pituus) pienenee 4 %, jolloin lopuksi se on $0,96 \cdot 140 \text{ cm} = 134,4 \text{ cm}$.

Vastaavasti korkeus (leveys) pienenee 2 %, joten lopuksi se on $0,98 \cdot 70 \text{ cm} = 68,6 \text{ cm}$.

Pyyhkeen pinta-ala on lopuksi $A_2 = 134,4 \text{ cm} \cdot 68,6 \text{ cm} = 9\,219,84 \text{ cm}^2$.

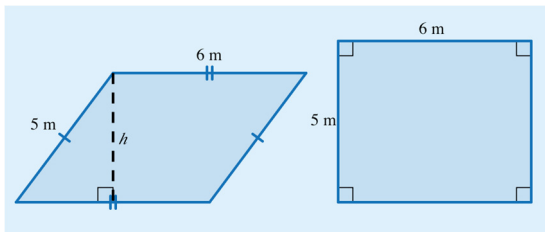
Lasketaan, kuinka monta prosenttia uusi pinta-ala on vanhasta.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{9219,84}{9800} = 0,9408$$

Pyyhkeen pinta-ala on pienentynyt $100 \% - 94,08 \% = 5,92 \% \approx 6 \%$.

Vastaus: 6 %.

279.



Sekä suunnikkaan että suorakulmion pinta-ala lasketaan samalla tavalla kannan ja korkeuden tulona.

Suorakulmion pinta-ala voidaan laskea.

$$\text{Se on } A = a \cdot h = 6 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 30 \text{ m}^2.$$

Suunnikkaan pinta-alaa ei voida laskea tehtävässä annettujen tietojen avulla.

Suunnikkaan kanta tiedetään, se on 6 m, kuten suorakulmiollakin.

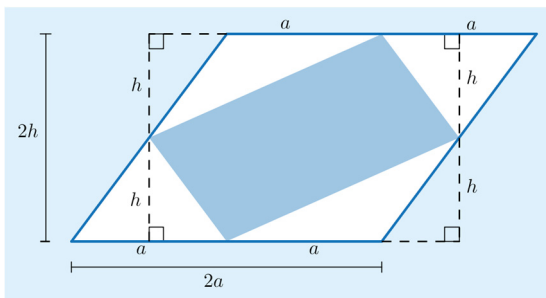
Suunnikkaan korkeus h lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta, jossa hypotenuusa on 5 m. Tällöin korkeus h on pienempi kuin hypotenuusa eli pienempi kuin 5 m.

Suunnikkaan pinta-ala on $A = a \cdot h = 6 \text{ m} \cdot h$, missä h on pienempi kuin 5 m. Tällöin pinta-ala on pienempi kuin 30 m^2 eli suunnikkaan pinta-ala on pienempi kuin suorakulmion pinta-ala.

Suorakulmion pinta-ala on suurempi, koska molemmilla on sama kanta, mutta suorakulmion korkeus on 5 m ja suunnikkaan korkeus on alle 5 m.

Vastaus: suorakulmiona

280. Täydennetään mallikuvaa.



Suunnikkaan pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo, joten ison suunnikkaan pinta-ala on $A_{\text{iso}} = 2a \cdot 2h = 4ah$.

Pienen väritetyn suunnikkaan pinta-ala saadaan, kun ison suunnikkaan pinta-alasta vähennetään neljän valkoisen nurkkakolmion pinta-ala.

Yhden nurkkakolmion korkeus on $\frac{2h}{2} = h$ ja kanta on $\frac{2a}{2} = a$.

Nurkkakolmion pinta-ala on $A_{\text{kolmio}} = \frac{ah}{2}$

Pienen suunnikkaan pinta-ala on

$$A_{\text{pieni}} = A_{\text{iso}} - 4 \cdot A_{\text{kolmio}} = 4ah - 4 \cdot \frac{ah}{2} = 4ah - 2ah = 2ah.$$

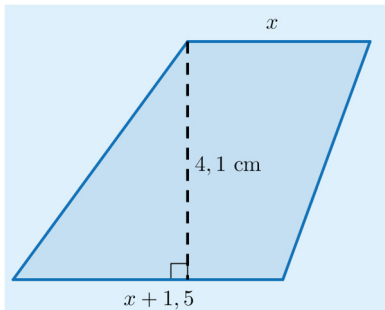
Pienen väritetyn suunnikkaan pinta-alan suhde ison suunnikkaan pinta-

$$\frac{A_{\text{pieni}}}{A_{\text{iso}}} = \frac{2ah}{4ah} = \frac{1}{2},$$

joten alkuperäisestä suunnikkaasta on väritetty puolet.

Vastaus: puolet

281. Piirretään mallikuva.



Merkitään puolisuunnikkaan lyhempää sivua kirjaimella x . Pidempi sivu on tällöin $x + 1,5$ (cm). Puolisuunnikkaan korkeus on 4,1 cm, joten pinta-

$$\text{ala on } A = \frac{a+b}{2} h = \frac{x + (x + 1,5)}{2} \cdot 4,1.$$

Pinta-ala tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x .

$$\frac{x + (x + 1,5)}{2} \cdot 4,1 = 16$$

$$\frac{x + x + 1,5}{2} \cdot 4,1 = 16$$

$$\frac{2x + 1,5}{2} \cdot 4,1 = 16 \quad || \cdot 2$$

$$(2x + 1,5) \cdot 4,1 = 32$$

$$4,1 \cdot (2x + 1,5) = 32$$

$$8,2x + 6,15 = 32$$

$$8,2x = 32 - 6,15$$

$$8,2x = 25,85 \quad || : 8,2$$

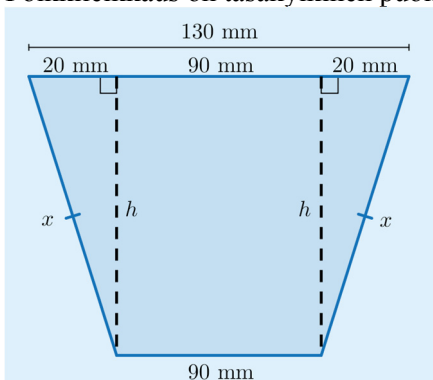
$$x = \frac{25,85}{8,2} = 3,152\dots$$

Lyhemmän sivun pituus on $x = 3,152\dots \text{ cm} \approx 3,2 \text{ cm}$ ja
pidemmän sivun pituus on $x + 1,5 \text{ cm} = 3,152\dots \text{ cm} + 1,5 \text{ cm}$
 $= 4,652\dots \text{ cm} \approx 4,7 \text{ cm}$.

Sivujen pituudet ovat noin 3,2 cm ja 4,7 cm.

Vastaus: 3,2 cm ja 4,7 cm

282. Poikkileikkaus on tasakylkinen puolisuunnikas. Täydennetään mallikuvaa.



Puolisuunnikkaan pinta-ala tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö, josta ratkaistaan puolisuunnikkaan korkeus h .

$$\begin{aligned}\frac{90+130}{2} \cdot h &= 11000 \quad || \cdot 2 \\ (90+130) \cdot h &= 22000 \\ 220 \cdot h &= 22000 \quad || : 220 \\ h &= \frac{22000}{220} \\ h &= 100\end{aligned}$$

Ratkaistaan puolisuunnikkaan sivun pituus x suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned}x^2 &= h^2 + 20^2 \\ x^2 &= 100^2 + 20^2 \\ x^2 &= 10\,400 \\ x &= (\pm) \sqrt{10\,400} \\ x &= 101,980...\end{aligned}$$

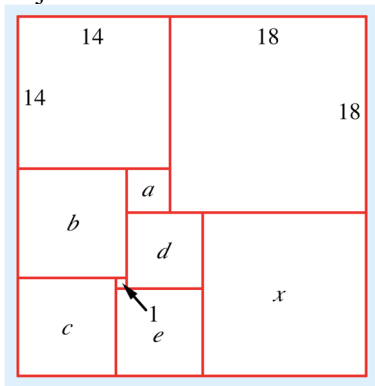
Sivun pituus $x = 101,980...$ mm.

Sivun pituuden on oltava millimetrin tarkkuudella vähintään 102 mm, jotta vesi ei tule yli.

Vastaus: vähintään 102 mm

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 283.** Täydennetään kuvaa merkitsemällä tuntemattomia neliöitä kirjaimilla kirjaimesta a alkaen.



Neliön a sivun pituus on $18 - 14 = 4$.

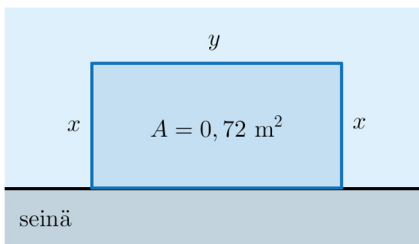
Neliön b sivun pituus on $14 - 4 = 10$.

Neliön c sivun pituus on $10 - 1 = 9$.

Ison suorakulmion vasemman pystysuuntaisen sivun muodostaa neliöt, joiden sivujen pituudet ovat 14, 10 ja 9, joten sen pituus on $14 + 10 + 9 = 33$. Sama pituus on myös $18 + x$, joten saadaan yhtälö $18 + x = 33$, josta $x = 33 - 18 = 15$.

Vastaus: $x = 15$

284. Piirretään mallikuva. Suorakulmion pinta-ala on $0,72 \text{ m}^2$ ja aitamateriaalia kuluu 2,4 metriä. Merkitään suorakulmion sivujen pituuksia kuvan mukaisesti kirjaimilla x ja y .



Seinän sivulle ei tarvita aitaa, joten aitaa tarvitaan kolmelle muulle sivulle: $x + x + y = 2,4$. Ratkaistaan tästä kirjain y kirjaimen x lausekkeena.

$$x + x + y = 2,4$$

$$2x + y = 2,4$$

$$y = 2,4 - 2x$$

Suorakulmion pinta-ala on $A = x \cdot y = x \cdot (2,4 - 2x) = 0,72$.

Ratkaistaan tästä yhtälöstä sivun pituus x .

$$x \cdot (2,4 - 2x) = 0,72$$

$$2,4x - 2x^2 = 0,72$$

$$-2x^2 + 2,4x - 0,72 = 0$$

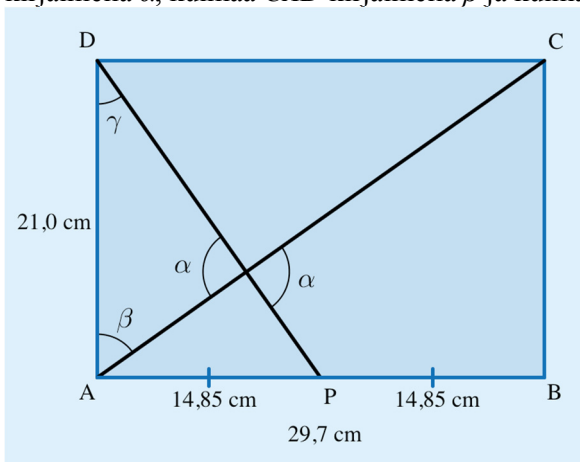
$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2,4 \pm \sqrt{2,4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-0,72)}}{2 \cdot (-2)} \\ &= \frac{-2,4 \pm \sqrt{5,76 - 5,76}}{-4} \\ &= \frac{-2,4 \pm \sqrt{0}}{-4} \\ &= \frac{-2,4}{-4} \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

Kun $x = 0,6$, niin $y = 2,4 - 2x = 2,4 - 2 \cdot 0,6 = 1,2$.

Suorakulmion sivujen pituudet ovat siis $0,6 \text{ m} = 60 \text{ cm}$ ja $1,2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$ siten, että 120 cm on seinän suuntaisesti.

Vastaus: 60 cm ja 120 cm

285. Piirretään mallikuva. Merkitään lävistäjän AC ja janan DP välistä kulmaa kirjaimella α , kulmaa CAD kirjaimella β ja kulmaa ADP kirjaimella γ .



Koska piste P on janan AB keskipisteessä, janan AP pituus on

$$\frac{29,7 \text{ cm}}{2} = 14,85 \text{ cm}.$$

Lasketaan kulman β suuruus suorakulmaisesta kolmiosta ACD tangentin avulla.

$$\tan \beta = \frac{29,7}{21,0}$$

$$\tan \beta = 1,414\dots$$

$$\beta = 54,737\dots^\circ$$

Lasketaan kulman γ suuruus suorakulmaisesta kolmiosta APD tangentin avulla.

$$\tan \gamma = \frac{14,85}{21,0}$$

$$\tan \gamma = 0,707\dots$$

$$\gamma = 35,265\dots^\circ$$

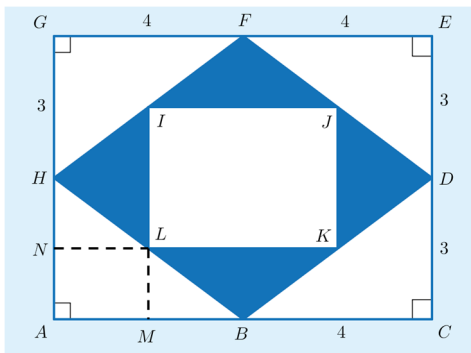
Koska kolmion kulmien summa on 180° , niin

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 54,737\dots^\circ - 35,265\dots^\circ = 89,997^\circ \approx 90,0^\circ$$

Vastaus: $90,0^\circ$

- 286.** Kuvion valkoiset kolmiot ABH , BCD , DEF ja FGH ovat samanlaisia suorakulmaisia kolmiota, joiden kateettien pituudet ovat 3 ja 4.

Täydennetään kuviota.



Koska piste L on janan keskipiste, niin piste M jakaa janan AB kahteen yhtä pitkään osaan.

Vastaavasti piste N jakaa janan HA kahteen yhtä pitkään osaan.

Janan MB pituus on $\frac{4}{2} = 2$ ja janan HN pituus on $\frac{3}{2} = 1,5$.

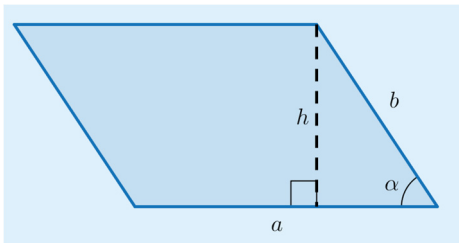
Kun vastaava jako tehdään muille suorakulmaisille kolmioille, suorakulmion $LKJI$ kannaksi saadaan $2 + 2 = 4$ ja korkeudeksi $1,5 + 1,5 = 3$.

Väritetyn alueen pinta-ala saadaan, kun suorakulmion $ACEG$ pinta-alasta vähennetään suorakulmaisten kolmioiden ABH , BCD , DEF ja FGH sekä suorakulmion $LKJI$ pinta-alat.

$$A = 8 \cdot 6 - \left(4 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + 4 \cdot 3 \right) = 48 - (24 + 12) = 48 - 36 = 12$$

Vastaus: 12

287. On perusteltava kaava: Suunnikkaan pinta-ala saadaan, kun kerrotaan vierekkäisten sivujen tulo suunnikkaan terävän kulman sinillä. Merkitään suunnikkaan terävää kulmaa kirjaimella α ja sen vierekkäisiä sivuja kirjaimilla a ja b .



Suunnikkaan pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo $A = a \cdot h$.

Määritetään suunnikkaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} \quad \parallel \cdot b$$
$$h = b \cdot \sin \alpha$$

Suunnikkaan pinta-ala on tällöin

$$A = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin \alpha = ab \cdot \sin \alpha$$

Siis suunnikkaan pinta-ala saadaan, kun kerrotaan vierekkäisten sivujen tulo $a \cdot b$ suunnikkaan terävän kulman α sinillä.

2.5 Muita monikulmioita

ALOITA PERUSTEISTA

- 288.** Monikulmio on säännöllinen, jos kaikki sen sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat yhtä suuria.

Säännölliset monikulmiot:

B on neliö, D on säännöllinen 5-kulmio, E on tasasivuinen kolmio ja F on säännöllinen 8-kulmio.

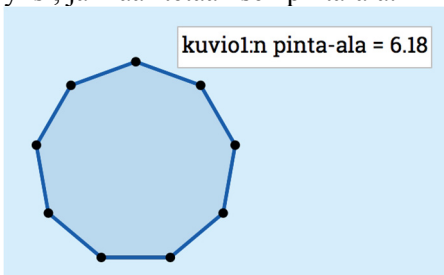
Vastaus: B, D, E ja F

- 289.** a) Säännöllisen 9-kulmion kulmien summa on $(9 - 2) \cdot 180^\circ = 7 \cdot 180^\circ = 1260^\circ$.

Yhden kulman suuruus on $\frac{1260^\circ}{9} = 140^\circ$.

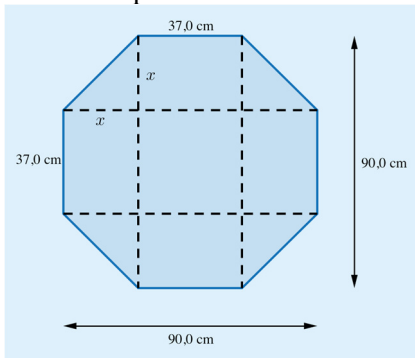
Vastaus: 1260° , 140°

- b) Piirretään appletin avulla säännöllinen 9-kulmio, jonka sivun pituus on yksi, ja määritetään sen pinta-ala.



Pinta-ala on 6,18.

290. Jaetaan stop-merkki kulmista vaaka- ja pystysuuntaisilla janoilla.



Merkkiin muodostuu neljä samanlaista kolmiota, neljä samanlaista suorakulmiota ja neliö. Kolmiot ovat suorakulmaisia ja tasakylkisiä. Merkitään kolmion kyljen pituutta kirjaimella x .

Koska stop-merkin korkeus on 90,0 cm, saadaan yhtälö
 $x + 37,0 + x = 90,0$. Ratkaistaan yhtälöstä kyljen pituus x .

$$x + 37,0 + x = 90,0$$

$$2x = 90,0 - 37,0$$

$$2x = 53,0 \quad \| : 2$$

$$x = 26,5$$

Yhden kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{26,5 \text{ cm} \cdot 26,5 \text{ cm}}{2} = 351,125 \text{ cm}^2.$$

Yhden suorakulmion pinta-ala on

$$A_{\text{suorakulmio}} = 26,5 \text{ cm} \cdot 37,0 \text{ cm} = 980,5 \text{ cm}^2.$$

Neliön pinta-ala on

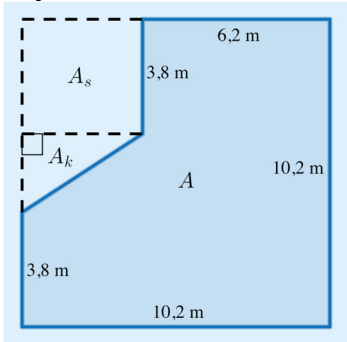
$$A_{\text{neliö}} = 37,0 \text{ cm} \cdot 37,0 \text{ cm} = 1369 \text{ cm}^2.$$

Stop-merkin pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= 4A_{\text{kolmio}} + 4A_{\text{suorakulmio}} + A_{\text{neliö}} \\ &= 4 \cdot 351,125 \text{ cm}^2 + 4 \cdot 980,5 \text{ cm}^2 + 1369 \text{ cm}^2 = 6695,5 \text{ cm}^2 \approx 6700 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Vastaus: 6700 cm^2

291. Täydennetään kuviota.



Talon lattia on monikulmio, jonka pinta-ala A saadaan, kun neliön pinta-alasta A_n vähennetään ”ylimääräinen alue”. Se koostuu suorakulmiosta A_s ja suorakulmaisesta kolmiosta A_k .

Suorakulmion sivut ovat $10,2 \text{ m} - 6,2 \text{ m} = 4 \text{ m}$ ja $3,8 \text{ m}$.

Suorakulmion pinta-ala on $A_s = 4 \text{ m} \cdot 3,8 \text{ m} = 15,2 \text{ m}^2$.

Kolmion kanta on 4 m ja korkeus $10,2 \text{ m} - 3,8 \text{ m} - 3,8 \text{ m} = 2,6 \text{ m}$.

Kolmion pinta-ala on $A_k = \frac{4 \text{ m} \cdot 2,6 \text{ m}}{2} = 5,2 \text{ m}^2$.

Neliön pinta-ala on $A_n = (10,2 \text{ m})^2 = 104,04 \text{ m}^2$.

Monikulmion pinta-ala on

$$A = A_n - A_s - A_k = 104,04 \text{ m}^2 - 15,2 \text{ m}^2 - 5,2 \text{ m}^2 = 83,64 \text{ m}^2.$$

Talon lattiasta laatoitetaan $\frac{1}{8}$, joten laatoituksen pinta-ala on

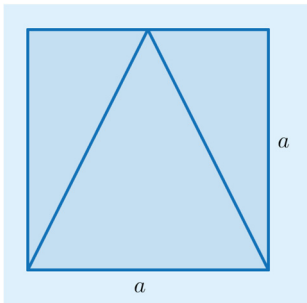
$$\frac{1}{8} A = \frac{1}{8} \cdot 83,64 \text{ m}^2 = 10,455 \text{ m}^2 \approx 10,5 \text{ m}^2$$

Laatoituksen pinta-ala on $10,5 \text{ m}^2$.

Vastaus: $10,5 \text{ m}^2$

VAHVISTA OSAAMISTA

292. Piirretään mallikuva. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella a .



Neliön pinta-ala on tällöin $A_{\text{neliö}} = a^2$.

Kolmion korkeus on yhtä suuri kuin neliön sivun pituus a ,

joten kolmion pinta-ala on $A_{\text{kolmio}} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$.

Kolmion pinta-alan suhde neliön pinta-alaan on

$$\frac{A_{\text{kolmio}}}{A_{\text{neliö}}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2}.$$

Vastaus: 1:2

293. Säännöllisen seitsemänkulmion sivujen pituudet kasvavat 25 %.

- a) Säännöllisen monikulmion kulmien suuruudet ovat aina samat. Ne eivät riipu sivujen pituuksista, joten jos sivujen pituudet kasvavat, pysyvät kulmien suuruudet silti samoina.

Vastaus: säilyvät ennallaan

- b) Säännöllisen monikulmion jokainen sivu on yhtä pitkä.
Olkoon säännöllisen 7-kulmion sivun pituus aluksi a ,
jolloin piiri on $7a$.

Kun sivun pituus kasvaa 25 %, on sivujen pituudet lopuksi $1,25a$. Piiri on tällöin $7 \cdot 1,25 a$, mikä on 1,25-kertainen alkuperäiseen piiriin $7a$ verrattuna. Piirin pituus on kasvanut 1,25-kertaiseksi eli se on kasvanut 25 %.

Vastaus: 25 %.

- c) Alkuperäinen 7-kulmio ja suurempi 7-kulmio ovat yhdenmuotoisia, koska ne ovat molemmat säännöllisiä 7-kulmioita.

Mittakaava on vastinsivujen pituuksien suhde eli $\frac{a}{1,25a} = \frac{1}{1,25}$.

Olkoon alkuperäisen 7-kulmion pinta-ala A_1 ja suuremman 7-kulmion pinta-ala A_2 . Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, joten saadaan

$$\text{yhtälö } \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{1}{1,25} \right)^2.$$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä pinta-ala A_2 .

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{1}{1,25} \right)^2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{1,25^2}$$

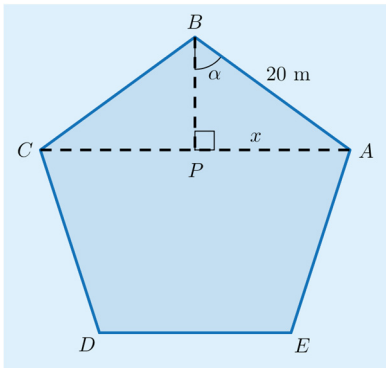
$$A_2 = 1,25^2 \cdot A_1$$

$$A_2 = 1,5625 \cdot A_1$$

Uusi pinta-ala A_2 on 1,5625-kertainen alkuperäiseen pinta-alaan A_1 verrattuna, joten pinta-ala on kasvanut 56,25 % $\approx$ 56 %

Vastaus: n. 56 %.

294. a) Piirretään mallikuva.



Reitti kahta sivua pitkin esimerkiksi nurkasta A nurkkaan C on matka $AB + BC$. Yhteensä matka on $20 \text{ m} + 20 \text{ m} = 40 \text{ m}$.

Lasketaan matka nurkasta A nurkkaan C suorinta reittiä eli janan AC pituus. Kolmio ABC on tasakylkinen, joten sen korkeusjana jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon.

Viisikulmion kulmien summa on $(5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$, joten säännöllisen viisikulmion kulman CBA suuruus on $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$.

Kulma α on puolet tästä eli $\alpha = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$.

Lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta janan x pituus sinin avulla.

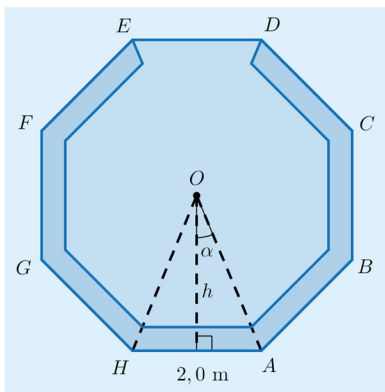
$$\begin{aligned}\sin 54^\circ &= \frac{x}{20} \quad || \cdot 20 \\ x &= 20 \cdot \sin 54^\circ \\ x &= 16,180\dots\end{aligned}$$

Jana x on puolet janan AC pituudesta, joten uitava matka on $2 \cdot x = 2 \cdot 16,180\dots \text{ m} = 32,360\dots \text{ m}$.

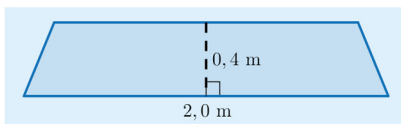
Reitti reunoja pitkin on $40 \text{ m} - 32,360\dots \text{ m} = 7,639\dots \text{ m} \approx 8 \text{ m}$ pidempi kuin suurin reitti.

Vastaus: 8 m

b) Täydennetään mallikuvaa.



Penkit muodostavat seitsemän samanlaista tasakylkistä puolisuunnikasta. Tasakylkisen puolisuunnikkaan korkeus on $40\text{ cm} = 0,4\text{ m}$ ja toisen yhdensuuntaisen sivun pituus on $2,0\text{ m}$.



Toisen yhdensuuntaisen sivun pituuden selvittämiseksi lasketaan aluksi tasakylkisen kolmion HAO korkeus h .

Keskuskulman suuruus on 360° , joten kolmion huippukulman suuruus

on $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. Kulma α on puolet huippukulmasta eli

$$\alpha = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ.$$

Tasakylkisen kolmion korkeusjana jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon, jonka kanta on $\frac{2,0\text{ m}}{2} = 1,0\text{ m}$.

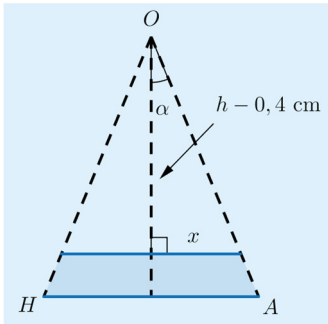
Ratkaistaan korkeus h tangentin avulla.

$$\tan 22,5^\circ = \frac{1,0}{h} \quad || \cdot h$$

$$h \cdot \tan 22,5^\circ = 1,0 \quad || : \tan 22,5^\circ$$

$$h = \frac{1,0}{\tan 22,5^\circ}$$

$$h = 2,414\dots$$



Ratkaistaan puolisuunnikkaan tuntemattoman yhdensuuntaisen sivun pituuden puolikas x tangentin avulla.

$$\tan 22,5^\circ = \frac{x}{h - 0,4} \quad || \cdot (h - 0,4)$$

$$x = (h - 0,4) \cdot \tan 22,5^\circ$$

$$x = (2,414\dots - 0,4) \cdot \tan 22,5^\circ$$

$$x = 2,014\dots \cdot \tan 22,5^\circ$$

$$x = 0,834\dots$$

Puolisuunnikkaan toisen yhdensuuntaisen sivun pituus on
 $2x = 2 \cdot 0,834\dots \text{ m} = 1,668\dots \text{ m}$.

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A_{\text{puolisuunnikas}} = \frac{a+b}{2} h = \frac{2,0 \text{ m} + 1,668\dots \text{ m}}{2} \cdot 0,4 \text{ m} = 0,733\dots \text{ m}^2.$$

Penkkien pinta-ala on $7 \cdot A_{\text{puolisuunnikas}} = 7 \cdot 0,7333\dots \text{ m}^2 = 5,136\dots \text{ m}^2$.

Säännöllisen kahdeksankulmion pinta-ala on kahdeksan tasakylkisen kolmion yhteenlaskettu pinta.

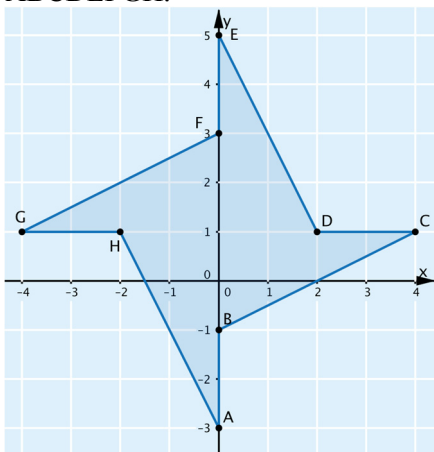
$$A_{8\text{-kulmio}} = 8 \cdot \frac{ah}{2} = 8 \cdot \frac{2,0 \text{ m} \cdot 2,414... \text{ m}}{2} = 19,313... \text{ m}^2$$

Penkkien osuus kodan pinta-alasta on

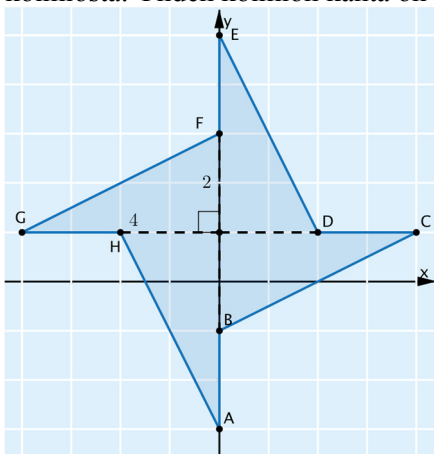
$$\frac{5,136... \text{ m}^2}{19,313... \text{ m}^2} = 0,265... \approx 0,27 = 27 \text{ \%}.$$

Vastaus: 27 %

295. Piirretään koordinaatistoon pisteet $A(0, -3)$, $B(0, -1)$, $C(4, 1)$, $D(2, 1)$, $E(0, 5)$, $F(0, 3)$, $G(-4, 1)$ ja $H(-2, 1)$. Piirretään pisteiden kautta 8-kulmio ABCDEFGH.



Kuvion pinta-ala muodostuu neljästä yhtenevästä suorakulmaisesta kolmiosta. Yhden kolmion kanta on 2 ruutua ja korkeus 4 ruutua.



Kolmion pinta-ala on

$$A_k = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4.$$

Koko 8-kulmion pinta-ala on $4 \cdot A_k = 4 \cdot 4 = 16$.

8-kulmion piirin määrittämistä varten lasketaan yhden kolmion hypotenuusan pituus x Pythagoraan lauseella.

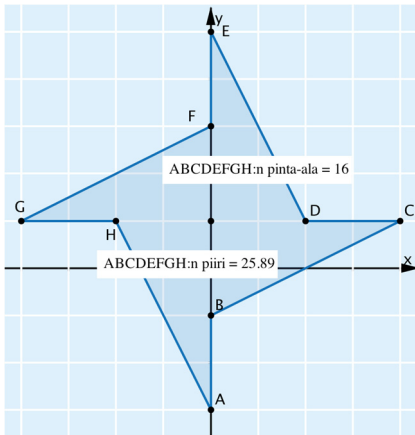
$$x^2 = 2^2 + 4^2$$

$$x^2 = 20$$

$$x = (\pm)\sqrt{20}$$

8-kulmion piiri on $4 \cdot x + 4 \cdot 2 = 4 \cdot \sqrt{20} + 4 \cdot 2 = 25,888... \approx 25,9$.

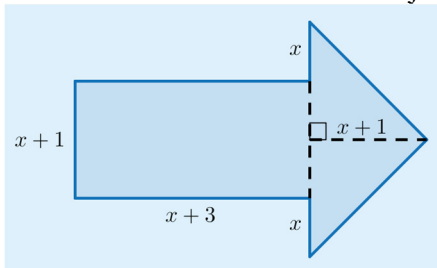
Tarkistus:



Vastaus: pinta-ala 16,0 ja piiri n. 25,9

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

296. Kuvio muodostuu suorakulmiosta ja tasakylkisestä kolmiosta.



Suorakulmion kanta on $x+3$ ja korkeus $x+1$, joten sen pinta-ala on
 $A_{\text{suorakulmio}} = (x+3)(x+1) = x^2 + x + 3x + 3 = x^2 + 4x + 3$.

Tasakylkisen kolmion kanta on $x + x + 1 + x = 3x + 1$ ja korkeus $x+1$, joten sen pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{(3x+1)(x+1)}{2} = \frac{3x^2 + 3x + x + 1}{2} = \frac{3x^2 + 4x + 1}{2}.$$

Kuvion pinta-alasta saadaan lauseke

$A = A_{\text{suorakulmio}} + A_{\text{kolmio}} = x^2 + 4x + 3 + \frac{3x^2 + 4x + 1}{2}$. Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä tuntematon x .

$$x^2 + 4x + 3 + \frac{3x^2 + 4x + 1}{2} = 12 \quad || \cdot 2$$

$$2x^2 + 8x + 6 + 3x^2 + 4x + 1 = 24$$

$$5x^2 + 12x + 7 = 24$$

$$5x^2 + 12x - 17 = 0$$

Sijoitetaan kertoimet $a = 5$, $b = 12$ ja $c = -17$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

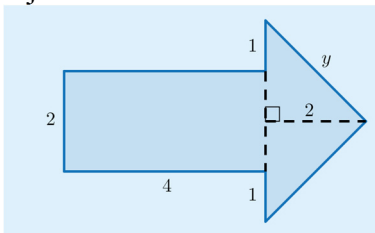
$$\begin{aligned} x &= \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-17)}}{2 \cdot 5} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 340}}{10} \\ &= \frac{-12 \pm \sqrt{484}}{10} = \frac{-12 \pm 22}{10} \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisut ovat

$$x = \frac{-12 + 22}{10} = \frac{10}{10} = 1 \text{ ja } x = \frac{-12 - 22}{10} = \frac{-34}{10} = -\frac{17}{5}.$$

Pituus ei voi olla negatiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

Sijoitetaan $x = 1$ kuvioon.



Tasakylkisen kolmion kyljen pituus y saadaan suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella. Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on 2 ja

toinen on puolet tasakylkisen kolmion kannasta eli $\frac{1+2+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

$$y^2 = 2^2 + 2^2$$

$$y^2 = 8$$

$$y = (\pm)\sqrt{8}$$

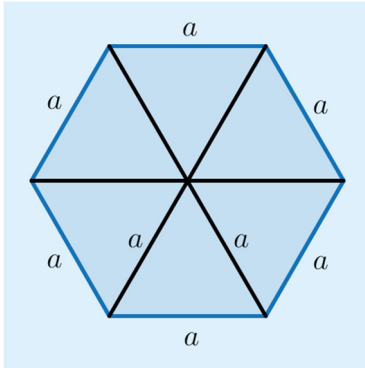
$$y = (\pm)2\sqrt{2}$$

Kuvion piiri on

$$p = 2 + 4 + 1 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1 + 4 = 12 + 4\sqrt{2} = 17,656\dots$$

$$\text{Vastaus: } 12 + 4\sqrt{2} \approx 17,7$$

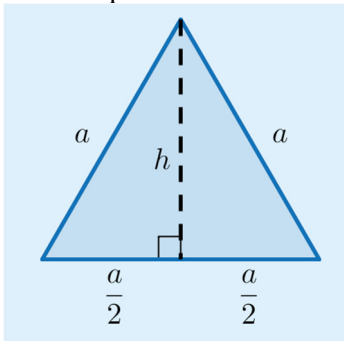
297. Piirretään mallikuva.



Säännöllinen kuusikulmio koostuu kuudesta yhtenevästä tasasivuisesta kolmiosta.

Jos säännöllisen kuusikulmion pinta-ala on 18 cm^2 , niin yhden tasasivuisen kolmion pinta-ala on $\frac{18 \text{ cm}^2}{6} = 3 \text{ cm}^2$.

Piirretään mallikuva yhdestä tasasivuisesta kolmiosta ja määritetään kolmion pinta-ala.



Kolmion korkeus h saadaan ratkaistua Pythagoraan lauseella.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$\frac{a^2}{4} + h^2 = a^2$$

$$h^2 = {}^4)a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = (\pm)\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$$

Tasasivuisen kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ kun kolmion sivun pituus on } a.$$

Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö, josta ratkaistaan sivun pituus a .

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3 \quad | \cdot 4$$

$$a^2 \sqrt{3} = 12 \quad | : \sqrt{3}$$

$$a^2 = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$a^2 = 6,928...$$

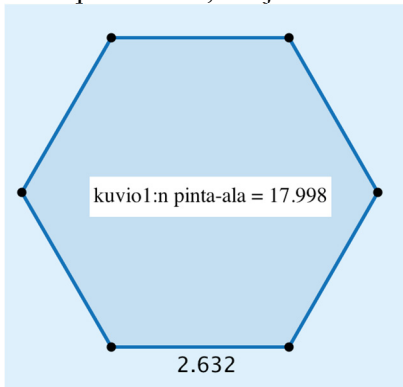
$$a = (\pm)\sqrt{6,928...}$$

$$a = 2,632...$$

$$a \approx 2,6$$

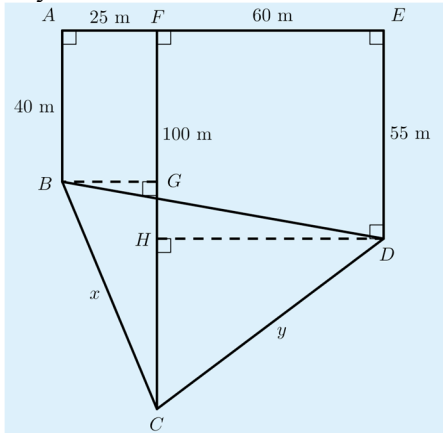
Tasakylkisen kolmion sivun pituus a on samalla myös säännöllisen kuusikulmion sivun pituus a .

Tarkistus: Piirretään sopivalla ohjelmalla säännöllinen kuusikulmio, jonka sivun pituus on 2,632 ja määritetään sen pinta-ala.



Vastaus: 2,6 cm

298. a) Täydennetään mallikuvaa.



Merkitään janaa BC kirjaimella x ja janaa CD kirjaimella y . Lasketaan janan x pituus suorakulmaisesta kolmiosta BCG Pythagoraan lauseella. Suorakulmaisen kolmion BCG kateetin BG pituus on 25 m ja kateetin GC pituus on $100 \text{ m} - 40 \text{ m} = 60 \text{ m}$.

$$x^2 = 25^2 + 60^2$$

$$x^2 = 625 + 3600$$

$$x^2 = 4225$$

$$x = (\pm)\sqrt{4225}$$

$$x = 65$$

Janan BC pituus on 65 m.

Lasketaan janan y pituus suorakulmaisesta kolmiosta HCD Pythagoraan lauseella. Suorakulmaisen kolmion HCD kateetin HD pituus on 60 m ja kateetin HC pituus on $100 \text{ m} - 55 \text{ m} = 45 \text{ m}$.

$$y^2 = 60^2 + 45^2$$

$$y^2 = 3600 + 2025$$

$$y^2 = 5625$$

$$y = (\pm)\sqrt{5625}$$

$$y = 75$$

Janan CD pituus on 75 m.

Vastaus: 65 m ja 75 m

Pisteessä D robotin kääntyä kulman EDC vieruskulman verran. Kulma EDC muodostuu suorasta kulmasta EDH ja kulmasta HDC . Merkitään kulmaa HDC kirjaimella β . Ratkaistaan kulma β suorakulmaisesta kolmiosta HCD tangentin avulla.

$$\tan \beta = \frac{45}{60}$$

$$\tan \beta = 0,75$$

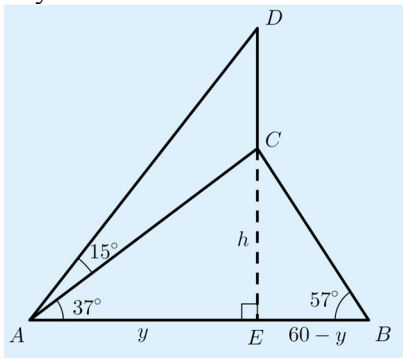
$$\beta = 36,869\dots^\circ$$

$$\beta \approx 37^\circ$$

Pisteessä E robotin pitää kääntyä etenemissuuntaansa nähden $180^\circ - (90^\circ + 37^\circ) = 53^\circ$.

Vastaus: pisteessä B 23° ja pisteessä D 53°

299. Täydennetään kuvaa.



Lasketaan suorakulmaisista kolmiosta AEC ja BEC pituudet h ja y muodostamalla kaksi yhtälöä ja ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{cases} \tan 37^\circ = \frac{h}{y} \\ \tan 57^\circ = \frac{h}{60 - y} \end{cases}$$

Ratkaistaan molemmista yhtälöistä h .

$$\begin{aligned} \tan 37^\circ &= \frac{h}{y} \quad \| \cdot y \\ h &= \tan 37^\circ \cdot y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 57^\circ &= \frac{h}{60 - y} \quad \| \cdot (60 - y) \\ h &= \tan 57^\circ \cdot (60 - y) \end{aligned}$$

Merkitään molemmat h :n lausekkeen yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälöstä pituus y .

$$\begin{aligned} \tan 37^\circ \cdot y &= \tan 57^\circ \cdot (60 - y) \\ \tan 37^\circ \cdot y &= \tan 57^\circ \cdot 60 - \tan 57^\circ \cdot y \\ \tan 37^\circ \cdot y + \tan 57^\circ \cdot y &= \tan 57^\circ \cdot 60 \\ 2,293...y &= 92,391... \quad \| :2,293... \\ y &= 40,285... \end{aligned}$$

Merkitään mökin ja vastarannan etäisyyttä eli ison suorakulmaisen kolmion AED kateettia ED kirjaimella z . Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on $AE = y = 40,285\ldots$ m.

Lasketaan kulman $15^\circ + 37^\circ = 52^\circ$ avulla kateetin z pituus.

$$\tan 52^\circ = \frac{z}{40,285\ldots}$$

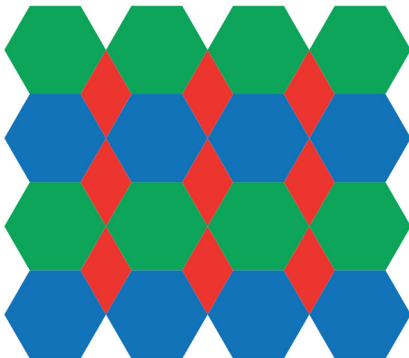
$$z = \tan 52^\circ \cdot 40,285\ldots = 51,563\ldots$$

Etäisyys mökiltä vastarannalle on 52 m.

Vastaus: 52 m.

ALOITUSAUKEAMAAN LIITTYVIÄ TEHTÄVIÄ

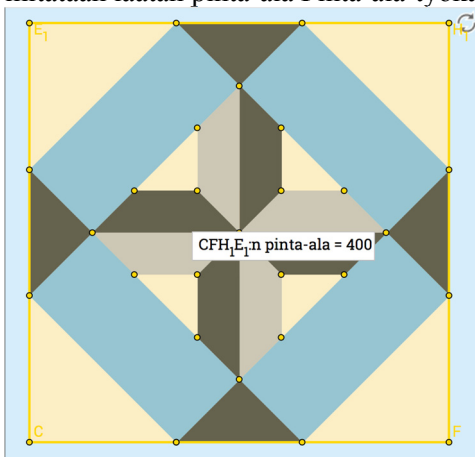
1. Värit voi valita esimerkiksi seuraavasti:



Koska laatoituksessa on pisteitä, joihin kolmen laatan reunat koskevat, värejä tarvitaan vähintään kolme.

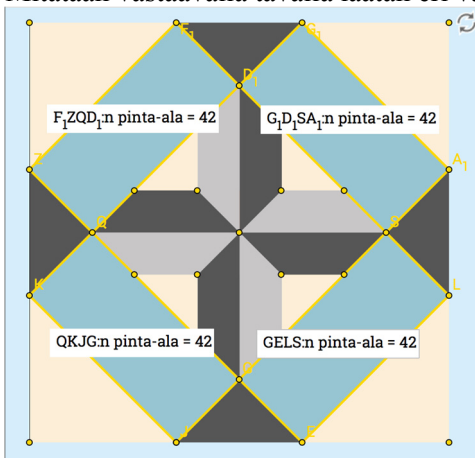
Vastaus: 3 väriä

2. Piirretään appletin avulla monikulmio laatan kulmapisteiden kautta ja mitataan laatan pinta-ala Pinta-ala-työkalulla.



Laatan kokonaispinta-ala on 400.

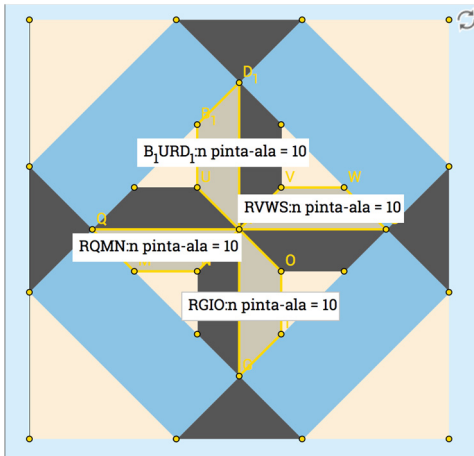
Mitataan vastaavalla tavalla laatan eri värien pinta-alat.



Sinisen alueen pinta-ala on $42 + 42 + 42 + 42 = 168$.

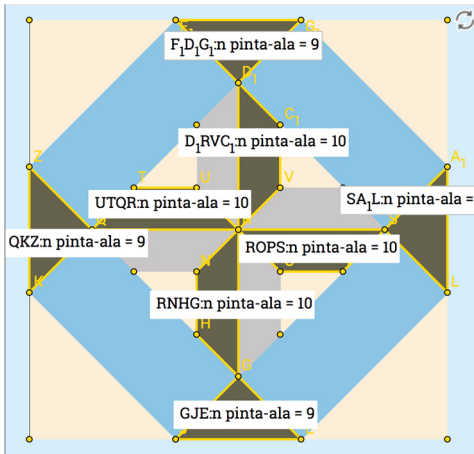
Sinisen alueen osuus laatan pinta-alasta on

$$\frac{168}{400} = 0,42 = 42 \% .$$



Vaalean harmaan alueen pinta-ala on $10 + 10 + 10 + 10 = 40$.
Vaalean harmaan alueen osuus laatan pinta-alasta on

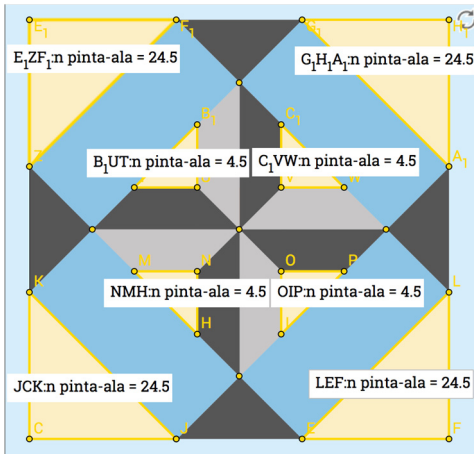
$$\frac{40}{400} = 0,1 = 10 \, \%.$$



Tumman harmaan alueen pinta-ala on
 $9 + 9 + 9 + 9 + 10 + 10 + 10 + 10 = 76$.

Tumman harmaan alueen osuus pinta-alasta on

$$\frac{76}{400} = 0,19 = 19 \, \%.$$



Beigen alueen pinta-ala on

$$24,5 + 24,5 + 24,5 + 24,5 + 4,5 + 4,5 + 4,5 + 4,5 = 116.$$

Beigen alueen osuus laatan pinta-alasta on

$$\frac{116}{400} = 0,29 = 29 \% .$$

Vastaus: sininen 42 %, vaalean harmaa 10 %, tumman harmaa 19 % ja beige 29 %