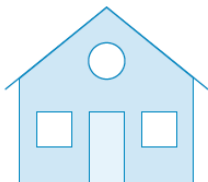


GEOMETRIAN PERUSTEITA

POHDITTAVAA



- 1.
2. Suurennoksen reunat ovat epäteräviä bittikarttakuvassa mutta teräviä vektorigrafiikkakuvassa.

1.1 Peruskäsitteitä

ALOITA PERUSTEISTA

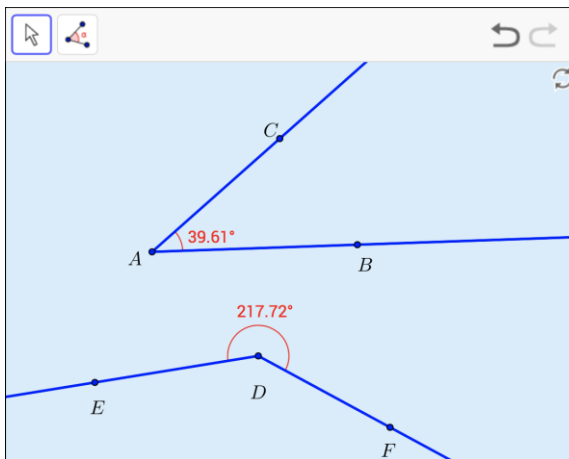
- 101.** Kulma α on yli 180° .
Kulma β on alle 90° .
Kulma γ on 90° :n ja 180° :n välissä.
Kulma δ on suorakulma.
- a) Kulma β on terävä.
 - b) Kulma γ on tylppä.
 - c) Kulma α on kupera.
 - d) Kulmat β , γ ja δ ovat koveria.
- 102.** Kulmat α ja 60° ovat vieruskulmia, joten $\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Kulmat β ja 48° ovat ristikulmia, joten $\beta = 48^\circ$.
- Kulma γ on kulman 56° kanssa samankohtaisen kulman vieruskulma, joten $\gamma = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$.
- Vastaus: $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 48^\circ$, $\gamma = 124^\circ$

103. Kulman α oikea kylki on jana RQ ja vasen kylki jana PQ . Täten $\alpha = \sphericalangle RQP$.

Vastaavasti $\beta = \sphericalangle QPR$ ja $\gamma = \sphericalangle PRQ$.

Vastaus: $\alpha = \sphericalangle RQP$, $\beta = \sphericalangle QPR$ ja $\gamma = \sphericalangle PRQ$

104. Appletin kulmatyökalun avulla kulman BAC suuruudeksi saadaan $39,61^\circ$ ja kulman FDE suuruudeksi saadaan $217,72^\circ$.



Vastaus: $\sphericalangle BAC = 39,61^\circ$ ja $\sphericalangle FDE = 217,72^\circ$.

- 105.** a) Kolmion kulmien summa on 180° . Kulma α saadaan, kun 180° :sta vähennetään tunnettujen kulmien arvot, eli

$$\alpha = 180^\circ - (51^\circ + 62^\circ) = 180^\circ - 113^\circ = 67^\circ.$$

- b) Kulma α saadaan, kun 180° :sta vähennetään tunnettujen kulmien arvot, eli $\alpha = 180^\circ - (90^\circ + 63^\circ) = 180^\circ - 153^\circ = 27^\circ$

- c) Muodostetaan yhtälö kolmion kulmien summalle ja ratkaistaan siitä kulma α .

$$\alpha + \alpha + 2\alpha = 180^\circ. \text{ Ratkaistaan yhtälöstä kulma } \alpha.$$

$$\alpha + \alpha + 2\alpha = 180^\circ$$

$$4\alpha = 180^\circ \quad || : 4$$

$$\alpha = 45^\circ$$

- 106.** A Kulma 36° on välillä $0 < \alpha < 180^\circ$, joten se on kovera kulma. Kulmaa 36° vastaa vaihtoehto III.

- B Kulma 180° on oikokulma, joten sitä vastaa vaihtoehto V.

- C Kulma 201° on välillä $180^\circ < \alpha < 360^\circ$, joten se on kupera kulma. Kulmaa 201° vastaa vaihtoehto I.

- D Kulma 175° on välillä $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, joten se on tylppä kulma ja myös kovera kulma. Kulmaa 175° vastaavat vaihtoehdot II ja III.

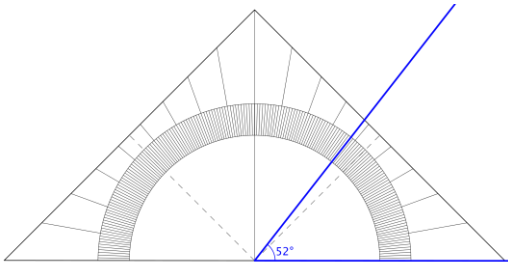
- E Kulma 90° on suorakulma, joten sitä vastaa vaihtoehto IV.

- F Kulma 360° on täysi kulma, joten sitä vastaa vaihtoehto VI.

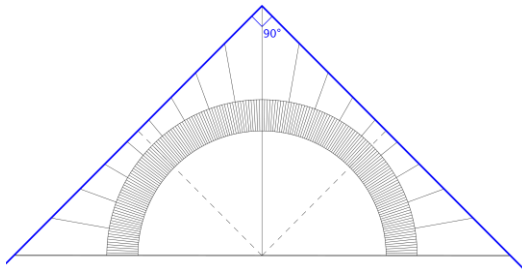
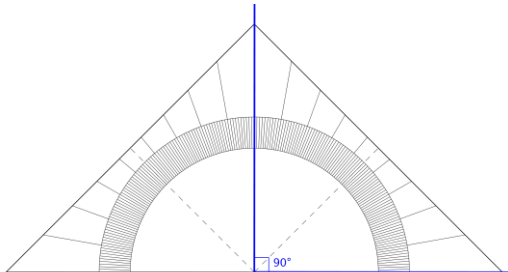
Vastaus: A: III, B: V, C: I, D: II ja III, E: IV ja F: VI

VAHVISTA OSAAMISTA

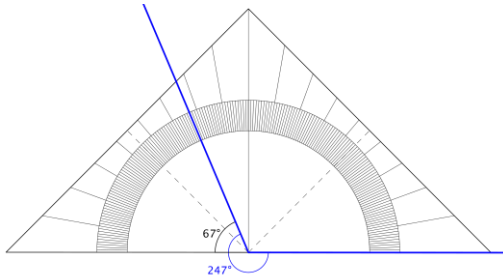
107. a) Piirretään aluksi jana, jonka toiseen loppupisteeseen asetetaan kolmioviivaimen keskikohta. Tämän jälkeen merkitään 52° kohtaan apupiste ja piirretään jana aiemmin valitun janan päätepisteeseen ja apupisteen välille.



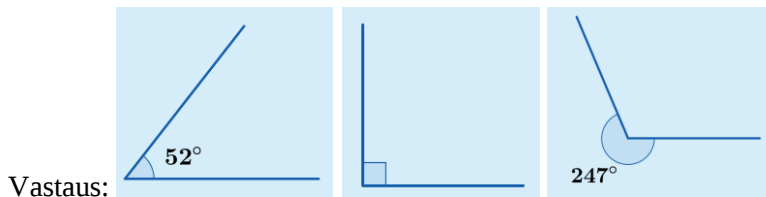
Suora kulma saadaan vastaavasti tai käyttämällä kolmioviivaimen suoraa kulmaa.



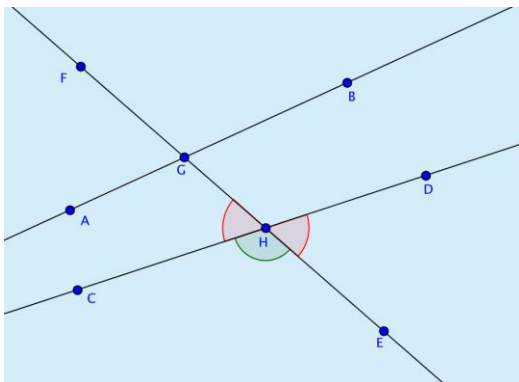
Koska $247^\circ - 180^\circ = 67^\circ$, merkitään apupiste kohtaan 67° ja toimitaan kuten aiemmissa kohdissa.



- b) Videossa <https://vimeo.com/182675208/8fd7a4985a> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.



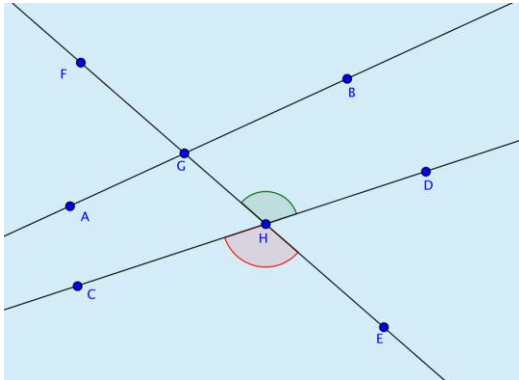
108. a)



Kulman CHE vieruskulmia ovat kulmat EHD ja GHC .

Vastaus: $\sphericalangle EHD$ ja $\sphericalangle GHC$

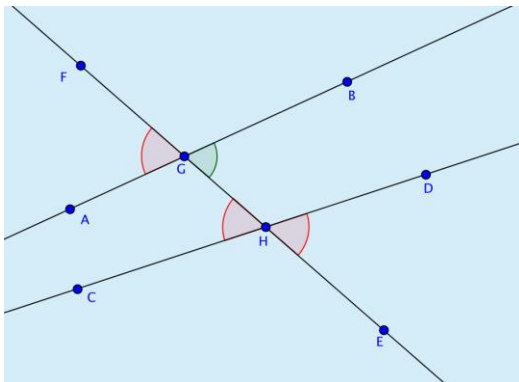
b)



Kulman DHG ristikulma on kulma CHE .

Vastaus: $\sphericalangle CHE$

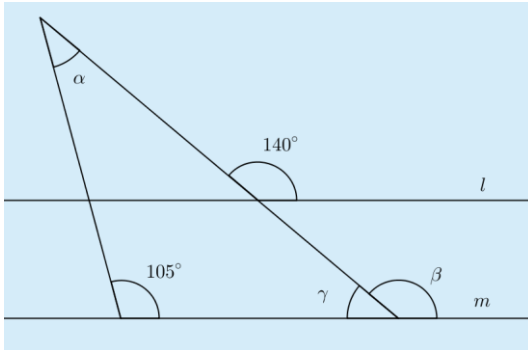
c)



Kulman HGB samankohtaiset kulmat ovat kulmat FGA , EHD ja GHC .

Vastaus: $\sphericalangle FGA$, $\sphericalangle EHD$ ja $\sphericalangle GHC$

109. a)



Suorat l ja m ovat yhdensuuntaisia, joten samankohtaiset kulmat 140° ja β ovat yhtä suuria eli $\beta = 140^\circ$.

Kulmat β ja γ ovat vieruskulmia, joten $\gamma = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

Kolmion kulmien summa on 180° , joten isommasta kolmiosta saadaan $\alpha = 180^\circ - (105^\circ + \gamma) = 180^\circ - (105^\circ + 40^\circ) = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$.

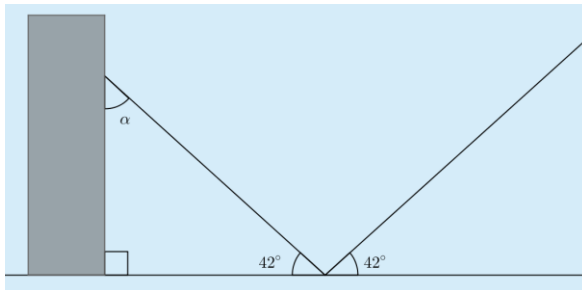
Vastaus: $\alpha = 35^\circ$

b) Kulman 113° vieruskulma on $180^\circ - 113^\circ = 67^\circ$.

Samankohtaiset kulmat 67° ja 68° eivät ole yhtä suuria, joten suorat s ja t eivät ole yhdensuuntaisia.

Vastaus: eivät ole

- 110.** Auringonsäde heijastuu vesilätäköstä maahan nähden samassa kulmassa kuin se osuu siihen. Piirretään mallikuva.



Seinä, maa ja heijastunut auringon säde muodostavat kolmion, josta tunnetaan kulmat 42° ja 90° .

Heijastuva valo muodostaa seinän kanssa kulman
 $\alpha = 180^\circ - (90^\circ + 42^\circ) = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$.

Vastaus: 48°

- 111.** a) Kun 180 asteen kulmasta vähennetään terävä kulma, saadaan kulma, jonka suuruus on 90 ja 180 asteen välissä. Kulma on tylppä, joten väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, tylppä kulma

- b) Ristikulmat ovat yhtä suuria, joten suoran kulman ristikulma on suora kulma. Väite on tosi.

Vastaus: tosi

- c) Tylpän kulman suuruus on välillä $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Kun lasketaan kahden tylpän kulman summa saadaan kulma, joka on 180 ja 360 asteen välissä. Kulma on siis kupera, joten väite on epätosi.

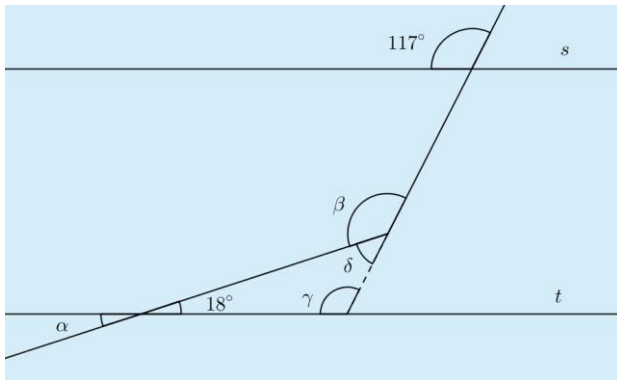
Vastaus: epätosi, kupera kulma

- d) Vieruskulmien summa on 180° . Kuperan kulma on suurempi kuin 180° , joten sen ja toisen kulman summa ei voi olla 180° . Väite on tosi.

Vastaus: tosi

112. Kulma α ja 18° ovat ristikulmia, joten kulma $\alpha = 18^\circ$.

Jatketaan suoria s ja t leikkaavaa puolisuoraa alaspäin niin, että kuvioon muodostuu kolmio.



Suorat s ja t ovat yhdensuuntaisia, joten samankohtaiset kulmat 117° ja γ ovat yhtä suuria, eli $\gamma = 117^\circ$.

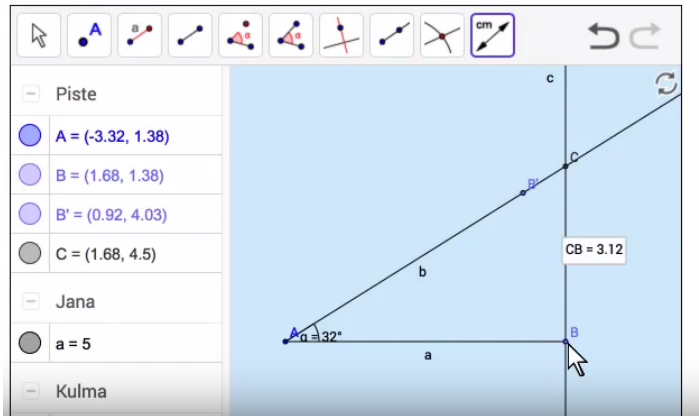
Kolmion kulmien summa on 180° , joten

$$\delta = 180^\circ - (18^\circ + \gamma) = 180^\circ - (18^\circ + 117^\circ) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

Kulmat β ja δ ovat vieruskulmia, joten $\beta = 180^\circ - \delta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

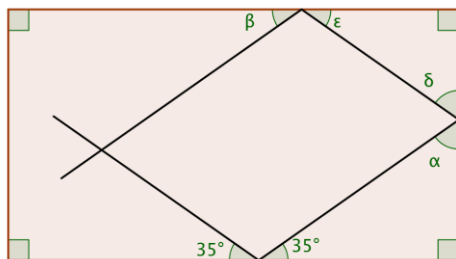
Vastaus: $\alpha = 18^\circ$, $\beta = 135^\circ$

113. Videossa <https://vimeo.com/182675258/63b5464954> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.



Vastaus: 3,1 m

114.



Biljardipallo kimpoaa reunasta samassa kulmassa kuin se tulee siihen, joten kulma α saadaan laskettua suorakulmaisesta kolmiosta, jossa on α ja suora kulma sekä 35° kulma.

Koska kolmion kulmien summa on 180° , niin

$$\alpha = 180^\circ - (90^\circ + 35^\circ) = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.$$

Koska pallo kimpoaa reunasta samassa kulmassa kuin se tulee siihen, kulma $\delta = 55^\circ$.

Kulmat ϵ saadaan laskettua kolmiosta, jossa on suora kulma ja 55° kulma.

Koska kolmion kulmien summa on 180° , niin

$$\epsilon = 180^\circ - (90^\circ + 55^\circ) = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ.$$

Koska pallo kimpoaa reunasta samassa kulmassa kuin se tulee siihen, kulma $\beta = 35^\circ$.

Vastaus: $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 35^\circ$

- 115.** Merkitään toiseksi suurimman kulman suuruutta kirjaimella x . Tällöin pienimmän kulman suuruus on $x - 4^\circ$ ja suurimman $2x$.

Muodostetaan yhtälö kolmion kulmien summalle ja ratkaistaan siitä x .

$$\begin{aligned}x + x - 4^\circ + 2x &= 180^\circ \\4x &= 180^\circ + 4^\circ \\4x &= 184^\circ \quad || : 4 \\x &= 46^\circ\end{aligned}$$

Pienin kulma on $46^\circ - 4^\circ = 42^\circ$ ja suurin kulma on $2 \cdot 46^\circ = 92^\circ$.

Vastaus: 42° , 46° ja 92°

- 116. a)** Merkitään pienemmän kulman suuruutta kirjaimella x , jolloin suuremman kulman suuruus on $x + 13^\circ$.

Vieruskulmien summa 180° , joten $x + x + 13^\circ = 180^\circ$. Ratkaistaan yhtälöstä pienemmän kulman suuruus x .

$$\begin{aligned}x + x + 13^\circ &= 180^\circ \\2x &= 180^\circ - 13^\circ \\2x &= 167^\circ \quad || : 2 \\x &= 83,5^\circ\end{aligned}$$

Suurempi kulma on $83,5^\circ + 13^\circ = 96,5^\circ$.

Vastaus: $83,5^\circ$ ja $96,5^\circ$

- b) Merkitään kolmion pienimmän kulman suuruutta kirjaimella x . Tällöin toiseksi pienimmän kulman suuruus on $2x$ ja suurimman $3x$.

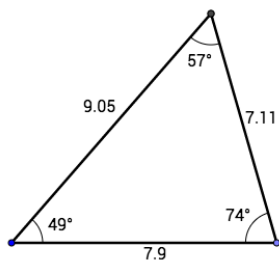
Kolmion kulmien summa on 180° , josta saadaan yhtälö
 $x + 2x + 3x = 180^\circ$. Ratkaistaan yhtälöstä pienimmän kulman suuruus x .

$$\begin{aligned}x + 2x + 3x &= 180^\circ \\6x &= 180^\circ \quad || : 6 \\x &= 30^\circ\end{aligned}$$

Toiseksi pienimmän kulman suuruus on $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ ja suurimman kulman $3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$.

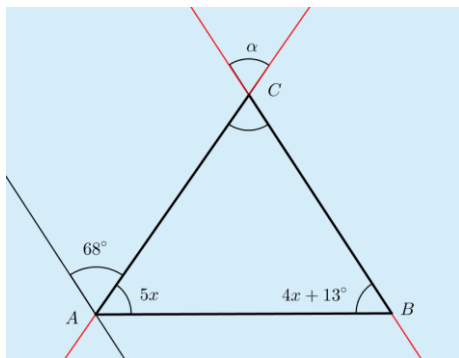
Vastaus: 30° , 60° ja 90°

117. Videossa <https://vimeo.com/182675351/2b1bfe26bf> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.



Tuntemattomien sivujen pituudet ovat 9,1 cm ja 7,1 cm ja kulman suuruus on 57° .

- 118.** Jatketaan kolmion sivuja AC ja BC , jolloin saadaan kolmion kulman C ristikulma α .



Kärjen A kautta piirretty suora on yhdensuuntainen sivun BC kanssa, samankohtaiset kulmat 68° ja α ovat yhtä suuret. Kolmion kulma C on kulman α ristikulma, joten kulma C on 68° .

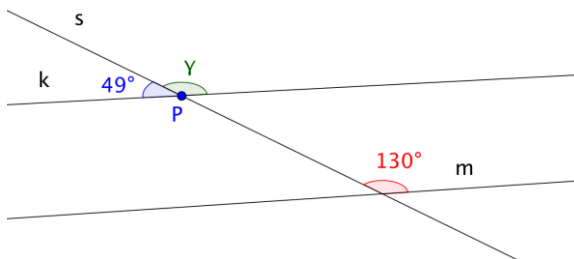
Kolmion kulmien summa on 180° , josta saadaan yhtälö
 $5x + 4x + 13^\circ + 68^\circ = 180^\circ$. Ratkaistaan yhtälöstä x .

$$\begin{aligned} 5x + 4x + 13^\circ + 68^\circ &= 180^\circ \\ 9x &= 180^\circ - 13^\circ - 68^\circ \\ 9x &= 99^\circ \quad || : 9 \\ x &= 11^\circ \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 11^\circ$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

119. Kulman 49° vieruskulma on $\gamma = 180^\circ - 49^\circ = 131^\circ$, joten samankohtaiset kulmat eivät ole yhtä suuret eivätkä suorat ole yhdensuuntaiset.



Suora m nousee oikealle mentäessä jyrkemmin kuin suora k , joten suorat leikkaavat pisteen P oikealla puolella.

Vastaus: Eivät ole. Oikealla puolella.

120. a) Ristikulmat ovat yhtä suuret, joten $x + 30^\circ = x^\circ$.

Tästä saadaan toisen asteen yhtälö $-x^2 + x + 30 = 0$.

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 30}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{-2} = \frac{-1 \pm 11}{-2}$$

$$x = \frac{-1+11}{-2} = \frac{10}{-2} = -5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-11}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6$$

Vain positiivinen ratkaisu kelpaa, joten $x = 6^\circ$.

Vastaus: $x = 6^\circ$

- b)** Vieruskulmien summa on 180° , joten $5x + 26^\circ + x^2 + 10x = 180^\circ$.

Tästä saadaan toisen asteen yhtälö $x^2 + 15x - 154 = 0$.

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-154)}}{2 \cdot 1} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 616}}{2} = \frac{-15 \pm \sqrt{841}}{2} \\ = \frac{-15 \pm 29}{2}$$

$$x = \frac{-15 + 29}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-15 - 29}{2} = \frac{-44}{2} = -22$$

Vain positiivinen ratkaisu kelpaa, joten $x = 7^\circ$.

Vastaus: $x = 7^\circ$

- 121.** 1 aste on 60 kulmaminuuttia ($60'$) ja 1 kulmaminuutti on 60 kulmasekuntia ($60''$).

- a)** Lasketaan ensin, kuinka monta kulmaminuuttia on $3600''$.
 $3600'' : 60'' = 60$

Lasketaan sitten, kuinka monta astetta on $60'$.
 $60' : 60' = 1$

Vastaus: 1°

- b)** Muutetaan ensin kulmasekunnit kulmaminuuteiksi.
 $30'' = (30/60)' = 0,5'$

Muutetaan seuraavaksi kulmaminuutit asteiksi.
 $(15,5/60)^\circ = 0,25833...^\circ \approx 0,26^\circ$

$$31^\circ 15' 30'' \approx 31^\circ + 0,26^\circ = 31,26^\circ$$

Vastaus: $31,26^\circ$

- c) Muutetaan ensin $0,13$ astetta kulmaminuuteiksi.

$$0,13^\circ = 0,13 \cdot 60' = 7,8'$$

Muutetaan seuraavaksi $0,8$ kulmaminuuttia kulmasekunneiksi.

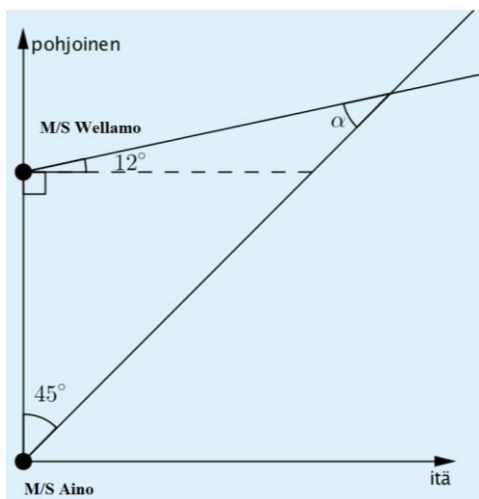
$$0,8' = 0,8 \cdot 60'' = 48''$$

$$\text{Joten } 35,13^\circ = 35^\circ 7' 48''.$$

$$\text{Vastaus: } 35^\circ 7' 48''$$

122. Pohjoinen ja itä ovat toisiaan vastaan suorassa kulmassa. Koillinen on 45° kulmassa pohjoisesta itään (tai idästä pohjoiseen).

Piirretään mallikuva laivojen kulkureiteistä.



Laivojen sijainnit ja kurssien leikkauspiste muodostavat kolmion, jonka yksi kulma on 45° , toinen kulma on $90^\circ + 12^\circ = 102^\circ$ ja kolmas on kysytty kulma α .

Kolmion kulmien summan avulla saadaan
 $\alpha = 180^\circ - (45^\circ + 102^\circ) = 180^\circ - 147^\circ = 33^\circ$.

Vastaus: 33°

123. Kulma α on kulman $3x$ vieruskulma, joten $\alpha = 180^\circ - 3x$.

Kolmion merkitsemätön kulma on myös kulman $3x$ vieruskulma eli se on $180^\circ - 3x$.

Kolmion kulmien summa on 180° , josta saadaan yhtälö $180^\circ - 3x + 180^\circ - 3x + x = 180^\circ$.

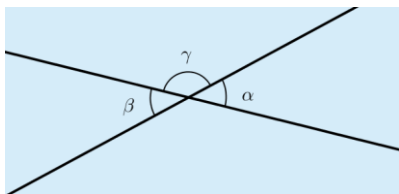
Ratkaistaan yhtälöstä kulma x .

$$\begin{aligned}180^\circ - 3x + 180^\circ - 3x + x &= 180^\circ \\-5x &= 180^\circ - 180^\circ - 180^\circ \\-5x &= -180^\circ \quad || : (-5) \\x &= 36^\circ\end{aligned}$$

Kysytty kulma $\alpha = 180^\circ - 3 \cdot 36^\circ = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

Vastaus: $\alpha = 72^\circ$

124.



Kulman α vieruskulma $\gamma = 180^\circ - \alpha$.

Toisaalta kulman β vieruskulma on $\gamma = 180^\circ - \beta$.

Kulma γ on molemmissa tapauksissa yhtä suuri, joten $180^\circ - \alpha = 180^\circ - \beta$. Sievennetään saatu yhtälö.

$$\begin{aligned}-\alpha &= 180^\circ - \beta - 180^\circ \\-\alpha &= -\beta \quad || : (-1) \\ \alpha &= \beta\end{aligned}$$

Ristikulmat ovat siis yhtä suuret.

Vastaus: –

125. Lasketaan ensin, kuinka pitkä kaari vastaa yhtä astetta.

$$\frac{40000 \text{ km}}{360} = 111,111... \text{ km}$$

Yksi aste on 60 kulmaminuuttia, joten yhtä kaariminuuttia vastaavan kaaren pituus on

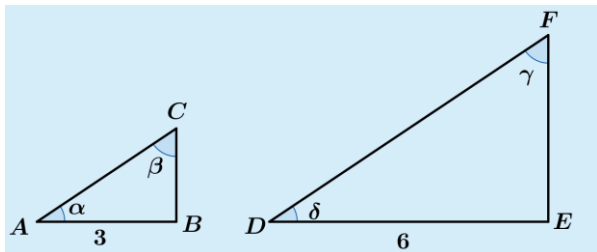
$$\frac{111,111... \text{ km}}{60} = 1,85185... \text{ km} \approx 1850 \text{ m}$$

Vastaus: 1850 m

1.2 Yhdenmuotoisuus

ALOITA PERUSTEISTA

126.



- a) Piste A vastinpiste on piste D .
- b) Kulman α vastinkulma on kulma δ .
- c) Janan DE vastinjana on AB .
- d) Koska janan AB vastinjana on DE , niin kolmioiden yhdenmuotoisuussuhde eli mittakaava on $6:3$ eli $2:1$.

127. Pituuksien muutoksien suhdeluku on 10.

- a) $120 \text{ mm} = 12 \text{ cm}$
- b) $6,3 \text{ km} = 63 \text{ hm} = 630 \text{ dam} = 6300 \text{ m}$
- c) $5,2 \text{ dm} = 52 \text{ cm} = 520 \text{ mm}$
- d) $2500 \text{ dm} = 250 \text{ m} = 0,25 \text{ km}$
- e) $0,79 \text{ km} = 790 \text{ m} = 79\,000 \text{ cm}$
- f) $970 \text{ mm} = 97 \text{ cm} = 9,7 \text{ dm} = 0,97 \text{ m} = 0,097 \text{ dam} = 0,0097 \text{ hm} = 0,000\,97 \text{ km}$

128. Muutetaan suuruusluokat I–IV helpommin käsitettäviksi yksiköiksi.

$$2000 \text{ mm} = 2 \text{ m}$$

$$40 \text{ dm} = 4 \text{ m}$$

$$0,030 \text{ km} = 30 \text{ m}$$

$$100\,000 \text{ cm} = 1 \text{ km}$$

A Ihmisen pituus voi olla 2 metriä, joten sitä vastaa vaihtoehto I.

B Suomen pituus on noin 1000 km, joten sitä vastaa vaihtoehto V.

C Kaupungin keskustan pääkadun pituus voi olla 1 km, joten sitä vastaa vaihtoehto IV.

D Kerrostalon korkeus voi olla 30 metriä, joten sitä vastaa vaihtoehto III.

E Farmariauton pituus voi olla 4 metriä, joten sitä vastaa vaihtoehto II.

Vastaus: A: I, B: V, C: IV, D: III ja E: II

129. a) Mittakaavamerkintä 1:200 tarkoittaa, että esimerkiksi 1 cm kuvassa vastaa 200 cm luonnossa. Kuva on siis pienennös alkuperäisestä.

Vastaus: väärin, pienennös

b) Mittakaava 1:1 tarkoittaa, että kuviot ovat toistensa kopioita ja siten täsmälleen samankokoisia.

Vastaus: oikein

c) Väärin, mittakaava on vastinjanojen pituuksien suhde.

Vastaus: väärin, vastinjanojen pituuksien

d) Oikein, kuviota kierretessä sen muoto ja koko eivät muutu.

Vastaus: oikein

- 130. a)** Nelikulmiot ovat yhdenmuotoisia. Nelikulmioiden vastinjanojen pituudet ovat x ja 2,5 cm sekä 3,6 cm ja 5,7 cm.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on

yhtä suuri, niin $\frac{x}{2,5} = \frac{3,6}{5,7}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$5,7x = 2,5 \cdot 3,6$$

$$5,7x = 9 \quad || : 5,7$$

$$x = \frac{9}{5,7} = 1,578\dots$$

$$x \approx 1,6$$

Vastaus: $\frac{x}{2,5} = \frac{3,6}{5,7}$, $x \approx 1,6$ cm

- b)** Kolmioiden vastinjanojen pituudet ovat x ja 5,0 m sekä 2,0 m ja 1,0 m.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on

yhtä suuri, niin $\frac{x}{5,0} = \frac{1,0}{2,0}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$2,0x = 5,0 \cdot 1,0$$

$$2,0x = 5,0 \quad || : 2,0$$

$$x = \frac{5,0}{2,0}$$

$$x = 2,5$$

Vastaus: $\frac{x}{5,0} = \frac{1,0}{2,0}$, $x = 2,5$ m

131. a)

Pituus kartalla (cm)	Pituus luonnossa (cm)
1	100 000
2	x

Pituus kartalla ja pituus luonnossa ovat suoraan verrannollisia.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x kertomalla ristiin.

$$\frac{1}{2} = \frac{100\,000}{x}$$

$$1x = 2 \cdot 100\,000$$

$$x = 200\,000$$

Järven pituus on $200\,000\text{ cm} = 2\text{ km}$

Vastaus: 2 km

TAPA II:

Koska mittakaava on 1:100 000, ovat pituudet luonnossa 100 000-kertaisia karttaan verrattuna.

Järven pituus on siis $2\text{ cm} \cdot 100\,000 = 200\,000\text{ cm} = 2\text{ km}$.

Vastaus: 2 km

b) Muunnetaan pituudet samaan yksikköön:

$$600\text{ m} = 60\,000\text{ cm}$$

Pituus kartalla (cm)	Pituus luonnossa (cm)
1	100 000
x	60 000

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x .

$$\frac{1}{x} = \frac{100\,000}{60\,000}$$

$$100\,000x = 1 \cdot 60\,000$$

$$x = 0,6$$

Saaren pituus on $0,6\text{ cm} = 6\text{ mm}$

Vastaus: 6 mm

TAPA II:

Etäisyydet kartalla ovat $\frac{1}{100\,000}$ etäisyyksistä luonnossa, joten saaren pituus on kartalla $\frac{600\text{ m}}{100\,000} = 0,006\text{ m} = 6\text{ mm}$.

Vastaus: 6 mm

VAHVISTA OSAAMISTA

132. a) Muutetaan pituudet samaan yksikköön.

$$800\text{ m} = 80\,000\text{ cm}$$

Kartan mittakaava on muotoa $\frac{\text{pituus kartalla}}{\text{pituus luonnossa}}$, joten mittakaava on

$$\frac{16\text{ mm}}{800\,000\text{ mm}} = \frac{1}{50\,000}.$$

Vastaus: 1:50 000.

b)

Pituus kartalla (cm)	Pituus luonnossa (cm)
1	50 000
6	x

Pituus kartalla ja pituus luonnossa ovat suoraan verrannollisia. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x kertomalla ristiin.

$$\frac{1}{6} = \frac{50\,000}{x}$$

$$1x = 6 \cdot 50\,000$$

$$x = 300\,000$$

Puiston pituus on $300\,000\text{ cm} = 3\text{ km}$

Vastaus: 3 km

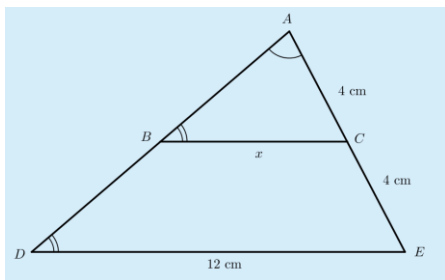
TAPA II:

Koska mittakaava on 1 : 50 000, ovat pituudet luonnossa 50 000-kertaiset karttaan verrattuna.

Puiston pituus on siis $6 \text{ cm} \cdot 50\,000 = 300\,000 \text{ cm} = 3 \text{ km}$.

Vastaus: 3 km

133. a) Merkitään kolmioiden kärkipisteitä kirjaimilla.



Kolmioilla ABC ja ADE on yhteinen kulma A ja lisäksi niillä on yhtä suuret kulmat CBA ja EDA , joten kk -lauseen nojalla kolmiot ABC ja ADE ovat yhdenmuotoisia.

Kolmioiden sivut AC ja AE sekä BC ja DE ovat toistensa vastinjanoja.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on yhtä suuri, niin $\frac{4}{4+4} = \frac{x}{12}$.

Ristiin kertomalla saadaan

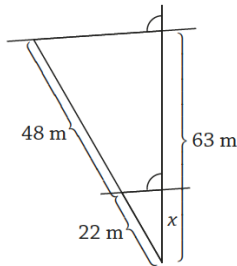
$$8x = 4 \cdot 12$$

$$8x = 48 \quad || : 8$$

$$x = 6$$

Vastaus: $x = 6 \text{ cm}$

b)



Isolla ja pienellä kolmiolla on yksi yhteinen kulma. Lisäksi kolmioissa on kulmat, jotka ovat yhtä suurien kulmien vieruskulmia ja siten yhtä suuria keskenään. Iso ja pieni kolmio ovat siis yhdenmuotoisia.

Kolmioiden sivut x ja 63 m sekä 22 m ja $22\text{ m} + 48\text{ m}$ ovat toistensa vastinjanoja.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on yhtä suuri, niin $\frac{x}{63} = \frac{22}{22 + 48}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$70x = 22 \cdot 63$$

$$70x = 1386 \quad || : 70$$

$$x = \frac{1386}{70}$$

$$x = 19,8 \approx 20$$

Vastaus: $x \approx 20\text{ m}$

- c) Kolmioiden vastinjanojen pituudet ovat x ja 54 mm sekä 34 mm ja 61 mm.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on yhtä suuri, niin $\frac{x}{54} = \frac{34}{61}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$61x = 54 \cdot 34$$

$$61x = 1836 \quad || : 61$$

$$x = 30,098\dots$$

$$x \approx 30$$

Vastaus: $x \approx 30$ mm

134. Määritetään salin todellinen pituus ja leveys.

Koska mittakaava on 1:200, ovat todelliset pituudet 200-kertaiset piirroksen verrattuna.

Salin pituus on $9,6 \text{ cm} \cdot 200 = 1920 \text{ cm} = 19,2 \text{ m}$ ja

leveys on $7,9 \text{ cm} \cdot 200 = 1580 \text{ cm} = 15,8 \text{ m}$.

Salin pinta-ala on pituus $\cdot$ leveys eli

$$A = 19,2 \text{ m} \cdot 15,8 \text{ m} = 303,36 \text{ m}^2 \approx 300 \text{ m}^2.$$

Vastaus: 300 m^2

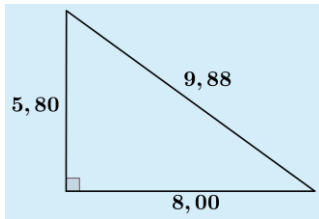
135. Janan keskipiste M saadaan kaavalla $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$.

Nyt $x_1 = -8$, $y_1 = 12$, $x_2 = 2$ ja $y_2 = 3$. Sijoitetaan nämä keskipisteen kaavaan.

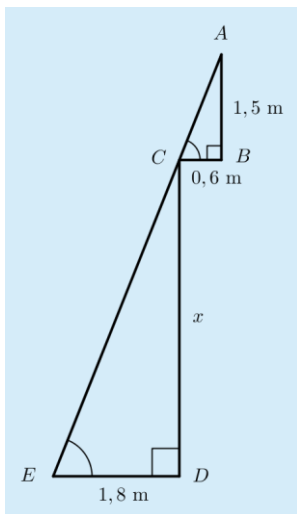
$$M = \left(\frac{-8 + 2}{2}, \frac{12 + (-4)}{2} \right) = \left(\frac{-6}{2}, \frac{8}{2} \right) = (-3, 4)$$

Vastaus: $(-3, 4)$

136. Mittakaava on 2:1, joten on piirrettävä kolmio, jonka sivujen pituudet ovat kaksinkertaiset alkuperäiseen kolmioon verrattuna.



137. Merkitään kolmioiden kärkipisteitä kirjaimilla.



Janat CB ja ED ovat yhdensuuntaiset, joten kulmat BCA ja DEC ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret. Lisäksi kolmioissa ABC ja CDE on suora kulma, joten kk-lauseen nojalla kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Kolmioiden sivut AB ja CD sekä CB ja ED ovat toistensa vastinjanoja. Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on yhtä suuri, niin $\frac{1,5}{x} = \frac{0,6}{1,8}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$\begin{aligned} 0,6x &= 1,5 \cdot 1,8 \\ 0,6x &= 2,7 \quad || : 0,6 \\ x &= \frac{2,7}{0,6} \\ x &= 4,5 \end{aligned}$$

Kaivo on 4,5 m syvä.

Vastaus: 4,5 m

138. a) Koska suurennoksen mittakaava on 60 000:1, pituus luonnossa on $\frac{1}{60\,000}$ -kertainen kuvan pituuteen verrattuna.

Suomun leveys on $5\text{ mm} : 60\,000 = 0,0000833\dots\text{ mm}$.

$$\begin{aligned}\text{Koska } 1\text{ nm} &= \frac{1}{1\,000\,000\,000}\text{ m} = \frac{1}{1\,000\,000\,000} \cdot 1000\text{ mm} \\ &= \frac{1}{1\,000\,000}\text{ mm},\end{aligned}$$

niin millimetrit voidaan muuttaa nanometreiksi kertomalla luvulla 1 000 000.

$$\begin{aligned}0,0000833\dots\text{ mm} &= 0,0000833\dots \cdot 1\,000\,000\text{ nm} \\ &= 83,33\dots\text{ nm} \approx 80\text{ nm}.\end{aligned}$$

Suomu on todellisuudessa noin 80 nm leveä.

Vastaus: 80 nm

- b) Muutetaan pituudet samaan yksiköön.

$$\begin{aligned}\text{Koska } 1\text{ nm} &= \frac{1}{1\,000\,000\,000}\text{ m} = \frac{1}{1\,000\,000\,000} \cdot 100\text{ cm} \\ &= \frac{1}{10\,000\,000}\text{ cm},\end{aligned}$$

niin senttimetrit voidaan muuttaa nanometreiksi kertomalla luvulla 10 000 000.

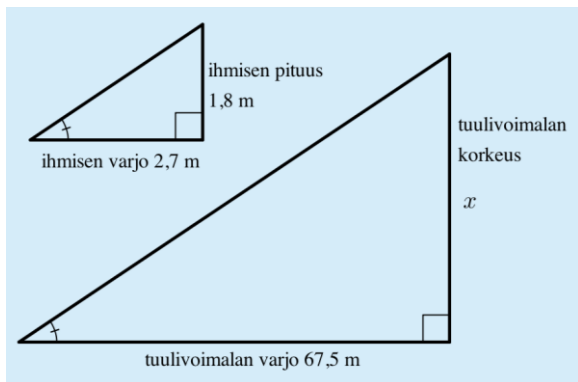
$$9,0\text{ cm} = 9,0 \cdot 10\,000\,000\text{ nm} = 90\,000\,000\text{ nm}.$$

$$\text{Mittakaava on } \frac{\text{pituus kuvassa}}{\text{pituus luonnossa}}, \text{ joten } \frac{90\,000\,000}{12} = \frac{7\,500\,000}{1}.$$

Kuvan mittakaava on 7 500 000:1.

Vastaus: 7 500 000:1

139. Piirretään mallikuva.



Ihmisen pituus, varjo ja auringon säteet muodostavat kolmion, jonka yksi kulma on suora kulma ja yksi kulma on auringon korkeuskulma.

Tuulivoimalan korkeus, varjo ja auringon säteet muodostavat kolmion, jonka yksi kulma on suora kulma ja yksi kulma on auringon korkeuskulma.

Koska auringon korkeuskulma on molemmissa tapauksissa sama, niin kolmioilla on kaksi yhtä suurta kulmaa. kk-lauseen nojalla kolmiot ovat yhdenmuotoisia.

Tuulivoimalan korkeus ja ihmisen pituus sekä varjojen pituudet ovat toistensa vastinsivuja.

Merkitään tuulivoimalan korkeutta kirjaimella x . Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinsivujen suhde on sama, niin $\frac{x}{1,8} = \frac{67,5}{2,7}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$2,7x = 67,5 \cdot 1,8$$

$$2,7x = 121,5 \quad || : 2,7$$

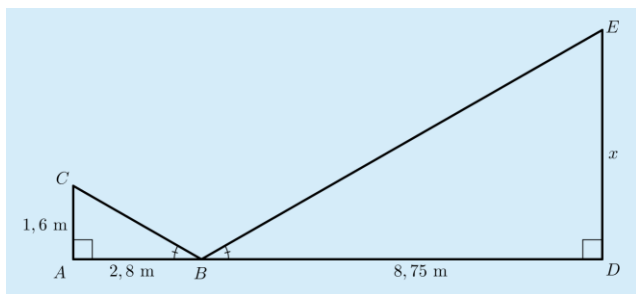
$$x = \frac{121,5}{2,7}$$

$$x = 45$$

Tuulivoimala on 45 m korkea.

Vastaus: 45 m

- 140.** Merkitään syntyvien kolmioiden kärkipisteitä kirjaimilla ja patsaan korkeutta kirjaimella x .



Kolmioissa ABC ja BDE on suora kulma ja lisäksi valo heijastuu peilistä samassa kulmassa kuin se siihen osuu, joten kulmat CBA ja DBE ovat yhtä suuria.

kk-lauseen nojalla kolmiot ABC ja BDE ovat yhdenmuotoisia.

Kolmioiden sivut CA ja ED sekä AB ja DB ovat toistensa vastinjanoja. Koska yhdenmuotoisten kuvioden vastinjanojen pituuksien suhde on yhtä

suuri, niin $\frac{1,6}{x} = \frac{2,8}{8,75}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$2,8x = 1,6 \cdot 8,75$$

$$2,8x = 14 \quad || : 2,8$$

$$x = \frac{14}{2,8}$$

$$x = 5,0$$

Patsas on 5,0 m korkea.

Vastaus: 5,0 m

- 141.** Koska piste P jakaa janan AB suhteessa $2 : 3$, niin merkitään janan AP pituutta lausekkeella $2x$ ja janan PB pituutta lausekkeella $3x$.

Nyt $2x + 3x = 20$. Ratkaistaan yhtälöstä osan x pituus.

$$2x + 3x = 20$$

$$5x = 20 \quad || : 5$$

$$x = 4$$

Janan AP pituus $2x = 2 \cdot 4 = 8$.

Vastaus: 8 cm

142. Merkitään toisen päätepisteen x -koordinaattia kirjaimella x ja y -koordinaattia kirjaimella y .

Keskipisteen x -koordinaatti on päätepisteiden keskiarvo, joten saadaan

$$\text{yhtälö } \frac{4+x}{2} = 0.$$

Ratkaistaan yhtälöstä toisen päätepisteen x -koordinaatti x .

$$\frac{4+x}{2} = 0 \quad \| \cdot 2$$

$$4 + x = 0$$

$$x = -4$$

Ratkaistaan vastaavasti toisen päätepisteen y -koordinaatti y .

$$\frac{3+y}{2} = 2 \quad \| \cdot 2$$

$$3 + y = 4$$

$$y = 4 - 3$$

$$y = 1$$

Toinen päätepiste on $(-4, 1)$

Vastaus: $(-4, 1)$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

143. Lasketaan aluksi, kuinka pitkä matka Porista Raumalle on luonnossa.

Koska mittakaava on 1:200 000, ovat pituudet luonnossa 200 000-kertaiset karttaan verrattuna. Matka Porista Raumalle luonnossa on $25 \text{ cm} \cdot 200\,000 = 5\,000\,000 \text{ cm}$.

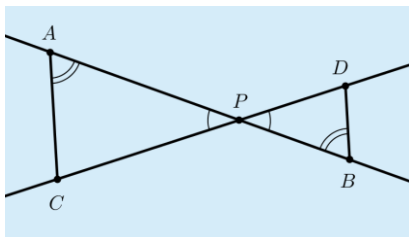
Muutetaan matka Porista Raumalle toiseen mittakaavaan.

Koska mittakaava on 1:75 000, pituudet kartalla ovat $\frac{1}{75\,000}$ -kertaiset luonnossa oleviin mittoihin verrattuna.

Matka Porista Raumalle kartalla on $5\,000\,000 \text{ cm} : 75\,000 = 66,66\dots \text{ cm} \approx 67 \text{ cm}$.

Vastaus: 67 cm

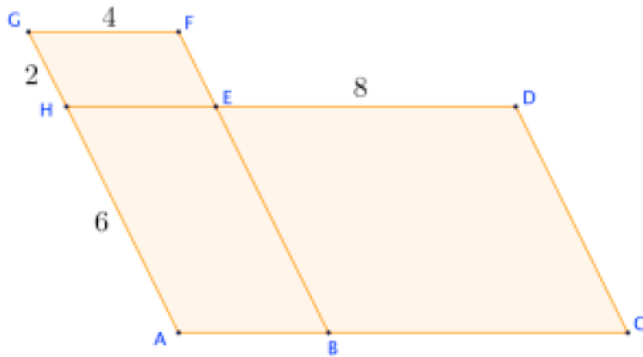
144. Piirretään kuva.



Kolmioiden ACP ja PBD kulmat APC ja BPD ovat ristikulmia eli yhtä suuria. Lisäksi janat AC ja DB ovat yhdensuuntaisia, joten kulmat CAP ja DBP ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Täten kk-lauseen nojalla kolmiot ACP ja PBD ovat yhdenmuotoisia.

145.



Suunnikkaan $GABF$ janan GA vastinjana suunnikkaassa $HACD$ on AC .

Näiden pituuksien suhde on $\frac{2+6}{8+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

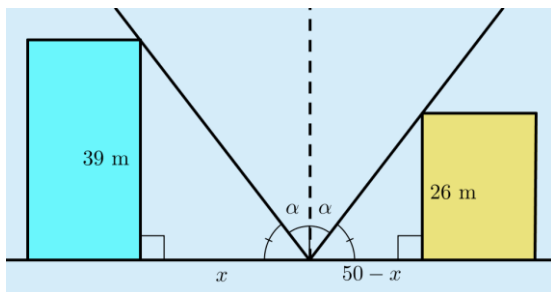
Suunnikkaan $GABF$ janan GF vastinjana suunnikkaassa $HACD$ on HA .

Näiden pituuksien suhde on $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Vastaavalla päättelyllä myös janojen FB ja HD sekä janojen AB ja CD pituuksien suhde on $\frac{2}{3}$.

Suunnikkaat $GABF$ ja $HACD$ ovat yhdenmuotoiset, koska kaikkien niiden vastinsivujen suhde on sama.

146. Merkitään tähtiharrastajan etäisyyttä korkeammasta talosta kirjaimella x . Tällöin tähtiharrastajan etäisyys matalammasta talosta on $50 - x$.



Tarkastellaan muodostuneita kolmioita. Molemmissa kolmioissa on suora kulma. Lisäksi kulmat, joiden kärkenä on tähtiharrastaja, ovat yhtä suuret ($90^\circ - \alpha$). Siten kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia.

Kolmioiden sivut 39 m ja 26 m sekä x ja $50 - x$ ovat toistensa vastinjanoja.

Koska yhdenmuotoisien kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on yhtä suuri, niin $\frac{39}{26} = \frac{x}{50 - x}$.

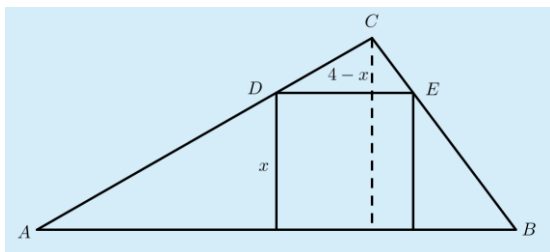
Ristiin kertomalla saadaan

$$\begin{aligned} 26x &= 39(50 - x) \\ 26x &= 1950 - 39x \\ 26x + 39x &= 1950 \\ 65x &= 1950 \quad || : 65 \\ x &= \frac{1950}{65} \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Tähtiharrastajan etäisyys korkeammasta talosta on 30 m.

Vastaus: 30 m

147. Piirretään mallikuva. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x . Tällöin kolmion DEC korkeus on $4 - x$.



Kolmioilla ABC ja DEC on yhteinen kulma C ja lisäksi janat AB ja DE ovat yhdensuuntaiset, joten kulmat CBA ja CED ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Täten kk-lauseen nojalla kolmiot ABC ja DCE ovat yhdenmuotoisia.

Kolmioiden korkeusjana sekä kannat ovat toistensa vastinjanoja.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on yhtä

suuri, niin $\frac{4}{4-x} = \frac{10}{x}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$4x = 10(4 - x)$$

$$4x = 40 - 10x$$

$$4x + 10x = 40$$

$$14x = 40 \quad || : 14$$

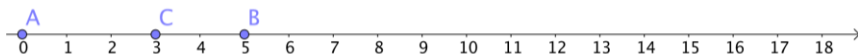
$$x = \frac{40}{14} = \frac{20}{7} = 2,85\dots$$

$$x \approx 2,9$$

Neliön sivun pituus on noin 2,9 cm.

Vastaus: 2,9 cm

148.



Merkitään pisteen D paikkaa lukusuoralla kirjaimella x .

Nyt janan DA pituus on $x - 0 = x$ ja janan DB pituus on $x - 5$.

Janan CA pituus on $3 - 0 = 3$ ja janan CB pituus on $5 - 3 = 2$.

Verranto $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ on voimassa, kun $\frac{3}{2} = \frac{x}{x-5}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$3(x - 5) = 2x$$

$$3x - 15 = 2x$$

$$3x - 2x = 15$$

$$x = 15$$

Pisteen D paikka lukusuoralla on 15.

Vastaus: $D = 15$

1.3 Pinta-alojen ja tilavuuksien suhteita

ALOITA PERUSTEISTA

149. a) Vastinsivujen pituudet ovat 5,0 cm ja 4,0 cm ja niiden suhde on

$$\frac{5}{4} = 1,25.$$

Vastaus: $\frac{5}{4} = 1,25$

- b) Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen toinen potenssi eli

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = 1,5625.$$

Vastaus: $\frac{25}{16} = 1,5625$

150. a) Pinta-alojen yksiköiden muutosten suhdeluku on 100, joten $5 \text{ m}^2 = 500 \text{ dm}^2$.

- b) Pinta-alojen yksiköiden muutosten suhdeluku on 100, joten $24 \text{ km}^2 = 2400 \text{ ha}$.

- c) Pinta-alojen yksiköiden muutosten suhdeluku on 100, joten $8900 \text{ mm}^2 = 89 \text{ cm}^2$.

- d) Tilavuuden yksiköiden muutosten suhdeluku on 1000, joten $4000 \text{ cm}^3 = 4 \text{ dm}^3$.

- e) Vetomittojen yksiköiden muutosten suhdeluku on 10, joten $0,5 \text{ l} = 5 \text{ dl}$.

- f) Vetomittojen yksiköiden muutosten suhdeluku on 10, joten $40 \text{ ml} = 4 \text{ cl}$.

151. Muutetaan suuruusluokat I – IV helpommin ymmärrettäviksi yksiköiksi.

I $6000 \text{ m}^3 = 6\,000\,000 \text{ dm}^3 = 6\,000\,000 \text{ l}$

II $10 \text{ dl} = 1 \text{ l}$

III $100 \text{ cm}^3 = 0,1 \text{ dm}^3 = 0,1 \text{ l} = 1 \text{ dl}$

IV $7 \text{ dm}^3 = 7 \text{ l}$

A Uima-altaan tilavuus on pienempi kuin urheiluhallin tilavuus, joten uima-altaan tilavuus on $150\,000 \text{ l}$ eli vaihtoehto V.

B Urheiluhallilla on suurin tilavuus, joten sen tilavuus on $6\,000\,000 \text{ l}$ eli vaihtoehto I.

C Koripallon tilavuus on 7 l eli vaihtoehto IV.

D Hajuvesipullon tilavuus on 1 dl eli vaihtoehto III.

E Termospullon tilavuus on 1 l eli vaihtoehto II.

Vastaus: A:V, B:I, C:IV, D:III ja E:II

152. Pallot ovat yhdenmuotoisia ja niiden halkaisijat ovat toistensa

vastinjanoja. Pallojen mittakaava on $\frac{6,7}{4,0}$.

a) Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, joten isomman pallon pinta-alan suhde pienempään palloon on $\left(\frac{6,7}{4,0}\right)^2 = \frac{44,89}{16} = 2,805\dots \approx 2,8$.

Vastaus: $44,89:16 \approx 2,8$

b) Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio, joten isomman pallon pinta-alan suhde pienempään palloon on

$$\left(\frac{6,7}{4,0}\right)^3 = \frac{300,763}{64} = 4,699\dots \approx 4,7$$

Vastaus: $300,763:64 \approx 4,7$

153. a) Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, joten huoneen todellinen pinta-ala A saadaan verrannosta

$$\frac{60}{A} = \left(\frac{1}{50}\right)^2$$

$$\frac{60}{A} = \frac{1}{2500}$$

$$A = 60 \cdot 2500$$

$$A = 150\,000$$

Huoneen pinta-ala todellisuudessa on $150\,000\text{ cm}^2 = 15\text{ m}^2$.

Vastaus: 15 m^2

- b) Muunnetaan pinta-ala neliösenttimetreiksi $110\text{ m}^2 = 1\,100\,000\text{ cm}^2$.
Asunnon piirroksen pinta-ala A saadaan verrannosta

$$\frac{A}{1\,100\,000} = \left(\frac{1}{50}\right)^2$$

$$\frac{A}{1\,100\,000} = \frac{1}{2500}$$

$$2500A = 1 \cdot 1\,100\,000 \quad || : 2500$$

$$A = 440$$

Asunnon pinta-ala piirustuksessa on 440 cm^2 .

Vastaus: 440 cm^2

154. Merkitään pienoismallin säiliön tilavuutta kirjaimella V ja muunnetaan korkeus senttimetreiksi $7,70\text{ m} = 770\text{ cm}$.
Taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Tilavuus (l)	Korkeus (cm)
Höyrykone	2500	770
Pienoismalli	V	24

Höyrykoneen ja pienoismallin korkeudet ovat vastinjanoja, joten kappaleiden tilavuuksien suhde on $\frac{2500}{V} = \left(\frac{770}{24}\right)^3$.

Ratkaistaan yhtälöstä tilavuus V .

$$\frac{2500}{V} = \left(\frac{770}{24}\right)^3$$

$$\frac{2500}{V} = \frac{456\,533\,000}{13\,824}$$

$$456\,533\,000V = 2500 \cdot 13\,824 \quad || : 456\,533\,000$$

$$V = \frac{34\,560\,000}{456\,533\,000}$$

$$V = 0,0757\dots$$

$$V \approx 0,076$$

Pienoismallin säiliön tilavuus on noin $0,076\text{ l} = 0,76\text{ dl}$.

Vastaus: 0,76 dl

VAHVISTA OSAAMISTA

- 155.** a) $990 \text{ a} = 9,9 \text{ ha} = 0,099 \text{ km}^2$
- b) $0,38 \text{ ha} = 38 \text{ a} = 3800 \text{ m}^2 = 380\,000 \text{ dm}^2$
- c) $100\,000 \text{ mm}^2 = 1000 \text{ cm}^2 = 10 \text{ dm}^2 = 0,1 \text{ m}^2$
- d) $3700 \text{ mm}^3 = 3,7 \text{ cm}^3 = 0,0037 \text{ dm}^3$
- e) $4,5 \text{ m}^3 = 4500 \text{ dm}^3 = 4\,500\,000 \text{ cm}^3$
- f) $60 \text{ dl} = 600 \text{ cl} = 6000 \text{ ml}$
- 156.** A $0,1 \text{ dm}^3 = 0,1 \text{ l} = 1 \text{ dl}$ eli vaihtoehto III.
- B $1 \text{ cm}^3 = 0,001 \text{ dm}^3 = 0,001 \text{ l} = 1 \text{ ml}$ eli vaihtoehto I.
- C $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$ eli vaihtoehto IV.
- D $0,1 \text{ m}^3 = 100 \text{ dm}^3 = 100 \text{ l} = 1 \text{ hl}$ eli vaihtoehto II.
- E $10 \text{ cm}^3 = 0,01 \text{ dm}^3 = 0,01 \text{ l} = 1 \text{ cl}$ eli vaihtoehto V.

Vastaus: A:III, B:I, C:IV, D:II ja E:V

157. a) $x^2 = 25$
 $x = \pm\sqrt{25}$
 $x = \pm 5$

b) $x^3 = 64$
 $x = \sqrt[3]{64}$
 $x = 4$

c)

$$\frac{x}{5} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$$
$$\frac{x}{5} = \frac{1^2}{10^2}$$
$$\frac{x}{5} = \frac{1}{100}$$
$$100x = 1 \cdot 5 \quad || :100$$
$$x = \frac{5}{100} \quad (^5)$$
$$x = \frac{1}{20}$$

d)

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{x}\right)^3$$
$$\frac{1}{8} = \frac{1^3}{x^3}$$
$$x^3 = 8$$
$$x = \sqrt[3]{8}$$
$$x = 2$$

158. a) Koska mittakaava on 1:20, oikean pallon pituus on 20-kertainen pienoismallin pituuteen verrattuna.

$$30,0 \text{ cm} \cdot 20 = 600 \text{ cm} = 6,00 \text{ m}$$

Oikean pallon pituus on 6,00 m.

Vastaus: 6,00 m

- b) Merkitään pienoismalliin kuluva materiaalia kirjaimella A ja taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Materiaalin määrä (m^2)	Mittakaava
Pienoismalli	A	1
Oikea pallo	20,8	20

Muodostetaan yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhteen yhtälö ja ratkaistaan siitä pinta-ala A .

$$\frac{A}{20,8} = \left(\frac{1}{20}\right)^2$$

$$\frac{A}{20,8} = \frac{1}{400} \quad || \cdot 20,8$$

$$A = \frac{20,8}{400}$$

$$A = 0,052$$

Pienoismalliin kuluu materiaalia $0,052 \text{ m}^2 = 5,20 \text{ dm}^2$.

Vastaus: $5,20 \text{ dm}^2$

- c) Merkitään oikeaan palloon tarvittavan heliumin määrää kirjaimella V ja taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Heliumin määrä (cm^3)	Mittakaava
Pienoismalli	350	1
Oikea pallo	V	20

Muodostetaan yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuden suhteen yhtälö ja ratkaistaan siitä tilavuus V .

$$\frac{350}{V} = \left(\frac{1}{20}\right)^3$$

$$\frac{350}{V} = \frac{1}{8000}$$

$$V = 350 \cdot 8000$$

$$V = 2\,800\,000$$

Oikean pallon täyttämiseen tarvitaan heliumia $2\,800\,000 \text{ cm}^3 = 2,8 \text{ m}^3$.

Vastaus: $2,8 \text{ m}^3$

159. Lasketaan juomapullojen tilavuuksien suhde.

$$\frac{0,33}{0,50} = 0,66$$

Lasketaan tilavuuksien suhde korkeuksien avulla.

$$\left(\frac{11,5}{14,0}\right)^3 = \frac{11,5^3}{14,0^3} = 0,554\dots$$

Koska juomapullojen tilavuuksien suhde on eri suuri kuin pullojen korkeuksien avulla laskettu tilavuuksien suhde, pullot eivät ole yhdenmuotoisia.

Vastaus: eivät ole

160. a) Muunnetaan pinta-alat samaan yksikköön.

$$5 \text{ ha} = 500\,000\,000 \text{ cm}^2$$

Pinta-alojen suhde on mittakaavan k neliö. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä mittakaava k .

$$k^2 = \frac{1,25}{500\,000\,000}^{(1,25)}$$

$$k^2 = \frac{1}{400\,000\,000}$$

$$k = (\pm) \sqrt{\frac{1}{400\,000\,000}}$$

$$k = (\pm) \frac{1}{20\,000}$$

Kartan mittakaava on 1:20 000.

Vastaus: 1:20 000

- b) Muunnetaan tilavuudet samaan yksikköön.

$$300 \text{ m}^3 = 300\,000 \text{ dm}^3$$

Tilavuuksien suhde on mittakaavan k kuutio. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä mittakaava k .

$$k^3 = \frac{2,4}{300\,000}^{(2,4)}$$

$$k^3 = \frac{1}{125\,000}$$

$$k = \sqrt[3]{\frac{1}{125\,000}}$$

$$k = \frac{1}{50}$$

Pienoismallin mittakaava on 1:50.

Vastaus: 1:50

161. Muunnetaan pinta-alat samaan yksikköön.

$$12,5 \text{ dm}^2 = 1250 \text{ cm}^2$$

Merkitään kasvojen korkeutta tietokoneen ruudulla kirjaimella h ja taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Pinta-ala (cm ²)	Korkeus (mm)
Kännykän kuvaruutu	18	30
Tietokoneen kuvaruutu	1250	h

Korkeudet ovat toistensa vastinjanoja. Muodostetaan yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhteen yhtälö ja ratkaistaan siitä korkeus h .

$$\frac{18}{1250} = \left(\frac{30}{h}\right)^2$$

$$\frac{18}{1250} = \frac{900}{h^2}$$

$$18h^2 = 900 \cdot 1250$$

$$18h^2 = 1125\,000 \quad || :18$$

$$h^2 = \frac{1125\,000}{18}$$

$$h^2 = 62\,500$$

$$h = (\pm)\sqrt{62\,500}$$

$$h = (\pm)250$$

Kasvojen korkeus tietokoneen kuvaruudulla on $250 \text{ mm} = 25 \text{ cm}$.

Vastaus: 25 cm

162. a) Merkitään pienemmän patsaan tilavuutta kirjaimella V ja taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Tilavuus (l)	Korkeus (cm)
Pienempi patsas	V	22
Suurempi patsas	3,0	32

Patsaiden korkeudet ovat vastinjanoja, joten kappaleiden tilavuuksien suhde on $\frac{V}{3,0} = \left(\frac{22}{32}\right)^3$. Ratkaistaan yhtälöstä pienemmän patsaan tilavuus V .

$$\frac{V}{3,0} = \left(\frac{22}{32}\right)^3$$

$$\frac{V}{3,0} = \frac{22^3}{32^3}$$

$$\frac{V}{3,0} = \frac{10\,648}{32\,768} \quad \parallel \cdot 3$$

$$V = \frac{10\,648}{32\,768} \cdot 3$$

$$V = 0,974\dots$$

$$V \approx 0,97$$

Pienemmän patsaan tilavuus on noin 0,97 l.

Vastaus: 0,97 litraa

- b) Merkitään suuremman patsaan hintaa kirjaimella x ja taulukoidaan tehtävät tiedot.

	Tilavuus (l)	Hinta (€)
Pienempi patsas	0,974...	50
Suurempi patsas	3,0	x

Patsaiden hinta on suoraan verrannollinen käytettävän materiaalin määrään, joten muodostetaan verranto ja ratkaistaan se.

$$\frac{0,974...}{3,0} = \frac{50}{x}$$

$$0,974...x = 50 \cdot 3,0$$

$$0,974...x = 150 \quad \| : 0,974...$$

$$x = \frac{150}{0,974...}$$

$$x = 153,869...$$

$$x \approx 153,87$$

Suuremman patsaan hinta on 153,87 euroa.

Vastaus: 153,87 €

163. Massa ja tilavuus ovat suoraan verrannolliset, joten massojen suhde on korkeuksien suhteen kuutio. Merkitään täysikasvuisen sarvikuonon massaa kirjaimella m ja taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Massa (kg)	Korkeus (m)
Vastasyntynyt	40	0,50
Täysikasvuinen	m	1,5

Muodostetaan yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhteen yhtälö ja ratkaistaan siitä täysikasvuisen sarvikuonon massa m .

$$\frac{40}{m} = \left(\frac{0,50}{1,5} \right)^3$$

$$\frac{40}{m} = \frac{0,125}{3,375}$$

$$0,125m = 40 \cdot 3,375$$

$$0,125m = 135 \quad \| : 0,125$$

$$m = \frac{135}{0,125}$$

$$m = 1080$$

$$m \approx 1100$$

Täysikasvuisen sarvikuonon massa on noin 1100 kg.

Vastaus: 1100 kg

164. Merkitään suurempaan kannuun tarvittavan tiivisteen määrää kirjaimella V ja taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Tiivistettä (l)	Mittakaava
Pienempi kannu	0,2	3
Suurempi kannu	V	4

Muodostetaan yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhteen yhtälö ja ratkaistaan siitä suurempaan kannuun tarvittavan tiivisteen määrä V .

$$\frac{0,2}{V} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$\frac{0,2}{V} = \frac{27}{64}$$

$$27V = 0,2 \cdot 64$$

$$27V = 12,8 \quad || : 27$$

$$V = \frac{12,8}{27}$$

$$V = 0,47\dots$$

$$V \approx 0,5$$

Suurempaan kannuun tarvitaan tiivistettä noin 0,5 l.

Vastaus: 0,5 l

- 165.** Merkitään Hongkongin pinta-alaa luonnossa kirjaimella A ja taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Pinta-ala (cm ²)	Mittakaava
Kartta	44	1
Luonto	A	500 000

Muodostetaan yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhteen yhtälö ja ratkaistaan siitä pinta-ala A .

$$\frac{44}{A} = \left(\frac{1}{500\,000} \right)^2$$

$$\frac{44}{A} = \frac{1}{250\,000\,000\,000}$$

$$A = 44 \cdot 250\,000\,000\,000$$

$$A = 11\,000\,000\,000\,000$$

Hongkongin pinta-ala on $11\,000\,000\,000\,000\text{ cm}^2 = 1100\text{ km}^2$.

Asukastiheys saadaan, kun asukasluku jaetaan pinta-alalla, joten Hongkongin asukastiheys on

$$\frac{7\,200\,000\text{ asukasta}}{1100\text{ km}^2} = 6545,45\dots\text{ asukasta/km}^2 \approx 6500\text{ asukasta/km}^2.$$

Vastaus: 6500 asukasta/km²

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 166.** Koska pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö ja pinta-alojen suhde on $\frac{1}{2}$, niin mittakaavojen suhde on $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Uusi mittakaava saadaan kertomalla alkuperäistä mittakaavaa luvulla $\frac{1}{\sqrt{2}}$

eli uusi mittakaava on

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{20\,000} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 20\,000} \approx \frac{1}{28\,300}.$$

Vastaus: 1:28 300

- 167.** Tiimalasissa hiekan valumiseen kuluva aika on suoraan verrannollinen tiimalasin yläosassa olevan hiekan tilavuuteen. Lasketaan aluksi, kuinka suuri osa hiekasta on valunut.

Merkitään täyden tiimalasin korkeutta kirjaimella h ja tilavuutta kirjaimella V . Tunnin jälkeen tiimalasin korkeus on $0,5h$ ja merkitään sen tilavuutta kirjaimella x . Taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Tilavuus	Korkeus
Täysi tiimalasi	V	h
Tiimalasi tunnin jälkeen	x	$0,5h$

Täyden tiimalasin hiekka ja tunnin jälkeen tiimalasissa oleva hiekka ovat yhdenmuotoisia kappaleita ja niiden korkeudet ovat vastinjanoja, joten

niiden tilavuuksien suhde on $\frac{V}{x} = \left(\frac{h}{0,5h}\right)^3$.

Ratkaistaan yhtälöstä tunnin jälkeen tiimalasissa olevan hiekan tilavuus x .

$$\begin{aligned}\frac{V}{x} &= \left(\frac{h}{0,5h}\right)^3 \\ \frac{V}{x} &= \frac{h^3}{0,5^3 h^3} \quad (h^3) \\ \frac{V}{x} &= \frac{1}{0,125} \\ \frac{V}{x} &= 8 \\ 8x &= V \quad || :8 \\ x &= \frac{1}{8}V\end{aligned}$$

Tunnin jälkeen tiimalasissa on $\frac{1}{8}$ alkuperäisestä hiekasta, joten tunnissa eli 60 minuutissa hiekkaa on valunut $\frac{7}{8}$ alkuperäisestä määrästä.

Merkitään kirjaimella t kuinka moneksi minuutiksi hiekkaa on tiimalasissa alunperin.

Saadaan yhtälö $\frac{7}{8}t = 60$ ja ratkaistaan siitä aika t .

$$\frac{7}{8}t = 60 \quad || \cdot 8$$

$$7t = 480 \quad || : 7$$

$$t = \frac{480}{7}$$

$$t = 68,57...$$

$$t \approx 69$$

Tiimalasissa on hiekkaa alun perin noin 69 minuutiksi, joten loppu hiekka valuu tiimalasista $69 - 60 = 9$ minuutissa.

Vastaus: 9 min

- 168.** Merkitään alkuperäisen kappaleen tilavuutta kirjaimella V . Tällöin kasvaneen kappaleen tilavuus on $1,2V$.

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan k kuutio. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kappaleiden mittakaava k .

$$k^3 = \frac{1,2V}{V}$$

$$k^3 = 1,2$$

$$k = \sqrt[3]{1,2}$$

$$k = 1,062...$$

Yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, joten pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_{\text{kasvanut}}}{A_{\text{alkuperäinen}}} = k^2 = \left(\sqrt[3]{1,2}\right)^2 = 1,129... \approx 1,13$$

Tilavuuden kasvaessa 20 % pinta-ala kasvaa noin 1,13-kertaiseksi eli 13 %.

Vastaus: 13 %

169. Samasta aineesta tehtyjen kappaleiden tilavuus on suoraan verrannollinen niiden massaan. Samasta aineesta tehtyjen yhdenmuotoisten kappaleiden massojen suhde on mittakaavan kuutio.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan mittakaava k .

$$k^3 = \frac{54}{16}$$

$$k^3 = \frac{27}{8}$$

$$k = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$$

$$k = \frac{3}{2}$$

Yhdenmuotoisten kappaleiden mittakaava on $\frac{3}{2}$.

Kappaleiden maalaamiseen kuluva maali on suoraan verrannollinen kappaleiden pinta-alaan. Yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-ala on mittakaavan neliö.

Merkitään pienemmän kappaleen maalaamiseen kuluvaa maalin määrää kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan maalaamiseen kuluva maali x .

$$\frac{1,5}{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\frac{1,5}{x} = \frac{9}{4}$$

$$9x = 1,5 \cdot 4$$

$$9x = 6 \quad || :9$$

$$x = \frac{6}{9}$$

$$x = 0,666\dots$$

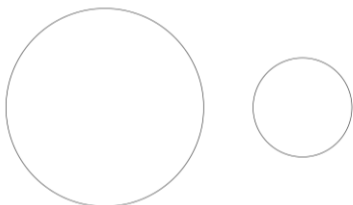
$$x \approx 0,67$$

Pienemmän kappaleen maalaamiseen kuluu maalia noin 0,67 dl.

Vastaus: 0,67 dl

Aloitussaukeamaan liittyviä tehtäviä

1. Puolittamalla alkuperäisen ympyrän säde saadaan uusi ympyrä ja tällöin mittakaava on 1:2.



Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_{\text{pienennös}}}{A_{\text{alkuperäinen}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

Pienennöksen pinta-ala on 25 % alkuperäisen ympyrän pinta-alasta.

Vastaus: 25 % alkuperäisen ympyrän pinta-alasta

2. Logon pinta-ala ohjelmassa on $10 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 150 \text{ cm}^2$.
Muunnetaan pinta-alayksiköt samoiksi $0,54 \text{ m}^2 = 5400 \text{ cm}^2$.
Muodostetaan verranto pinta-alojen suhteista ja ratkaistaan siitä mittakaava k .

$$\frac{A_{\text{suurennos}}}{A_{\text{alkuperäinen}}} = k^2$$

$$\frac{5400}{150} = k^2$$

$$k^2 = \frac{36}{1}$$

$$k = (\pm) \sqrt{\frac{36}{1}}$$

$$k = \frac{6}{1}$$

Mittakaavan mukaan suurennos on kuusinkertainen eli logoa pitää suurentaa $600\% - 100\% = 500\%$.

Vastaus: 500 %