

HARJOITUSKOE

- H1.** a) Suoran ympyräkartion korkeusjana, säde ja sivujana rajoittavat suorakulmaisen kolmion, jonka korkeus on 8 m ja hypotenuusa $1000 \text{ cm} = 10 \text{ m}$.

Ratkaistaan ympyräkartion pohjaympyrän säde suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$r^2 + 8^2 = 10^2$$

$$r^2 = 10^2 - 8^2$$

$$r^2 = 100 - 64$$

$$r^2 = 36$$

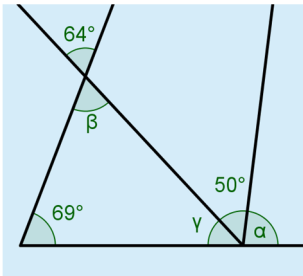
$$r = (\pm) \sqrt{36}$$

$$r = 6$$

Säde on 6 m.

Vastaus: $r = 6 \text{ m}$

- b) Täydennetään kuvaan kaksi kulmaa lisää.



Kulma β ja 64° kulma ovat ristikulmina yhtä suuret, joten $\beta = 64^\circ$.

Kolmion kulmien summa on 180° , joten $\gamma = 180^\circ - 69^\circ - 64^\circ = 47^\circ$.

Kulmat γ , 50° ja α muodostavat yhdessä oikokulman, joten $\alpha = 180^\circ - 47^\circ - 50^\circ = 83^\circ$.

Vastaus: $\alpha = 83^\circ$

- c) Tummennettu nelikulmio on puolisuunnikas.

Sen pinta-ala on

$$A = \frac{2,7 + 7,3}{2} \cdot 4,0 = \frac{10}{2} \cdot 4 = 20$$

Pinta-ala on 20 m^2 .

Vastaus: 20 m^2

- H2.** a) Merkitään kolmion kulmat $2x$, $7x$ ja $9x$. Muodostetaan yhtälö kolmion kulmien summasta ja ratkaistaan siitä tuntematon x .

$$\begin{aligned} 2x + 7x + 9x &= 180 \\ 18x &= 180 \quad ||: 18 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Kolmion kulmat ovat

$$2x = 2 \cdot 10^\circ = 20^\circ$$

$$7x = 7 \cdot 10^\circ = 70^\circ$$

$$9x = 9 \cdot 10^\circ = 90^\circ.$$

Kolmion pienin kulma on 20° .

Vastaus: 20°

- b) Mittakaava 1:1000 tarkoittaa, että 1 cm kartalla on 1000 cm luonnossa. Siten 3,5 cm kartalla on luonnossa $3,5 \cdot 1000 \text{ cm} = 3\,500 \text{ cm} = 35 \text{ m}$.

$$(\text{Tai verranto esim. } \frac{3,5 \text{ cm}}{x} = \frac{1}{1000}.)$$

Vastaus: 35 m

- c) Kolmion pinta-ala on $A = \frac{ah}{2}$, jossa $a = 3 \text{ m}$.

Muodostetaan yhtälö, josta ratkaistaan kolmion korkeus h .

$$\begin{aligned} \frac{ah}{2} &= A \\ \frac{3 \cdot h}{2} &= 30 \quad || \cdot 2 \\ 3h &= 60 \quad || : 3 \\ h &= 20 \end{aligned}$$

Kolmion korkeus on 20 m.

Vastaus: 20 m

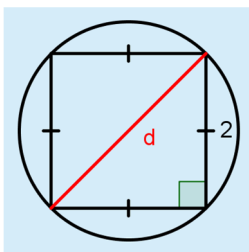
H3. Lasketaan ensin koko kuvion pinta-ala.

Koko kuvio koostuu neliöstä, jonka sivun pituus on 2, ja neljästä puoliympyrästä, joiden säde on 1.

Koko kuvion pinta-ala on siis

$$A_{\text{koko}} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 4 + 2\pi.$$

Keltaisten alueiden pinta-ala saadaan vähentämällä koko kuvion pinta-alasta keskiympyrän ala. Keskiympyrän halkaisija d on neliön lävistäjä.



Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusana on ympyrän halkaisija d ja kateetteina neliön kaksi sivua. Ratkaistaan yhtälöstä halkaisija d .

$$d^2 = 2^2 + 2^2$$

$$d^2 = 4 + 4$$

$$d^2 = 8$$

$$d = (\pm)\sqrt{8}$$

Ympyrän säde r on puolet halkaisijasta, joten $r = \frac{\sqrt{8}}{2}$.

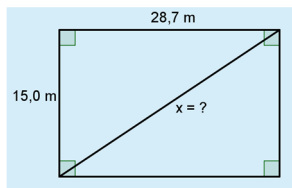
$$\text{Ympyrän pinta-ala on } A_{\text{ympyrä}} = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{\sqrt{8}^2}{2^2} = \pi \cdot \frac{8}{4} = 2\pi.$$

$$\text{Kysytty pinta-ala on } A_{\text{koko}} - A_{\text{ympyrä}} = 4 + 2\pi - 2\pi = 4.$$

Vastaus: 4

- H4. a)** Suorakulmion lävistäjä jakaa suorakulmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä lävistäjä x .

$$\begin{aligned}x^2 &= 15,0^2 + 28,7^2 \\x &= (\pm)\sqrt{15,0^2 + 28,7^2} \\x &= \sqrt{1048,69} \\x &= 32,383... \approx 32,4\end{aligned}$$

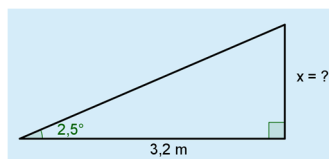


Lyhin etäisyys on noin 32,4 m.

Vastaus: 32,4 m

- b)** Merkitään kysyttyä etäisyyttä kirjaimella x . Piirretään mallikuva ja ratkaistaan x suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 2,5^\circ &= \frac{x}{3,2} \quad || \cdot 3,2 \\x &= 3,2 \cdot \tan 2,5^\circ \\x &= 0,1397... \approx 0,140\end{aligned}$$



Lentokone nousee ylöspäin noin $0,140 \text{ km} = 140 \text{ m}$.

Vastaus: 140 m

- H5. a)** Pinon paksuus on $1\,000\,000 \cdot 0,1 \text{ mm} = 100\,000 \text{ mm} = 100 \text{ m}$.

Vastaus: 100 m

- b) Paperipino on lieriö, jonka pohjan mitat ovat
 $210 \text{ mm} = 21,0 \text{ cm} = 0,21 \text{ m}$ ja
 $297 \text{ mm} = 29,7 \text{ cm} = 0,297 \text{ m}$.

Lieriön korkeus on 100 m .

Tilavuus on $0,21 \text{ m} \cdot 0,297 \text{ m} \cdot 100 \text{ m} = 6,237 \text{ m}^3 \approx 6,2 \text{ m}^3$.

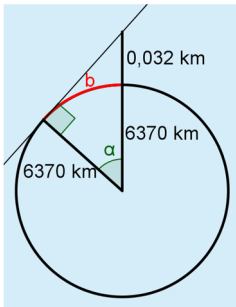
Vastaus: $6,2 \text{ m}^3$

- c) Tulosteiden tilavuus on $6,237 \text{ m}^3 = 6237 \text{ dm}^3$.

Massa m on tiheyden ja tilavuuden tulo, joten
 $m = \rho \cdot V = 1,2 \text{ kg/dm}^3 \cdot 6\,237 \text{ dm}^3 = 7\,484,4 \text{ kg} \approx 7\,500 \text{ kg}$.

Vastaus: $7\,500 \text{ kg}$

H6. Piirretään mallikuva ja muutetaan korkeus kilometreiksi $32 \text{ m} = 0,032 \text{ km}$.



Kysytty etäisyys on sektorin kaaren b pituus. Kaaren pituuden laskemiseksi selvitetään ensin keskuskulma α suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusana on laivan kannen etäisyys maapallon keskipisteestä $6370 \text{ km} + 0,032 \text{ km} = 6370,032 \text{ km}$.

Ratkaistaan kulma α kosinin avulla.

$$\cos \alpha = \frac{6370}{6370,032}$$

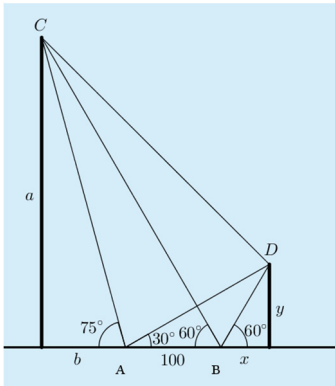
$$\alpha = 0,181...^\circ$$

Lasketaan kaaren b pituus.

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r = \frac{0,181...^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370 \text{ km} = 20,191... \text{ km} \approx 20 \text{ km}$$

Vastaus: 20 km:n päähän

- H7.** Merkitään kuvaan tuntemattomia pituuksia kirjaimilla.
Kysytyt majakoiden korkeudet ovat a ja y .



Suorakulmaisista kolmioista saadaan yhtälöparit.

$$\begin{cases} \tan 75^\circ = \frac{a}{b} \\ \tan 60^\circ = \frac{a}{b+100} \end{cases}$$

ja

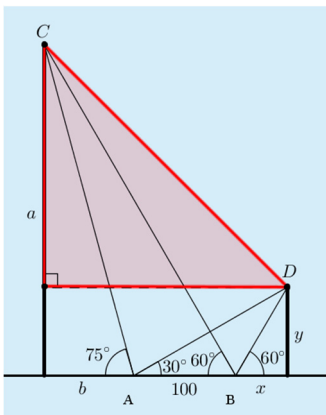
$$\begin{cases} \tan 60^\circ = \frac{y}{x} \\ \tan 30^\circ = \frac{y}{x+100} \end{cases}.$$

Ratkaistaan yhtälöparit symbolisen laskennan yhtälöparin ratkaisutoiminnolla.

Ratkaisuiksi saadaan

$$a = 323,205\dots, b = 86,602\dots, x = 50 \text{ ja } y = 86,602\dots$$

Majakoiden korkeudet ovat siis $a \approx 320$ m ja $y \approx 87$ m.



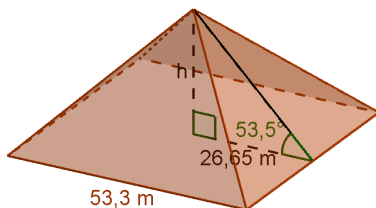
Etäisyys CD saadaan kuvaan punaisella piirretystä suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateetit ovat $a - y$ ja $b + 100 + x$ ja hypotenuusa on kysytty etäisyys $CD = z$.

Pythagoraan lauseen mukaan

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{(b + 100 + x)^2 + (a - y)^2} \\ &= \sqrt{(86,602... + 100 + 50)^2 + (323,205... - 86,602...)^2} \\ &= \sqrt{111\,960,066...} \\ &= 334,606... \text{ m} \\ &\approx 330 \text{ m.} \end{aligned}$$

Vastaus: Korkeudet ovat 320 m ja 87 m, $CD \approx 330$ m.

- H8.** Katkaistun pyramidin tilavuus voidaan määrittää laskemalla kuvitteellisen katkaisemattoman pyramidin tilavuus ja vähentämällä siitä poisleikatun osan tilavuus. Täydennetään katkaistu pyramidi kokonaiseksi jatkamalla pyramidin särmiä ja piirretään mallikuva katkaisemattomasta pyramidista.



Ratkaistaan katkaisemattoman pyramidin korkeus h_{koko} tangentin avulla suorakulmaisesta kolmiosta, jonka toisena kateettina on korkeus h_{koko} ja toisena kateettina pohjaneliön sivun puolikas $\frac{53,3 \text{ m}}{2} = 26,65 \text{ m}$.

$$\begin{aligned}\tan 53,5^\circ &= \frac{h_{\text{koko}}}{26,65} \quad || \cdot 26,65 \\ h_{\text{koko}} &= 26,65 \cdot \tan 53,5^\circ \\ h_{\text{koko}} &= 36,015\dots\end{aligned}$$

Katkaisemattoman pyramidin tilavuus olisi

$$V_{\text{koko}} = \frac{1}{3} \cdot (53,3 \text{ m})^2 \cdot 36,015\dots \text{ m} = 34\,105,270\dots \text{ m}^3.$$

Kattotasanne on 24 metrin korkeudella, joten poisleikatun osan korkeus on $h_{\text{pieni}} = 36,015\dots \text{ m} - 24 \text{ m} = 12,015\dots \text{ m}$.

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

Ratkaistaan poisleikatun pyramidin tilavuus V_{pieni} yhtälön avulla.

$$\begin{aligned}\frac{V_{\text{koko}}}{V_{\text{pieni}}} &= \left(\frac{h_{\text{koko}}}{h_{\text{pieni}}} \right)^3 \\ \frac{34105,270\dots}{V_{\text{pieni}}} &= \left(\frac{36,015\dots}{12,015\dots} \right)^3 \\ \frac{34105,270\dots}{V_{\text{pieni}}} &= \frac{36,015\dots^3}{12,015\dots^3} \\ V_{\text{pieni}} \cdot 36,015\dots^3 &= 34105,270\dots \cdot 12,015\dots^3 \quad || : 36,015\dots^3 \\ V_{\text{pieni}} &= 1266,403\dots\end{aligned}$$

Poisleikatun osan tilavuus on $V_{\text{pieni}} = 1266,403\dots \text{ m}^3$.

Temppelin tilavuus on $V_{\text{temppeli}} = 13,4 \text{ m} \cdot 16,5 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 1326,6 \text{ m}^3$.

Kukulkanin pyramidin tilavuus on

$$\begin{aligned}V_{\text{koko}} - V_{\text{pieni}} + V_{\text{temppeli}} &= 34\,105,270\dots \text{ m}^3 - 1266,274\dots \text{ m}^3 + 1326,6 \text{ m}^3 \\ &= 34\,165,596\dots \text{ m}^3 \\ &\approx 34\,000 \text{ m}^3.\end{aligned}$$

Vastaus: $34\,000 \text{ m}^3$