

KOKOAVIA TEHTÄVIÄ

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. a) Kuvio on kolmio, jonka kanta on 3 ja korkeus 2 (pituusyksikköä).
Pinta-ala on
$$A = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3.$$

Vastaus: 3

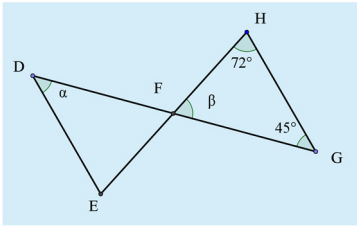
- b) Kuvio on suunnikas, jonka kanta on 5 ja korkeus 4. Pinta-ala on
$$A = 5 \cdot 4 = 20.$$

Vastaus: 20

- c) Kuvio on puolisuunnikas, jonka yhdensuuntaiset sivut ovat 3 ja 5 ja korkeus on 2. Pinta-ala on
$$A = \frac{3+5}{2} \cdot 2 = 8.$$

Vastaus: 8

2. Merkitään kulmat $\alpha = \sphericalangle EDF$ ja $\beta = \sphericalangle GFH$ kuvaan.



Janat DE ja GH ovat yhdensuuntaiset, joten samankohtaiset kulmat α ja $\sphericalangle HGF$ ovat yhtä suuria. Siis $\alpha = \sphericalangle EDF = 45^\circ$.

Kulma β on kolmion GHF kulma, ja sen suuruus on $180^\circ - 72^\circ - 45^\circ = 63^\circ$.

Vastaus: $\sphericalangle EDF = 45^\circ$, $\sphericalangle GFH = 63^\circ$.

3.

	Säde	Halkaisija	Pinta-ala	Tilavuus
Alussa	r	$d = 2r$	$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Lopussa	$2r$	$d = 2 \cdot 2r$	$A = 4\pi(2r)^2$ $= 4\pi \cdot 4r^2$ $= 4 \cdot 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi (2r)^3$ $= \frac{4}{3}\pi 2^3 r^3$ $= \frac{4}{3}\pi 8r^3$ $= 8 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

- a) Kun säde kaksinkertaistuu, niin halkaisija kaksinkertaistuu.

Vastaus: 2-kertaiseksi

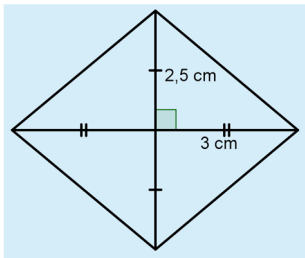
- b) Kun säde kaksinkertaistuu, niin pinta-ala kasvaa $2^2 = 4$ -kertaiseksi.

Vastaus: 4-kertaiseksi

- c) Kun säde kaksinkertaistuu, niin tilavuus kasvaa $2^3 = 8$ -kertaiseksi.

Vastaus: 8-kertaiseksi

4. Neljäkkään lävistäjät puolittavat toisensa ja leikkaavat toisensa suorassa kulmassa. Piirretään mallikuva.



Neljäkäs koostuu neljästä yhtenevästä suorakulmaisesta kolmiosta, joiden kateetteina ovat lävistäjien puolikkaat $\frac{5 \text{ cm}}{2} = 2,5 \text{ cm}$ ja $\frac{6 \text{ cm}}{2} = 3 \text{ cm}$.

Yhden kolmion pinta-ala on $\frac{3 \text{ cm} \cdot 2,5 \text{ cm}}{2} = 3,75 \text{ cm}^2$.

Neljäkkään pinta-ala on $4 \cdot 3,75 \text{ cm}^2 = 15 \text{ cm}^2$.

Vastaus: 15 cm^2

5. Koska öljylautta on joka kohdasta yhtä korkea, se on lieriö.

Lieriön tilavuus on

$V = A_{\text{pohja}} \cdot h$, joten öljylautan tilavuus on

$$V = 2,0 \text{ km}^2 \cdot 0,001 \text{ mm} = 2\,000\,000 \text{ m}^2 \cdot 0,000\,001 \text{ m} = 2 \text{ m}^3.$$

Vastaus: 2 m^3

6. a) Väite: Kaikki suorakulmiot ovat suunnikkaita.
Suorakulmion vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, joten suorakulmio on suunnikas.
- Vastaus: tosi.
- b) Väite: Kaikki tasasivuiset kolmiot ovat tasakylkisiä.
Tasakylkisessä kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua, tasasivuisessa kolmiossa niitä on kolme, joten tasasivuiset kolmiot ovat myös tasakylkisiä.
- Vastaus: tosi.
- c) Väite: Kaikki suorakulmaiset särmiöt ovat kuutioita.
Suorakulmaisessa särmiössä pituus, leveys ja korkeus voivat olla eripituiset. Kuutiossa kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, joten kaikki suorakulmaiset särmiöt eivät ole kuutioita.
- Vastaus: epätosi.
- d) Väite: Kaikki pyramidit ovat neliöpohjaisia.
On olemassa myös esim. kolmiopohjaisia pyramideja, joten kaikki pyramidit eivät ole neliöpohjaisia.

Vastaus: epätosi.

7. Kaikilla kappaleilla on sama korkeus 4 cm, joten voidaan tarkastella esim. niiden pohjia.

Kappaleiden II ja III pohjaympyröiden halkaisijat ovat 4 cm ja kappaleen IV halkaisija on 4 cm. Siis mikä tahansa kappaleista II - IV mahtuu kappaleen I sisään, joten kappale I on tilavuudeltaan suurin.

Vastaavasti kumpi tahansa kappaleista II ja IV mahtuu kappaleen III sisään, joten kappale III on tilavuudeltaan toiseksi suurin.

Kappaleiden II ja IV tilavuuksien suuruusjärjestys voidaan määrittää laskemalla.

Kappale II on suora ympyräkartio, ja sen tilavuus on kuutiosenttimetreinä

$$V_{\text{II}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{16}{3} \pi .$$

Kappale IV on pallo, ja sen tilavuus on kuutiosenttimetreinä

$$V_{\text{IV}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3} \pi .$$

Koska $32 > 16$, $V_{\text{IV}} > V_{\text{II}}$.

Kappale II on siis tilavuudeltaan pienin.

Vastaus: II, IV, III ja I

APUVÄLINEET SALLITTU

8. Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinkulmat ovat yhtä suuria, joten $\alpha = 18^\circ + 27^\circ = 45^\circ$.

Taulukoidaan sivuja ja vastinsivuja.

Pienempi nelikulmio	2,0 cm	4,5 cm	y
Suurempi nelikulmio	3,0 cm	x	13,4 cm

Muodostetaan näiden tietojen avulla verrannot ja ratkaistaan x ja y niistä.

$$\frac{2,0}{3,0} = \frac{4,5}{x}$$

$$2,0x = 3,0 \cdot 4,5 \quad || : 2,0$$

$$x = 6,75 \approx 6,8$$

$$\frac{2,0}{3,0} = \frac{y}{13,4}$$

$$3,0y = 2,0 \cdot 13,4 \quad || : 3$$

$$y = 8,933... \approx 8,9$$

Vastaus: $x \approx 6,8$ cm, $y \approx 8,9$ cm ja $\alpha = 45^\circ$

9. a) Kokonaispinta-alaan A kuuluu pohjan pinta-ala $A_{\text{pohja}} = \pi r^2$ ja vaipan pinta-ala $A_{\text{vaippa}} = \pi r s$.

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} = \pi r^2 + \pi r s \\ &= \pi \cdot (9,2 \text{ cm})^2 + \pi \cdot 9,2 \text{ cm} \cdot 28,6 \text{ cm} = 1\,092,520... \text{ cm}^2 \approx 1\,100 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Vastaus: $1\,100 \text{ cm}^2$

- b) Särmiön tahkojen kokonaispinta-alan laskemiseksi selvitetään pohjan mitat.

Pohja on kuvan mukaan neliö, jonka sivun pituus on $\sqrt{25 \text{ m}^2} = 5 \text{ m}$.
Särmiön sivutahkoina on neljä samanlaista suorakulmiota, joista jokaisen pinta-ala on $5 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 30 \text{ m}^2$.

Kokonaispinta-ala on

$$A = 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} = 2 \cdot 25 \text{ m}^2 + 4 \cdot 30 \text{ m}^2 = 170 \text{ m}^2.$$

Vastaus: 170 m^2

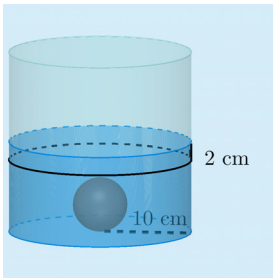
- c) Ympyrälierion pohjaympyrän halkaisija on $1000 \text{ cm} = 10 \text{ m}$, joten säde on $\frac{10 \text{ m}}{2} = 5 \text{ m}$.

Korkeus on $h = 12 \text{ m}$, joten kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\ &= 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2 \cdot \pi \cdot (5 \text{ m})^2 + 2 \cdot \pi \cdot 5 \text{ m} \cdot 12 \text{ m} \\ &= 534,070... \text{ m}^2 \\ &\approx 500 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 500 m^2

10. a) Piirretään mallikuva.



Kun kivi upotetaan veteen, se syrjäyttää lieriössä vettä oman tilavuutensa verran. Kiven syrjäyttämä vesi muodostaa alkuperäisen lieriössä olevan veden päälle lieriön muotoisen vesipatsaan eli "kappaleen", jonka korkeus on 2,0 cm ja pohja sama kuin alkuperäisessä lieriössä.

Pohjan säde on siis $\frac{10 \text{ cm}}{2} = 5 \text{ cm}$.

Kiven, tilavuus on
 $V = \pi \cdot (5 \text{ cm})^2 \cdot 2 \text{ cm} = 157,079... \text{ cm}^3 \approx 160 \text{ cm}^3$.

Vastaus: 160 cm^3

b) Taulukoidaan tiedot

	Lävistäjä	Pinta-alat
Iso	65	A_{iso}
Pieni	60	A_{pieni}

Lävistäjien pituuksien suhde 60:65 on mittakaava.

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Muodostetaan siitä verranto,

josta ratkaistaan suhde $\frac{A_{\text{iso}}}{A_{\text{pieni}}}$.

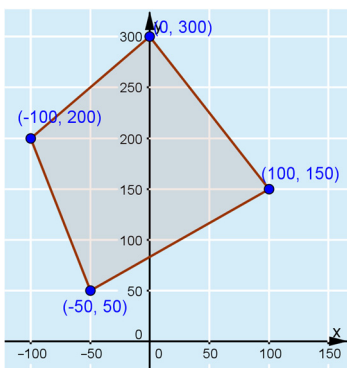
$$\frac{A_{\text{iso}}}{A_{\text{pieni}}} = \left(\frac{65}{60}\right)^2$$

$$\frac{A_{\text{iso}}}{A_{\text{pieni}}} = 1,1736\dots$$

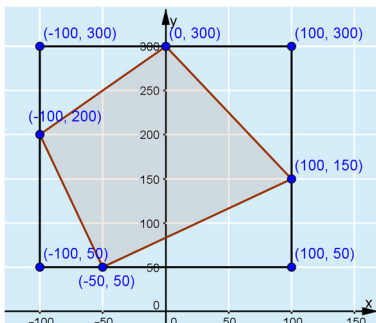
Suuremman kuvaruudun pinta-ala on 1,1736...-ertainen eli sen pinta-ala on noin 17 % pienemmän kuvaruudun pinta-alasta. Se on siis 17 % suurempi kuin pienempi kuvaruutu.

Vastaus: 17 %

11. Piirretään mallikuva.



Kortteli on epäsäännöllinen nelikulmio. Sen pinta-ala voidaan laskea kehystäen nelikulmio suorakulmiolla, joka kulkee kaikkien nelikulmion kärkien kautta ja jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.



Kysytyn nelikulmion pinta-ala saadaan, kun suorakulmion pinta-alasta vähennetään nurkissa olevien neljän suorakulmaisen kolmion pinta-alat.

$$A = 200 \cdot 250 - \left(\frac{50 \cdot 150}{2} + \frac{150 \cdot 100}{2} + \frac{100 \cdot 150}{2} + \frac{100 \cdot 100}{2} \right)$$

$$A = 50\,000 - (3\,750 + 7\,500 + 7\,500 + 5\,000)$$

$$A = 50\,000 - 23\,750$$

$$A = 26\,250$$

Koska koordinaatiston yksikkö on metri, on pinta-ala laskettu neliömetreinä.

$$26\,250\text{ m}^2 = 262,5\text{ a} = 2,625\text{ ha} \approx 2,6\text{ ha}.$$

Korttelin pinta-ala on noin 2,6 ha.

Vastaus: 2,6 ha

12. Kullan tilavuus saadaan, kun vähennetään kullatun pallon tilavuudesta kultaamattoman pallon tilavuus. Lasketaan tilavuudet.

Kultaamaton pallo:

$$\text{Kultaamattoman pallon säde on } \frac{1,00\text{ cm}}{2} = 0,5\text{ cm} = 5\text{ mm}.$$

Kultaamattoman pallon tilavuus on

$$V_{\text{kultaamaton}} = \frac{4}{3}\pi \cdot (5\text{ mm})^3 = 523,598\dots\text{ mm}^3.$$

Kullattu pallo:

$$\text{Kullatun pallon säde on } 5\text{ mm} + 1,0\text{ mm} = 6\text{ mm}.$$

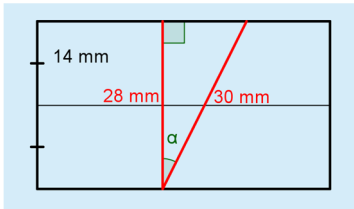
Kullatun pallon tilavuus on

$$V_{\text{kullattu}} = \frac{4}{3}\pi \cdot (6\text{ mm})^3 = 904,778\dots\text{ mm}^3.$$

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{kullattu}} - V_{\text{kultaamaton}} \\ &= 904,778\dots\text{ mm}^3 - 523,598\dots\text{ mm}^3 \\ &= 381,179\dots\text{ mm}^3 \approx 380\text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: 380 mm³

13. a) Kaltevuuskulma on pienin mahdollinen silloin, kun naula on juuri ja juuri kokonaan lautojen sisällä. Piirretään mallikuva.



Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on $14 \text{ mm} + 14 \text{ mm} = 28 \text{ mm}$ ja hypotenuusa on 30 mm .

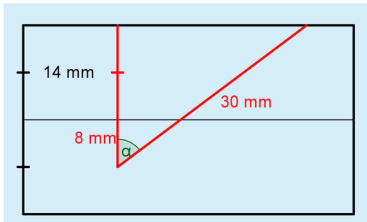
Ratkaistaan kaltevuuskulma α suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\cos \alpha = \frac{28}{30}$$
$$\alpha = 21,039 \dots^\circ$$

Vastaus on pyöristettävä ylöspäin, ettei naula mene lautojen läpi. Pienin mahdollinen kaltevuuskulma on siis 22° .

Vastaus: 22°

- b) Kaltevuuskulma on suurin mahdollinen silloin, kun naula juuri ja juuri yltää alempaan lautaan 8 millimetrin syvyydelle. Piirretään mallikuva.



Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on $14 \text{ mm} + 8 \text{ mm} = 22 \text{ mm}$ ja hypotenuusa on 30 mm .

Ratkaistaan kaltevuuskulma α suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{22}{30} \\ \alpha &= 42,833\dots^\circ\end{aligned}$$

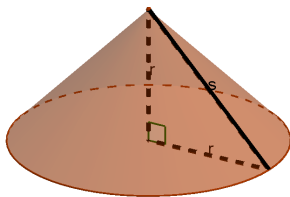
Vastaus on pyöristettävä alaspäin, jotta naula varmasti yltäisi tarpeeksi syvälle. Suurin mahdollinen kaltevuuskulma on siis 42° .

Vastaus: 42°

14. Merkitään kartion pohjan sädettä kirjaimella r . Kartion korkeus on sama kuin pohjan säde, joten myös kartion korkeus h on r .

Pohjan pinta-ala on $A_{\text{pohja}} = \pi r^2$ ja vaipan pinta-ala $A_{\text{vaippa}} = \pi r s$, jossa s on kartion sivujana. Kokonaispinta-ala on näiden alojen summa $\pi r^2 + \pi r s$.

Koska kokonaispinta-ala tunnetaan, voidaan selvittää kartion säde r , jos saadaan muodostettua kokonaispinta-alalle lauseke, jossa ei esiinny muita muuttujia kuin r . Tätä varten on ratkaistava kartion sivujanan pituus s säteen r lausekkeena.



Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä sivujana s .

$$s^2 = r^2 + r^2$$

$$s^2 = 2r^2$$

$$s = (\pm) \sqrt{2r^2}$$

$$s = \sqrt{2} \cdot \sqrt{r^2}$$

$$s = \sqrt{2} \cdot r$$

Kartion kokonaispinta-alan avulla saadaan yhtälö, josta ratkaistaan säde r .

$$A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} = A_{\text{koko}}$$

$$\pi r^2 + \pi r s = 1$$

$$\pi r^2 + \pi r \cdot \sqrt{2} \cdot r = 1$$

$$\pi r^2 + \sqrt{2} \pi r^2 = 1$$

$$3,141\dots r^2 + 4,442\dots r^2 = 1$$

$$7,584\dots r^2 = 1 \quad ||: 7,584\dots$$

$$r^2 = 0,131\dots$$

$$r = (\pm) \sqrt{0,131\dots}$$

$$r = 0,363\dots$$

Kartion pohjan säde on $r = 0,363 \dots \text{m}$.

Kartion tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \pi \cdot (0,363 \dots \text{m})^3 = 0,050134 \dots \text{m}^3$$

$$= 50,134 \dots \text{dm}^3 = 50,134 \dots \text{l} \approx 50,1 \text{ l}.$$

Vastaus: 50,1 litraa